

Міністерство освіти і науки України  
Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника  
Вінницький національний технічний університет  
Центр математичного моделювання ІППММ  
ім. Я.С.Підстригача НАН України  
AGH науково-технологічний університет  
ім. Ст.Сташіца, Польща  
Представництво "Польська академія наук" в Києві  
Лудзький університет, Польща  
Інститут кібернетики НАН України  
Національний авіаційний університет  
Фінансово-економічний інститут Таджикистану  
Економічна академія "Д.А.Ценов", Болгарія  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
НДІ інтелектуальних комп'ютерних систем ТНЕУ та ІК НАН України  
Новий університет Лісабона, Португалія  
Азербайджанська державна нафтова академія  
Об'єднаний інститут проблем інформатики НАН Білорусі  
Інститут інженерів з електротехніки  
та електроніки (ІЕЕЕ), Українська секція  
Асоціація "Інформаційні технології України"  
Громадська організація "Івано-Франківський ІТ кластер"

# "ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ"

**матеріали  
міжнародної науково-практичної конференції**

**15-16 грудня 2022 року  
Івано-Франківськ**

"INFORMATION TECHNOLOGIES AND COMPUTER MODELLING"  
proceedings  
of the International Scientific Conference  
2022, December, 15th to 16th  
Ivano-Frankivsk

Івано-Франківськ - 2022

УДК (004:004.2/004.9+007):33/37+51+621  
ББК 22.17 32.81  
I-74 Т

*Науковий редактор:*  
докт. техн. наук, проф. **Л.Б. Петришин** (AGH UST; ПНУ);

Матеріали статей опубліковані в авторській редакції

"Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання"; матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції, м. Івано-Франківськ, 15-16 грудня 2022 року. – Івано-Франківськ: п. Голіней О.М., 2022. –с.

Збірка містить матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції з проблем інформаційних технологій в технічних системах, в соціумі, освіті, медицині, економіці та екології; теорії інформації, кодування та перетворення форми інформації; технологій цифрової обробки інформації; захисту інформації в інформаційно-телекомунікаційних системах; математичного та імітаційного моделювання систем.

УДК (004:004.2/004.9+007):33/37+51+621  
ББК 22.17 32.81  
I-74 Т

**ISBN 978-617-8128-13-5**

© ПНУ ім. В. Стефаніка та автори, 2022

#### Основні напрямки роботи

Секція 1 Інформаційні технології в технічних, системах спеціального призначення, соціумі, освіті, медицині, економіці, управлінні, екології та юриспруденції

Секція 2 Теорія інформації, кодування, перетворення форми, цифрової обробки та ущільнення інформації

Секція 3 Системний аналіз

Секція 4 Глибинний аналіз та організація даних, Big Data, системи штучного інтелекту, Smart додатки

Секція 5 Кібербезпека

Секція 6 Архітектоніка та компоненти комп'ютерних систем та мереж

Секція 7 Математичне та комп'ютерне моделювання складних систем

Секція 8 Прикладні методи дослідження дискретно-неперервних математичних моделей

#### Section Structure

Section 1. Information technologies in technical and special purpose systems, information technologies in society, education, medicine, economics, management, ecology and law

Section 2. Information theory, coding and information form transformation

Section 3. System analysis

Section 4. Deep analysis and data organization, big data technologies, artificial intelligence systems, smart applications

Section 5. Information protection in information and telecommunication system

Section 6. Components, computer systems and networks architectonics

Section 7. Mathematical and computer modelling of complex systems

Section 8. Applied methods for continuous and discrete mathematical models research

# Оптимізація контролю безпеки торговельно-розважальних комплексів на основі аналізу моделей визначення ризику

Василь Бегун  
Відділ Інтегрованих  
автоматизованих систем  
спеціального призначення  
Інститут проблем математичних  
машин та систем НАНУ  
Київ, Україна  
begunw@ukr.net

Олексій Волошин  
Факультет комп'ютерних наук та  
кібернетики  
Київський національний університет  
імені Тараса Шевченка  
Київ, Україна  
olvoloshyn@ukr.net

Сергій Бегун  
Факультет інформаційних  
технологій  
Київський національний університет  
імені Тараса Шевченка  
Київ, Україна  
sergiy.begun@gmail.com

## Optimization of Safety Control of Shopping and Entertainment Complexes Based on Analysis of Risk Models

Vasilij Begun  
Department of Integrated Automated  
Systems of Special Purpose  
Institute of Mathematical Machines and  
Systems Problems of the NASU  
Kyiv, Ukraine  
begunw@ukr.net

Oleksiy Voloshyn  
Faculty of Computer Science and  
Cybernetics  
Taras Shevchenko National University  
of Kyiv  
Kyiv, Ukraine  
olvoloshyn@ukr.net

Sergiy Begun  
Faculty of Information Technology  
Taras Shevchenko National University  
of Kyiv  
Kyiv, Ukraine  
sergiy.begun@gmail.com

**Анотація**—Розглядаються проблеми безпеки торговельно-розважальних комплексів України. Як правило ці сучасні багато функціональні центри обслуговування населення споруджуються в Україні за рахунок іноземних інвестицій, базуючись на нормах країн інвесторів. Але з причин невідповідності законодавчих основ та недосконалих методів контролю, виникають проблеми з безпеки персоналу та відвідувачів. Пропонується алгоритм контролю безпеки на основі даних з надійності систем безпеки об'єктів. Сформульовані вимоги щодо програмного забезпечення для оптимізації безпеки та інспекційної діяльності.

**Ключові слова**—ризик, торговельний центр, контроль безпеки, експерти з безпеки, аудит, оптимізація періоду перевірок

**Abstract**—Safety problems of commercial and entertainment complexes in Ukraine are considered. As a rule, these modern multi-functional public service centers are built in Ukraine at the expense of foreign investments based on the norms of the investor countries. But due to the inconsistency of the legal framework and imperfect safety control methods, there are problems with the safety of staff and visitors. A safety control algorithm based on data on the reliability of object safety systems is proposed. The requirements to the software for inspection and optimization purposes are formulated.

**Keywords**—risk, trading center, safety control, safety experts, audit, optimization of the inspection period

### I. ВСТУП

В Україні існує більше 300 великих торгових (більш загальна назва – торговельно-розважальних) центрів (ТРЦ). ТРЦ – це об'єкт (велика будівля), що функціонує з метою побутового обслуговування населення, тому кількість відвідувачів становить до декількох тисяч на добу. Зазвичай це багатопверхова будівля (8 поверхів – ТРЦ «Гуллівер»), або будівля великої площі (12,7 га – ТРЦ «Лавина»), що вміщує у собі: комплекс крамниць (до декількох сотень), підприємства побутового обслуговування, заклади громадського харчування, розважальні зони та інше [1-2]. ТРЦ будуються за міжнародними стандартами та проектами, встановлюються типові системи безпеки (СБ): пожежної сигналізації, сповіщення, автоматичного пожежогасіння та інші. Тобто, питання безпеки теж вирішені на світовому рівні, але з урахуванням національних особливостей країн-інвесторів, а саме: у багатьох країнах за класифікацією безпеки ТРЦ навіть не попадають у категорію потенційно небезпечних об'єктів (ПНО), але у нашій державі ТРЦ відносять за законодавством до категорії ПНО за багатьма параметрами, як то: наявність легко займистих рідин та горючих газів, велика площа покрівлі та інше. Тому навіть після завершення будівництва комплексу, за законодавством України потрібно періодично визначати ступінь небезпеки цих об'єктів для персоналу та населення.

## II. АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ КОНТРОЛЮ БЕЗПЕКИ ТРЦ

На цей час в Україні за наказом Державної служби України з надзвичайних ситуацій (ДСНС) контроль безпеки відбувається методом інспекційних перевірок. Але при цьому виникають дуже суттєві протиріччя між інспекторами та власниками, що обумовлені невизначеностями методу контролю (недостатнім науковим та інформаційним супроводом у сфері безпеки). Так, опитувальний лист інспекційних (експертних) оцінок ризику містить 120 питань з виконання правил пожежної безпеки (ПБ). Причому відповідь може приймати лише двійкове значення: 0 – невиконання ПБ, або 1 – правило виконується. Звісно, у роботі будь-якої системи можуть бути відхилення, які принципово не змінюють ймовірність її повної відмови, але навіть незначні відхилення (часткові відмови) інспектор сприймає як невиконання правил, тому результат перевірки таких систем безпеки майже завжди призводить до максимальних значень ризику (1). Через відсутність проміжних значень в інтервалі (0,1) по 120 критеріям оцінки небезпеки виникнення пожежі результуюча оцінка ризику виникнення пожежі буде занадто консервативною і завищеною. З чого випливає, що загроза перебільшена, така оцінка нереальна, не відповідає дійсності, що у підсумку призводить до конфліктів у суспільстві. Та взагалі із статистичних даних бачимо [3, 4], що не буває надзвичайної ситуації (НС), яка є результатом повної відмови тільки однієї системи або результатом єдиного порушення. Звичайно це відбувається за деякою сукупністю відмов. У більшості випадків негативний результат щодо інспектованого ТРЦ за чинною занадто консервативною методикою отримується з причин недоліку методу - сумування максимальних оцінок за правилами, що не відповідають порядку обробки випадкових величин. Наслідок цього – припис на закриття об'єкту. Як результат створюється перешкода бізнесу, отже, шкода не тільки власнику, але й державі. Обов'язкові при цьому судові процедури створюють напругу у суспільстві, приносять власнику репутаційні та фінансові збитки, що перешкоджає впровадженню нових інвестиційних проєктів.

Використання спрощених занадто консервативних методик контролю ТРЦ пов'язано з відсутністю зручних для використання інструментів контролю безпеки достатньо складних з точки зору моделювання об'єктів, якими є ТРЦ та неоптимізованими критеріями щодо частоти інспекційних перевірок. Тому розробка сучасного програмного забезпечення для задач оптимізації та контролю безпеки ТРЦ є актуальним для галузі бізнесу торгово-розважальних центрів.

## III. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ КОНТРОЛЮ БЕЗПЕКИ

Для задач внутрішнього контролю безпеки і оптимізації параметрів систем безпеки та для задач контролю з боку державних або приватних інспекцій потрібно програмне забезпечення з простим інтуїтивно-зрозумілим інтерфейсом користувача [3, 5]. У той же час числові оцінки ризику як критерію рівня безпеки потребують побудови складних моделей [3-7].

Створення програмного забезпечення для задач оптимізації та контролю рівня безпеки ТРЦ потребує вирішення таких взаємопов'язаних підзадач:

- 1) Побудова моделей оцінки надійності будівельних конструкцій.
- 2) Побудова моделей оцінки рівня пожежної безпеки.
- 3) Побудова моделей для оцінки ризиків внаслідок одночасного руху в обмеженому просторі великої кількості людей.
- 4) Визначення оптимальної частоти моніторингу потенційно небезпечного об'єкту.

Параметри надійності для числової оцінки ризику можливо розраховувати на основі існуючої галузевої статистики [3-7]. Але навіть в умовах відсутності або недостатньої статистики щодо відмов можливо оцінювати параметри надійності обладнання за умови спостереження за функціонуванням декількох (> 4) одиниць обладнання [8]. Якщо відсутні дані щодо відмов обладнання можливо використати експертні методи [6, 7, 9, 10] для проведення напівкількісних оцінок ризику. При цьому у користувача програмного забезпечення має бути вибір варіантів оцінки параметрів надійності.

Комбінування прямих методів оцінки наслідків процесів з концепцією типових ймовірнісних структурно-логічних моделей [3] дозволяє вирішити перші дві задачі. Для оцінки ризиків внаслідок одночасного руху в обмеженому просторі великої кількості людей можливо скористатися рекомендаціями [11], де також використовуються методи прямих оцінок наслідків з ймовірнісними методами.

Визначення оптимальної частоти моніторингу потенційно небезпечного об'єкта можливо проводити на основі принципу оптимальності Р. Беллмана у вигляді рекурентного співвідношення, яке слід розв'язувати числовими методами [3, 12].

При цьому у [3, 13] рекомендовано при моделюванні потенційних аварійних сценаріїв розглядати розвиток подій та переходи між можливими стадіями аварії як стадії єдиного процесу. Це передбачає обмін даними між програмним забезпеченням, що використовується для оцінок ризиків для різних подій та стадій аварій.

На практиці неможливо, надзвичайно складно чи недоцільно проводити моделювання для розв'язання наведених вище задач у рамках єдиного програмного модуля. Натомість доцільно та вигідно розбити на підзадачі, організувавши обмін даними. Також, для формування загальної картини можливо об'єднати обробку кінцевих результатів від багатьох модулів у зручному для користувача вигляді.

Зростаюча кількість мобільних пристроїв та розширення їх функціональності створює попит на програмне забезпечення сумісне з мобільними пристроями.

Наявна у світі тенденція до здешевшення послуг у сфері хмарних технологій, паралельно із розвитком технологій захисту інформації, зростанням потужності та кількості хмарних хостингів створює сприятливі умови для розвитку хмарних сервісів. Зокрема все більшого поширення набирає концепція Software-as-a-Service (SaaS) - програмне забезпечення як сервіс [14]. Такий підхід також дозволяє знизити навантаження на пристрій (персональний комп'ютер чи мобільний пристрій) користувача за рахунок перенесення найбільш

ресурсоемних розрахунків на потужний хмарний сервер чи групу хмарних серверів у рамках хмарного хостингу. Пристрій користувача у такому разі тільки передає вхідні дані та отримує результати розрахунку.

Тому доцільно побудувати систему програмних модулів для оптимізації та оцінки рівня безпеки (ризик) на основі концепції SaaS [14]. Взаємодію між різними програмними модулями пропонуємо організувати, скориставшись одним із варіантів: 1) REpresentational State Transfer (REST) [15], 2) Simple Object Access Protocol (SOAP) [16, 17]. Такий підхід є зручним як для створення додатків для мобільних пристроїв, так і веб-сервісів на основі веб-сайтів.

#### IV. ВИСНОВКИ

Сфера безпеки в усіх галузях виробництва у нашій державі потребує сучасної інформаційної та методичної підтримки. Нові сучасні інвестиційні проекти при їх впровадженні мають бути адаптовані для умов країни.

Можлива й необхідна розробка інформаційних технологій контролю та оптимізації рівня ризику з урахуванням параметрів надійності систем безпеки об'єктів, зокрема ТРЦ, виставкових центрів тощо.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] “ТРЦ "LAVINA" - Найбільший торгово-розважальний центр“, URL: <https://lavinamall.ua/>.
- [2] “ТРЦ«Голлівуд»“, URL: <https://gullivercenter.com/mfk>.
- [3] В.В. Бегун, “Методологічні основи інформаційної технології управління безпекою на основі ризик-орієнтованого підходу“: дис. на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук: 05.13.06 / Бегун Василь Васильович. – Київ, 2020. – 553 с.
- [4] В.В. Бегун, “Загальні питання стохастичного моделювання небезпек виробництв,“ Моделювання та інформаційні технології: зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г.С. Пухова НАН України. К., Вип. 45, 2008, С. 198–203.
- [5] F. Ishola, V. Oladokun, O. Petinrin, O. Olatunji and S. Akinlabi, “A mathematical model and application for fire risk management in commercial complexes in South Africa,“ Results in Engineering, vol. 7, 2020, doi:10.1016/rineng.2020.100145.
- [6] В.В. Бегун, С.В. Бегун, “Одиниці виміру ризику за теорією ризик-орієнтованого підходу,“ Математичні машини і системи, № 1. С. 191–202, 2019.
- [7] “Risk management - Risk assessment techniques,“ International Standard IEC 31010:2019, IEC, Geneva, 2019.
- [8] П.В. Стрельников, “Оценивание надежности оборудования управляющих систем и машин в условиях малой статистики или отсутствия отказов,“ УСМ, No 6, С. 49-52, 2013.
- [9] Г.М. Гнатієнко, В.Є. Снитюк, Експертні технології прийняття рішень: Монографія. К.: ТОВ “Маклаут”, 2008.
- [10] А.Ф. Волошин, В.И. Кудин, Последовательный анализ вариантов в задачах исследования и проектирования сложных систем: Монография. К: “Киевский университет”, 2015.
- [11] “Рекомендации по расчету параметров эвакуации людей на основании положений ГОСТ 12.1.004-91 «Пожарная безопасность. Общие требования,“ Минск, 1999.
- [12] И. Герцбах, Теория надежности с приложениями к профилактическому обслуживанию: монография. М.: Нефть и газ, 2003.
- [13] В.В. Бегун, С.В. Бегун, Ю.Н. Скалецкий, “«Избыточные» силы и средства при ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций: актуальная проблема,“ Моделювання та інформаційні технології: зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г.С. Пухова НАН України. К., Вип. 53, 2009, С. 37–48.
- [14] P. Melland, T. Grance, The NIST Definition of Cloud Computing, NIST Special Publication 800-145, National Institute of Standards and Technology, U.S. Department of Commerce, 2011.
- [15] R. T. Fielding, Architectural Styles and the Design of Network-based Software Architectures, PhD thesis, University of California, Irvine, USA, 2000.
- [16] SOAP Version 1.2 Part 1: Messaging Framework (Second Edition), W3C recommendation, 2007, URL: <https://www.w3.org/TR/soap12/>.
- [17] WSDL 1.1 Binding Extension for SOAP 1.2, W3C member submission, 2006, URL: <https://www.w3.org/Submission/wsd111soap12/>.

# До питання спільної обробки знімків земної поверхні, отриманих апаратурою дистанційного зондування Землі

Іван Варава

каф. АПЕПС, теплоенергетичний факультет  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»  
Київ, Україна  
ivan.varava@ukr.net

Микола Фесенко

відділ № 265 математичних проблем прикладної інформатики  
Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
oollyy55@ukr.net

Юлія Писаренко

лабораторія № 236 систем віртуального оточення для організації наукових досліджень  
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
pisarenkojv@gmail.com

Ольга Гульчак

відділ № 265 математичних проблем прикладної інформатики  
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
olga-gulchak@ukr.net

## To the issue of joint processing of Earth's surface images obtained by remote sensing of the Earth

Ivan Varava

cat. Automation of Design of Energy Processes and Systems  
Heat Power Engineer Faculty  
National Technical University of Ukraine  
“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”  
Kyiv, Ukraine  
ivan.varava@ukr.net

Mykola Fesenko

dept. №265 of Mathematical Problems of Applied Informatics  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
oollyy55@ukr.net

Julia Pisarenko

lab. №236 of Virtual Environment Systems for Organization of Scientific Research  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
pisarenkojv@gmail.com

Olga Gulchak

dept. №265 of Mathematical Problems of Applied Informatics  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
olga-gulchak@ukr.net

*Анотація*—Розглянуто певні аспекти отримання та обробки знімків земної поверхні з різних носіїв апаратури, в тому числі комплексної нейромережевої обробки різночасових знімків, отриманих апаратурою ДЗЗ, що розміщена на космічних апаратах і БПЛА.

*Abstract*— Certain aspects of obtaining and processing images of the Earth's surface from various equipment carriers are considered, including complex neural network processing of multi-temporal images obtained by DZZ equipment placed on spacecraft and UAVs.

**Ключові слова**—безпілотні літальні апарати (БПЛА); дистанційне зондування Землі; обробка зображень; знімки земної поверхні.

**Keywords**—*unmanned aerial vehicle (UAV); remote sensing of the Earth; image processing; pictures of the earth's surface.*

## I. ВСТУП

Завдання дистанційного зондування Землі з отриманням різночасових знімків земної поверхні включає основні два напрямки досліджень. Перший напрям: аналіз змін у часі зображень на знімках ДЗЗ для виявлення динаміки змін в окремих ділянках земної поверхні. Другий напрям - ситуації, коли потрібно за результатами різночасових знімків земної поверхні, отриманих апаратурою ДЗЗ, достовірно ідентифікувати вибрані об'єкти інфраструктури [1, 2].

## II. ОГЛЯД МОЖЛИВИХ ПРОБЛЕМ СПІЛЬНОЇ ОБРОБКИ ЗНІМКІВ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

1. Зображення, отримані з безпілотного літального апарату (БПЛА), у різні періоди часу мають розсміщення відносно один одного. Ця ж проблема виникає, коли потрібна обробка знімків з космічних апаратів, а саме автоматизований пошук змін на різночасових космічних знімках. Тоді стає потрібним на етапі попередньої обробки використовувати методи усунення розсміщення різночасових кадрів зображень ДЗЗ. Серед методів усунення такої перешкоди при обробці кадрів зображень ДЗЗ відомі методи, засновані на пошуку ключових точок та фазової кореляції [2].
2. Точне зіставлення пікселів двох зображень, відповідних одним і тим же точкам земної поверхні. При цьому виникають просторові розузгодження зображень. Спотворення виникають при склейці мікрокадрів та розбіжності осей приладів, кутів зйомки, що формують мультиспектральні зображення. Звичайною практикою оцінки якості сумішених зображень є візуальний аналіз. Він вочевидь суб'єктивний і погано підходить під час проведення масової обробки знімків.
3. Неприятливі погодні явища, такі, як дощ, туман, сніг, можуть призвести до неточного виконання завдань ідентифікації об'єктів, що використовують відеокадри зйомки.
4. В процесі отримання даних дистанційного зондування зустрічаються зображення, що зазнали спотворення перешкодами, які утворилися на етапі формування або передачі. Отже – є необхідність фільтрації шуму.
5. Коли порівнюються знімки з КА та БПЛА однієї місцевості, виникають нові проблеми зіставлення двох зображень з різною просторовою роздільністю. Складнощі викликає і суміщення зображень з різним просторовим розрізненням і в різних спектральних діапазонах. [3].

У таблиці 1 наведена порівняння переваг та недоліків КА та БПЛА для вирішення різних завдань у різних умовах.

Табл.1. Порівняння використання БПЛА та КА для різних завдань та умов.

Характеристика	БПЛА	(КА)
Час використання	Час використання у безпілотників	Супутники Землі

	може відрізнитися від багатьох факторів (модель, батарея, тип використання тощо), але ця цифра коливається від 20 до 40 хвилин. У БПЛА є можливість зміни батареї і можливість часу збільшується на десятки хвилин.	фотографують нашу Землю, і повна карта нашої Землі є в інтернеті. Можна в будь-який день, будь-якої доби знайти фотографії Землі та час сам не обмежений.
Якість зйомки.	Багато БПЛА мають вбудовану камеру, і в більшості випадків вона дуже зручна (якість відео - або фото - матеріалу, стабілізація тощо). Вона не здатна знімати на великій відстані, як КА. Є можливість знімати «під різним кутом» та використовувати для обробки стереопрограмми та розраховувати тривимірні координати об'єктів, тобто тут БПЛА перевершують КА.	КА мають малу кількість пікселів у камері, але збільшення лінзи дозволяє робити знімки, які знаходяться на дуже великій відстані від нас, однак сама якість таких знімків буде поганою. Перевага КА - здатні знімати на великій відстані земну поверхню.
Область застосування.	БПЛА можуть віддалятися більше 1000 метрів від пульта управління, але після сигнал буде губитися. Якщо потрібно зняти якийсь об'єкт на невеликому відстані, БПЛА буде оптимальним варіантом для цього. На висоті понад 300 метрів, він практично не помітний у небі, також його не чути.	КА охоплюють повністю нашу Землю і мають більшу сферу застосування.
Оперативність отримання знімків – функція «Знімки зараз»	Обробка знімків займає мінімальну кількість часу. Можливе термінове фото або відео, зйомка будь-яких об'єктів з усіх ракурсів.	КА лише фотографує Землю, відома ситуація, коли знімкам, які розміщуються на картах більше 3-5 років, і вони



		досі не оновлювалися.
Ціна зйомки	Звичайно, ціна отримання необхідних знімків з БПЛА буде набагато дешевшою за знімки з КА, якщо навіть придбати новий апарат. Є можливість оренди для конкретних робіт у організацій, що професійно займаються відеомоніторингом Землі.	Ціна отримання фотоматеріалів з КА набагато більша, адже всі супутники Землі належать різним державам або комерційним організаціям. Ціна зростає пропорційно до збільшення площі. Мінімальна площа замовлення становить 64 кв. км.
Вплив погодних умов	БПЛА можуть літати нижче хмар та повторювати відеомоніторинг улюбий вибраний та зручний час.	Хмарність є великою проблемою. Період повторного відвідування від 3 днів та більше.
Просторова роздільна здатність	Сучасні БПЛА оснащені камерами з високою роздільною здатністю. Деякі сучасні моделі камер БПЛА (з сенсором Sony 48 Мп та 8-кратним зумом) записують відео 8K з роздільною здатністю до 7680 x 4320 та фото до 8000 x 6000.	В даний час найкращим вважається просторова роздільна здатність 50 см.
Можливість отримання покриття одним знімком великих площ	Необхідність зшивання невеликих фрагментів у єдиний масив.	Покриття одним знімком великих площ без подальшої "зшивки" окремих фрагментів.

### III. ПРОВЕДЕНІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Авторами поставлене завдання розробки процедури комплексної нейромережевої обробки різночасових знімків земної поверхні, отриманих апаратурою ДЗЗ, розміщеної на космічних апаратах і БПЛА, під наступне завдання: потрібно проводити моніторинг місцевості з метою визначення довгострокових змін земної поверхні. Типове завдання - оцінка площ вирубки лісу з можливістю

оцінювання і самовільної вирубки. Це потрібно для розрахунку збитків, завданих самовільною вирубкою, розрахунку коштів, які мають бути надані на відновлення природних ресурсів.

При цьому необхідно проводити відеомоніторинг досліджуваної території періодично в довгостроковий період, фактично щоразу робити картування місцевості в автоматичному режимі.

Ідея полягає в тому, щоб отримувати різночасові знімки одних ділянок досліджуваних масивів лісу, що межують один з одним, з чіткою просторовою прив'язкою. При цьому зміни яскравості земної поверхні мусять відповідати реальним змінам земної поверхні.

Для цього краще використати знімки, що зроблені одним сенсором. Тоді буде використано одну й ту ж технологію зйомки, тому відмінності яскравості на знімках будуть гарантовано пов'язані зі змінами саме земної поверхні. Крім того, якщо треба порівняти стан місцевості за різні роки, бажано щоб знімки були зроблені приблизно в ті ж місяці та в той же час доби. Це гарантує виявлення багаторічних змін, а не сезонну динаміку цей місцевості.

Після підбору знімків для порівняння необхідно ще виконати їх радіометричне калібрування та атмосферну корекцію, оскільки важливо, щоб різниця в стані атмосфери не заважала виявляти реальні зміни на місцевості.

Обробка знімків полягатиме в наступних кроках:

1. Досліджуваний масив (ділянка, з якої вже раніше зроблені знімки) з координатами (двовимірними) кожного «кадру» вважається шаблоном.
2. Використовуються геометричні просторові прив'язки, ключові точки, щоб ідентифікувати межі кожного такого кадру. І при проході БПЛА наступного разу після закінчення певного часу отримується знімок тієї ж ділянки. Проміжок часу між послідовними дослідженнями території визначається на підставі особливостей та цілей завдання.
3. Операція суміщення меж цих різночасових зображень (визначення "спільного" для двох знімків кадру).
4. Математична обробка щодо виявлення кореляції цих двох зображень - можлива після наступних підготовчих робіт:
  - Усунення похибок внаслідок розбіжності масштабу;
  - Усунення похибок внаслідок відмінності у просторовій роздільності знімків однієї і тієї ж ділянки поверхні;
  - Усунення впливу відмінності у кутах нахилу камер зйомки. Спотворення виникають при склейці мікрокадрів та розбіжності осей приладів, кутів зйомки, що формують мультиспектральні зображення.
  - Усунення впливу атмосферних змін.
  - Створення панхроматичного зображення (чорно-білого) конкретної ділянки під час застосування мультиспектральної зйомки, якщо прийняте рішення використовувати методики кореляційного аналізу панхроматичних зображень. В іншому випадку може застосовуватися методи застосування кореляційної обробки мультиспектральних знімків.

- За потреби – ортотрансформування знімків.

Зауваження: не всі наведені підготовчі роботи можуть знадобитися, все залежить від конкретних вимог, які пред'являються до моніторингу масивів поверхні землі.

Нижче на рис.1-3 проілюстровано одну з операцій попередньої обробки знімків земної поверхні - суміщення зображень - з метою наступного шагу методики: порівняння різночасових знімків. Різночасові супутникові знімки однієї з ділянок місцевості були оброблені використанням OpenCV, бібліотеки комп'ютерного зору з відкритим кодом, яка доступна для вільного використання у наукових, академічних та комерційних цілях.

На рис.1,2 – супутникові знімки однієї ділянки території, зроблені з інтервалом у декілька днів. Фото з БПЛА, накладене на супутникове фото місцевості, як приклад роботи програми суміщення двох фото з використанням OpenCV



Рис. 1

Рис. 2



Рис. 3 – фото з БПЛА, накладене на супутникове фото місцевості.

Після суміщення знімків стає можливим відокремити 2 різночасових кадра зображень для обробки їх методами кореляційного аналізу з використанням програм комп'ютерної обробки, та таким чином виявити зміни в стані місцевості

#### IV. ВИСНОВКИ

Для завдання проведення моніторингу місцевості з метою визначення довгострокових змін земної поверхні потрібна розробка процедури комплексної нейромережевої обробки різночасових знімків земної поверхні, отриманих апаратурою ДЗЗ, розміщеної на космічних апаратах і БПЛА. У доповіді проаналізовано певні моменти та проблеми у практиці розробки. Виявлено, що для вирішення завдання потрібно врахувати комплекс аспектів: вибір носія апаратури та режими зйомки, провести радіометричне калібрування та атмосферну корекцію отриманих зображень, в ході попередньої обробки провести усунення похибок. У доповіді проілюстровано одну з операцій попередньої обробки знімків земної поверхні - суміщення зображень - з метою наступного шагу методики: порівняння різночасових знімків для визначення їх кореляції.

#### V. ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] До питання методів дистанційного зондування землі для завдань прецизійного землекористування та оцінки наслідків техно-екологічних подій. Писаренко В.Г., Писаренко Ю.В., Дудкін О.О., Інютін О.В., Бойко О.Г., Коваль О.С. XXI Міжнародна науково-технічна конференція «Штучний інтелект та інтелектуальні системи (AIPS'21)», Київ, 26-27.11.2021 року
- [2] Алтухов А.І., Білан В.І., Григор'єв А.М., Попович В.В. Методика та приватні результати дослідження якості пошуку ключових точок за матеріалами оптико-електронної аерозйомки // Науково-технічний вісник інформаційних технологій, механіки та оптики. 2020. Т. 20. № 5. С. 649-660. doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-5-649-660
- [3] Проблеми суміщення зображень з піксельною точністю А. І. Алексанін, М. А. Морозов, С. В. Фомін. Сучасні проблеми дистанційного зондування Землі із космосу. 2019. Т. 16. №1. С. 9–16

# METHOD OF SEGMENTATION OF AIR OBJECTS IN VIDEO

Valentyn Yesilevskyi  
the Department of Applied  
Mathematics  
Kharkiv National University of  
Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
valentyn.yesilevskyi@nure.ua

Anton Koliadin  
the Department of Applied  
Mathematics  
Kharkiv National University of  
Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
anton.koliadin@nure.ua

Olena Sereda  
the Department of Applied  
Mathematics  
Kharkiv National University of  
Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
olena.sereda@nure.ua

**Abstract**— *This paper consider the method for automatic image segmentation and background subtraction of images on video for an optical air situation monitoring system based on a modified interactive segmentation method.*

**Keywords**— *image segmentation; background subtraction; recognition of air objects; optical monitoring*

## I. INTRODUCTION

The identification of air objects (AO) is of great importance in a combat situation during military operations and in peacetime for monitoring the air situation at airports and protected facilities. Recently, optical video surveillance systems have been increasingly used to monitor the air situation. This makes it possible to increase the mobility of detection systems and overcome some of the problems of radar control. In addition, at present, the list of types of detectable ARs has expanded significantly. This fundamentally changed the range of detectable AO parameters, from shape and size to dynamic motion characteristics. For optical video surveillance, digital video image processing and automatic image recognition must solve the task of identification the type of a detected object.

Video image processing includes a pipeline of tasks, among which detection of a moving flying object, determination of AO type, determination of object characteristics. In the proposed approach, we are in the framework of the task of determining the type of AO, pre-detected by the signs of motion and localized on the digital image. In accordance with the above terminology, the task of determining the type of AO refers to image classification problems.

Their solution is usually based on the use of deep convolutional neural networks. Such a solution for the problem we study is somewhat redundant due to its universality. In human visual AO-type recognition, the geometric shape of the object, represented by the outer contour, is usually a minimally sufficient feature for recognition even under the condition of geometric distortion (displacement, orientation, scale). In the field of AO-type automatic recognition object contours provide enough information to solve the problem even without taking into account the color and texture

This problem was solved by the authors in previous studies [1], where it was assumed that the image of the object is in some idealized form: not hidden by clouds and well distinguishable on the background. However, in such conditions and under different illumination conditions, the problem of separating the background of the image from the object under study arises. In the field of image analysis, this is called the background subtraction problem, which is part of the broader problem of semantic segmentation.

This paper discusses the problem of processing video frames from an air monitoring camera mounted on a turntable to construct a binary image with the object under study highlighted.

The problem of applying different algorithms of segmentation and background subtraction is relevant for real applications, which is confirmed by the works [2, 3], which are devoted to the issues of segmentation and background subtraction for video images, including the tasks of AO tracking.

## II. PROBLEM STATEMENT

The problem of optical AO recognition and tracking is the subject of many years of research due to the interest in its solution for both civil and military applications [4].

Outstanding results in computer vision related to deep neural networks and increasing computer performance have made the task of computer visual tracking one of the most prominent research topics. A study [5] provides a detailed review of advances in the use of deep convolutional neural networks for arbitrary image recognition.

However, as shown in [6], deep learning methods require a large number of training sets and significant computer time to train the network. The study [7] shows that the use of transfer learning, based on inexpensive additional training of pre-trained network, allows solving part of the problems of deep neural networks. However, at the same time there remains the problem of redundancy of the universal deep neural network-based approach in the recognition of airborne object types.

The description of an object image by its contour is enough for the task of air object type recognition. In this case, much

less redundant information is used than in the analysis using deep neural networks, which gives a number of advantages.

To solve the problem of recognition of types of airborne objects in the general task of air monitoring, we use a camera attached to a turntable. Therefore, the algorithm for the foreground object extraction must take into account the changing illumination of the object and the background. This means that the algorithm must be time-critical in terms of execution time. In [8] the use of these methods to recognize types of air objects is investigated in detail.

In our study, we consider one of the tasks of image preparation for recognition - the task of image segmentation and background subtraction. This problem is solved after moving objects are detected and localized in a sequence of video frames by optical flow methods, based on the study of frame difference [9].

Optical flow is one of the most widely used tracking algorithms for computer vision. Solutions are known for background subtraction algorithms in the case of shooting a fixed scene with a static camera [10]. However, in the conditions of our problem, the background is constantly changing, which interferes with the detection of moving targets [11]. Estimates and comparisons for background subtraction methods are studied in detail in [12], among which weighted moving mean, Gaussian mixture model (GMM), adaptive background learning, etc. .

### III. STUDYING OF SEGMENTATION AND BACKGROUND SUBTRACTION METHODS

The system of visual monitoring of the air situation is an intelligent hardware-software complex, which includes a camera fixed on a rotating stand, and a computer control and information processing unit. The software for information processing consists of various interconnected functional modules of video image processing. Among these modules we can distinguish a pipeline of software modules, which solve the problem of determining the type of AO as an image classification problem, as defined in the introduction. The solution of this problem is based on the input information received from the moving air object detection and localization module by optical flow methods, as already described above.

In an ideal situation, image preprocessing with localized AO should be reduced to image binarization followed by contour calculation, as presented in fig. 1.

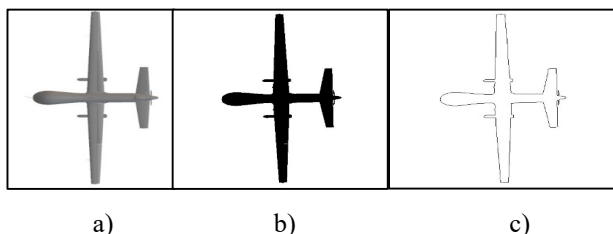


Fig. 1. Stages of image preprocessing: a - initial image of localized object; b - black and white image; c - contour image of object

To obtain the numerical characteristics of a contour, the localized image (fig. 1, a) must first be reduced to the black-and-white form (fig. 1, b). Then it is necessary to select a set of points of a contour (fig. 1, c) and represent it as a sequence of their coordinates. As a result of such processing the image of an air object will look like an ordered sequence of points  $z(k) = (x_k, y_k) = f(tk)$ ,  $k=0, \dots, N-1$ , which is a discretized

representation of a continuous two-dimensional curve  $f(t) \subset R^2$ , describing the contour. The further procedure of air type recognition is described in detail in our paper [1] and is reduced to obtaining a vector of features based on Fourier descriptors for the curve  $f(t)$ . The feature vector is the input for a pre-trained classifier based on a traditional multilayer neural network.

Generally speaking, a block diagram (fig. 2) can represent the algorithm of the air object type recognition procedure.

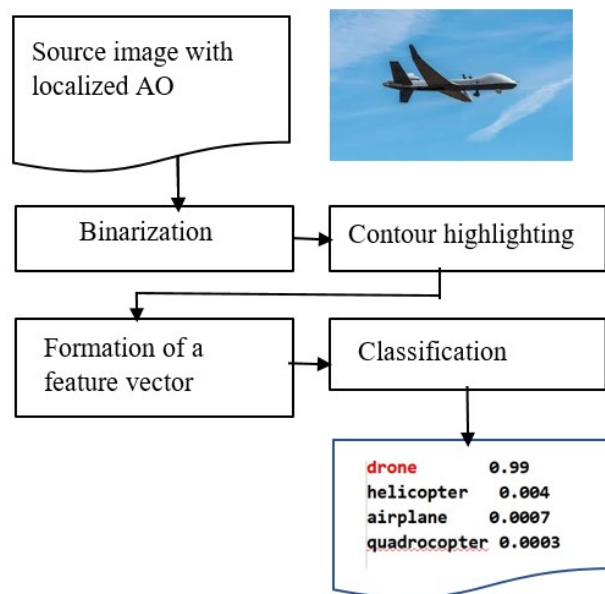


Fig. 2. Generalized block diagram of the air object type recognition procedure algorithm

#### A. Verbal statement of the problem

When implementing this algorithm, a number of problems arise. The AO image can be obtained with varying degrees of distortion, which is associated with the size of the image, its blurring due to the aberration of light. In addition, the image of the object may be partially hidden by clouds or poorly distinguishable against their background (fig. 3). The task is to automatically, without human involvement, by means of the software highlight a clear outline in conditions of visual disturbances (illumination, cloud cover).



Fig. 3. Image of the MQ-9 Predator UAV in the ideal view for recognition and in conditions of visual interference

#### B. Image segmentation methods

Segmentation of objects and background subtraction under conditions of changing background and illumination, occlusion, shape distortion, motion blur, zooming, etc. are important areas of research in computer vision.

Semantic segmentation is a well-known task of computer vision, one of the three most important, along with object

classification and detection. Segmentation is a task of classification in the sense of the distribution of each pixel into classes.

Performing semantic segmentation typically uses a deep neural network trained to recognize certain classes of objects, among which aerial objects are not recognized well enough.

Fig. 4 shows a view of the image after removing the background as a result of semantic segmentation.



Fig. 4. View of the image after removing the background as a result of semantic segmentation with the help of deep neural networks.

This involves solving the problem of transfer retraining of the network and creating a large training dataset. The aim of this article is to develop a video image processing module, which allows to select air objects for their further classification based on contours and to increase the efficiency of air object type recognition in a visual air monitoring system. To solve this problem, a modified interactive algorithm in the mode of automatic object silhouette extraction is used.

#### IV. PROBLEM SOLVING METHOD

When preparing an image for outline extraction, the main focus is on the brightness characteristics of the pixels in all three color channels of the color image. The optimal way to simplify this problem is to reduce the color three-channel RGB image to a grayscale view (fig. 5). Such a brightness scale conveys 256 gradations from 0 - black, to 255 - white.



Fig. 5. The result of converting the image to grayscale mode

In an air monitoring system, the camera's shutter and iris control system may not have time to respond to too rapid changes in light intensity when the camera is rotating on a turntable. Sometimes the contrast range is too large for the sensors. In addition, it usually requires different exposure times for dark and light areas for a "perfect" image.

In the project that we are implementing, it is possible to expand the dynamic range of the image and improve the contrast of the image by applying the algorithm of histogram correction. For this purpose a graphical distribution of image intensity in the form of a histogram is created, which

determines the number of pixels for each considered value of intensity in the grayscale range from 0 to 255.

#### A. Method normalizes brightness

With the correction, the original distribution becomes a broader and more homogeneous distribution of intensity values, so that they are distributed more evenly over the entire range. The algorithm normalizes brightness and increases image contrast (fig. 6).



Fig. 6. The result of the alignment of the gray-scale image histogram

#### B. The binarisation transformation

For contour detection, a good result can be obtained after conversion to a binary (black and white) image, as shown above (fig. 1, b). In this case, the boundary point is unambiguously found by the change in the pixel color.

The binarisation transformation can be determined by assigning a threshold value. The original image converted to a grayscale view with a pixel brightness range of 0 to 255 must be reduced to a binary view (0 or 1). If the pixel value is less than the threshold value, it is set to 0, otherwise to 1.

Different variations of the threshold binarization algorithm (with lower and upper threshold, with double restriction, incomplete thresholding, etc.) presented in fig. 7 can be used.

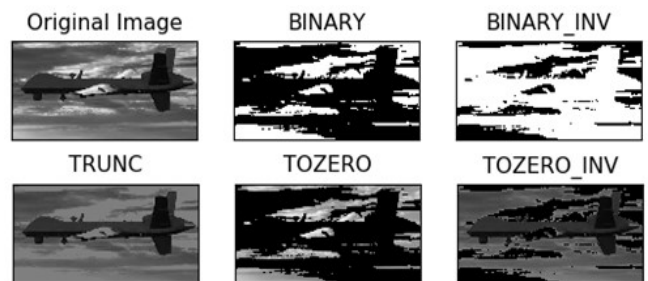


Fig. 7. Results of applying different types of threshold conversion

Naturally, the result of the threshold conversion depends on the value of the threshold. Fig. 8 shows binarization results for different threshold values.

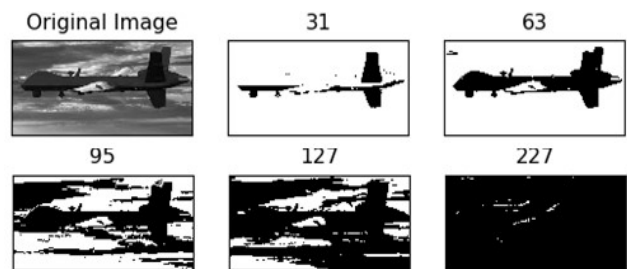


Fig. 8. Binarization results for different threshold values

Using a fixed threshold may not be justified for different lighting conditions in different areas. In this case, adaptive

threshold setting is used. The algorithm determines the threshold for a pixel based on a small area around it. In this way, we obtain different thresholds for different areas of the same image, which gives better results for images with different illumination for different averaging modes (fig. 9).

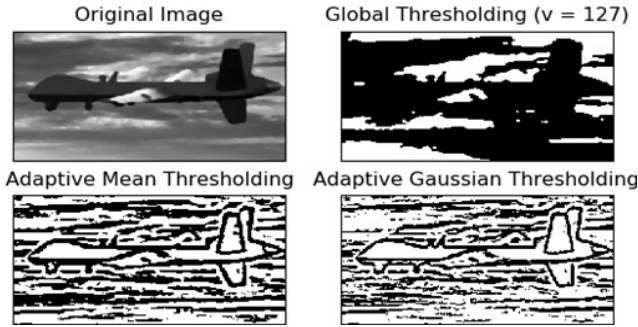


Fig. 9. Adaptive binarization results for different averaging modes

As a binarization method, the adaptive Otsu method oriented to a bimodal image, in which the histogram has two distinctly expressed peaks, has proven itself well. In such images, the optimal threshold is in the middle of these two values. Otsu method determines a global threshold value from image histogram.

Fig. 10 shows examples of the algorithm in the case of a bimodal image.

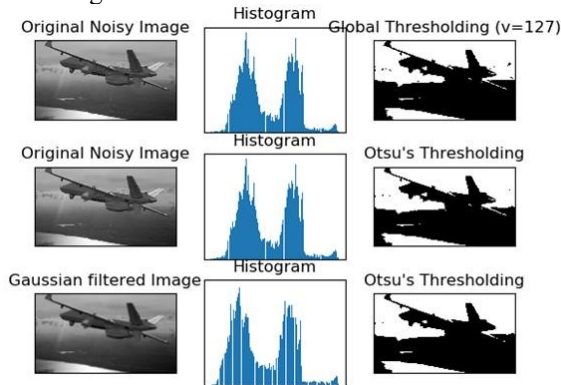


Fig. 10. Otsu binarization results for bimodal image

The disadvantage of finding objects using threshold filtering is the need to individually select the threshold value for each image, and even in this case, the separation from the background is not always possible, as seen in fig. 12.

It is possible to propose a method that goes through all possible thresholds and builds a recognition procedure for each of them. This would be possible when searching for any one particular contour, which is not suitable, for air objects having different contour shapes depending on the position with three degrees of freedom in relation to the camera.

### C. Background subtraction using the GrabCut algorithm

The GrabCut algorithm [13] was at Microsoft Research Cambridge, UK for foreground extraction with minimal user interaction.

The algorithm is interactive and from the user's point of view the algorithm works as follows. First, the user must mark the foreground and background areas (draws a line or a rectangle around the corresponding sector of the area). The algorithm then iteratively segments it to get the best result

The basis of the algorithm is the Gaussian mixture model (GMM), which is used to model the foreground and background.

Depending on the data that represents the background and foreground regions, the GMM learns and creates a new distribution of pixels. That is, unknown pixels are labeled as either probable foreground or probable background depending on their relationship with other hard-marked pixels from the point of view of color statistics.

A graph is constructed for this distribution of pixels. Nodes on graphs are pixels. Two additional nodes are added, the Source node and the Sink node. Each foreground pixel is connected to a Source node, and each background pixel is connected to a Sink node.

The weights of the edges connecting the pixels to the source node / end node are determined by the probability that the pixel is in the foreground / background. Weights between pixels are determined by edge information or pixel similarity. If there is a large difference in pixel color, the boundaries between them will have little weight.

Then, the mincut algorithm is used to segment the graph. It cuts the graph in two, dividing the source node and the sink node with the minimum cost function. The cost function is the sum of all the weights that cut the edges. After clipping, all pixels connected to the Source node become the foreground, and pixels connected to the Sink node become the background.

The process continues until the classification converges.

This is illustrated in the image below fig. 11 from the original article

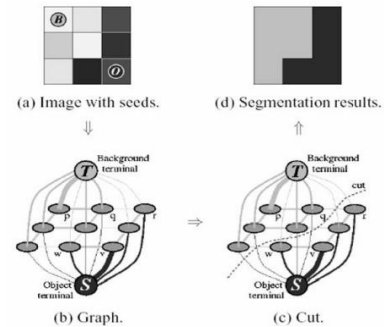


Fig. 11. Illustration of the operation of the GrabCut algorithm

## V. RESEARCH RESULTS AND THEIR DISCUSSION

The recognition of air object types is based on the procedure of object contour extraction on the binary image obtained as a result of the initial image preprocessing. In this case, the GrabCut algorithm is used. In this algorithm, user labeled foreground and background areas were used to build distribution histograms for these two classes of areas. The algorithm itself assumes that the remaining unlabeled pixels have a distribution similar to one of the two distributions. The energy functional was constructed based on the assumption that the pixels in each of the regions are connected. The assignment of a pixel to one of the regions was performed as a result of minimization of the energy functional.

The interactivity of the algorithm can be excluded if we make the following assumptions:

1) everything within a given indent from the edge of the image is the background;

2) everything within a given area in the center of the image is the foreground.

Fulfillment of these conditions is possible because the system architecture is designed in such a way that the preliminary stage of video processing the system of moving object detection by optical flow method selects pixels that determine the area of interest.

A computational experiment was conducted on a test set of 40 images, which showed the correct result in 37 cases (93%), which confirms the possibility of using the proposed method. The results of the algorithm are shown in fig. 12.

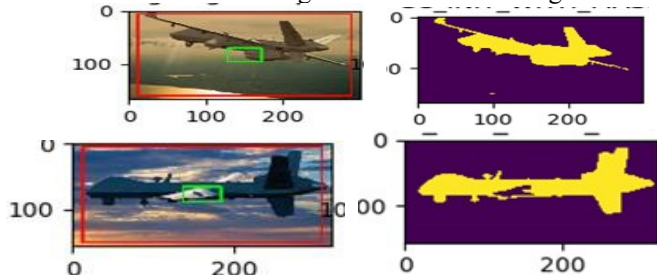


Fig. 12. Results of the background subtraction algorithm

## CONCLUSIONS

Implementation of the developed background segmentation and subtraction module for the system of optical monitoring of the air situation allowed to solve the problem of video images segmentation with high reliability for further recognition of air objects in the system of optical monitoring of the air situation in automatic mode, thus increasing the operational efficiency of this system.

## REFERENCES

- [1] Yesilevskiy, V., Tevyashev, A., Koliadin, A. (2020), "A method of air object recognition based on the normalized contour descriptors and a complex-valued neural network", *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, No. 6, P. 48–57. DOI: 10.15587/1729-4061.2020.22003.
- [2] Garcia-Garcia, B., Bouwmans, T., Rosales Silva, A. J. (2020), "Background subtraction in real applications: Challenges, current models and future directions", *Computer Science Review*, Vol. 35, P. 1–42. DOI: 10.1016/j.cosrev.2019.100204.
- [3] Molloy, Timothy L., Jason, J. Ford and Luis Mejías Alvarez (2017), "Detection of aircraft below the horizon for vision-based detect and avoid in unmanned aircraft systems", *Journal of Field Robotics*, Vol. 34. DOI: 10.1002/rob.21719.
- [4] Huihui, Li, Xing, Jin, Ning Yang, Zhe Yang (2015), "The recognition of landed aircrafts based on PCNN model and affine moment invariants", *Pattern Recognition Letters*, Vol. 51. DOI: 10.1016/j.patrec.2014.07.021.
- [5] Neha, Sh., Vibhor, J., Anju, M. (2018), "An Analysis Of Convolutional Neural Networks For Image Classification", *Procedia Computer Science*, No. 132, P. 377–384. DOI: 10.1016/j.procs.2018.05.198.
- [6] Krizhevsky, A., Sutskever, I., Hinton, G.E. (2017), "ImageNet classification with deep convolutional neural networks". *Commun. ACM* 2017, No. 60, P. 84–90. DOI: 10.1145/3065386.
- [7] Yesilevskiy, V., Tevyashev, A., Koliadin, A. (2019), "Transfer learning in aircraft classification", *Information systems and technologies IST-2019, The 8-th International Scientific and Technical Conference September 9-14, Kobleve-Kharkiv, Ukraine*, P. 132–135.
- [8] Strotov, V., Babyan, P., Smimov, S. (2017), "Aerial object recognition algorithm based on contour descriptor". *ISPRS – International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, XLII-2/W4, P. 91–95. DOI: 10.5194/isprs-archives-XLII-2-W4-91-2017.

- [9] Jie, Z. (2020), "An Aircraft Image Detection and Tracking Method Based on Improved Optical Flow Method", *2020 Chinese Automation Congress (CAC)*, P. 2512–2516. DOI: 10.1109/CAC51589.2020.9326473.
- [10] Bengtsson, T., Mckelvey, T., Lindström, K. (2016), "COOn Robust Optical Flow Estimation on Image Sequences with Differently Exposed Frames using Primal-Dual Optimization", *Image and Vision Computing*, No. 57. DOI: 10.1016/j.imavis.2016.11.003.
- [11] Rashid, M., Thomas, V. (2016), "A Background Foreground Competitive Model for Background Subtraction in Dynamic Background". *Procedia Technol.*, No. 25, P. 536–543. DOI: 10.1016/j.protcy.2016.08.142.
- [12] Sobral, A., Vacavant, A. (2014), "A comprehensive review of background subtraction algorithms evaluated with synthetic and real videos", *Comput. Vis. Image Underst.*, No. 122, P. 4–21. DOI: 10.1016/j.cviu.2013.12.005.
- [13] Rother, C., Kolmogorov, V., Blake, A. (2004), "GrabCut": interactive foreground extraction using iterated graph cuts". *ACM SIGGRAPH 2004 Papers*, P. 309–314. DOI: 10.1145/1186562.1015720.

# Особливості інформаційної підготовки у сучасній системі освіти

Світлана Козиренко  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Харків, Україна  
svitlana.kozyrenko@nure.ua

## Peculiarities of information training in modern education system

Svitlana Kozyrenko  
Dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
svitlana.kozyrenko@nure.ua

**Анотація**— Однією з основних функцій освіти є підготовка фахівців, які мають навички інформаційної та дослідницької діяльності, що дозволяють орієнтуватися у новому інформаційному просторі.

У статті зазначено основні актуальні напрями інформаційної підготовки у сучасній системі освіти.

Інформаційна підготовка нетехнічних спеціальностей може містити початкову підготовку з алгоритмізації та програмування, а також підготовку з програмування No-code з урахуванням спеціальності. No-code програмування — це підхід, який дозволяє користувачам створювати програми за допомогою візуального моделювання та налаштування готових процесів чи шаблонів. No-code дозволяє кожному користувачеві створювати програми без професійних навичок програмування.

**Abstract**— One of the main functions of education is training specialists having sufficient information and research skills to be able to navigate in the new information space.

The article highlights major current areas of information technology training in the modern education system.

Information technology training for non-technical specialties may include initial training in algorithmization and programming, as well as training in specialty-specific No-code programming. No-code programming is an approach that allows users to create applications through visual modeling and customization of pre-made processes or templates. No-code enables every user to create applications without professional programming skills.

**Ключові слова**— Інформаційна підготовка, програмування No-code.

**Keywords**— *Information technology training, No-code programming.*

### I. ВСТУП

Суттєві зміни у соціальній реальності, обумовлені впровадженням нових інформаційних технологій у суспільне життя, є вирішальними під час аналізу соціального та духовного стану суспільства. Однією з основних функцій освіти є підготовка фахівців, які мають навички інформаційної та дослідницької діяльності, що дозволяють орієнтуватися у новому інформаційному просторі [1].

Інформаційна підготовка в сучасній системі освіти значно підвищує актуальність предметних результатів і повинна забезпечувати:

- сформованість уявлень про комп'ютерно-математичні моделі та необхідність аналізу відповідності моделі та модельованого об'єкта (процесу), про способи зберігання та найпростішу обробку даних;
- володіння прийомами написання алгоритмічної мовою програм для вирішення стандартних задач з використанням основних конструкцій програмування та налагодження таких програм, використання готових прикладних комп'ютерних програм за обраною спеціальністю;
- володіння комп'ютерними засобами подання та аналізу даних, уміння працювати з бібліотеками програм;
- розуміння основ правових аспектів використання комп'ютерних технологій та роботи в Інтернеті.



- володіння поняттям складності алгоритмів, знання основних алгоритмів обробки інформації;
- володіння універсальною мовою програмування, уявленнями про базові типи даних та структури даних, вміння використовувати основні керуючі конструкції;
- навички та досвід розробки програм у вибраному середовищі програмування, включаючи тестування та налагодження програм, володіння елементарними навичками формалізації прикладного завдання та документування програм.

## II. ОСОБЛИВОСТІ ІНФОРМАЦІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ

Інформаційна підготовка може містити початкову підготовку з алгоритмізації та програмування, а також підготовку з програмування No-code з урахуванням спеціальності.

Як один з найбільш перспективних систем програмування слід відзначити Python. Низький вхідний поріг для студентів, можливості бібліотек та наявність зовнішніх платформ у середовищі Google. Йдеться про середовище Google Colaboratory. Colaboratory – безкоштовне середовище, функціонуючи за принципом хмари, надає доступ до графічних процесорів GPU та TPU. Це ще один хмарний сервіс від Google Research, IDE, що дозволяє будь-якому користувачеві писати вихідний код у редакторі та запускати його з браузера. Зокрема, він підтримує мову програмування Python та орієнтований на завдання машинного навчання, аналіз даних, освітні проекти та інше.

Наступним етапом інформаційної підготовки може стати No-code програмування.

No-code програмування — це підхід, який дозволяє користувачам створювати програми за допомогою візуального моделювання та налаштування готових процесів чи шаблонів. Використання No-code прискорює розробку додатків та задовольняє потребу в автоматизації робочих процесів та створення спеціалізованого програмного забезпечення швидше, ніж при звичайному написанні коду. No-code дозволяє кожному користувачеві створювати програми без професійних навичок програмування.

No-code – це візуальний посередник між платформою для програмування та кінцевими користувачами, за допомогою якого вони можуть створювати та налаштовувати зовнішній вигляд програмного забезпечення без безпосереднього програмування.

За оцінками Forrester, платформи No-code прискорюють розробку програмного забезпечення у 5-10 разів у порівнянні з традиційними методами.

Платформи No-code з'явилися як незалежні інструменти, дозволяючи створювати прості програми тим фахівцям, які не мають професійної програмістської підготовки.

No-code не обов'язково означає, що при роботі з ним не потрібно буде писати фрагменти програм. Те, що називають

No-code - це підхід до програмування, при застосуванні якого не потрібно написання самих текстів програм. Натомість розробнику пропонується користуватися інструментами з графічним інтерфейсом.

Сучасні No-code платформи мають можливість обробки досить великої кількості інформаційних рішень - сайтів, електронних таблиць, баз даних.

Для навчальних закладів, використовуючи поширену підготовку з Excel і Sheet, найбільш сприятливою стає рішення AppSheet, що реалізує технологію No-code для таблиць. Як вихідні дані використовуються електронні таблиці з подальшою фільтрацією даних, використанням розширеної логіки, створенням динамічного інтерфейсу, налаштуванням автоматизованих робочих процесів. Використовуючи різні облікові записи, можна створювати командні проекти у межах навчальних груп.

Програма AppSheet підтримує як настільні комп'ютери, так і мобільні пристрої, може використовуватися для бізнес-аналізу, маркетингу, соціологічних досліджень, управління проектами. AppSheet - онлайн-конструктор для створення мобільних додатків на Android та iOS.

Сервіс працює наступним чином: користувач підключає електронні таблиці або бази даних, за допомогою конструктора створює дизайн та функціональність майбутньої програми, запускає та розповсюджує його. У програмі можна створювати дизайн, вставляти зображення та інші медіафайли. AppSheet дозволяє розміщувати у додатку GPS-карти, графіки та діаграми, інші елементи.

Всередині AppSheet можна переглядати статистику та відстежувати дії користувачів з їхніми даними. Ця можливість є особливо актуальною для навчального процесу.

Використання AppSheet набагато простіше і легше, ніж використання традиційного програмування з використанням кодів. Програма без коду дає можливість швидкого підключення та оперативної роботи. При цьому, зміни до програми можна вносити через будь-який браузер.

## III. ВИСНОВКИ

Суттєві зміни у вимогах до підготовки сучасних фахівців потребують від освіти відповідних рішень, спрямованих на корегування освітніх програм та змісту інформаційної підготовки. У статті наведені основні актуальні напрями та окремі рішення інформаційної підготовки.

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Козыренко, В. П., Козыренко, С. И. (2022). Актуальные вопросы развития информационной среды учебного заведения в условиях удаленного обучения. Вчені записки Харківського гуманітарного університету «Народна українська академія», т. 28, с. 68–73.

# Досвід використання інформаційних технологій з метою підвищення якості освіти при вивчанні математичних дисциплін

Олександра Литвин  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Харків, Україна  
oleksandra.litvin@nure.ua

Наталія Манчинська  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Харків, Україна  
natali.manchinska@nure.ua

## The experience of using information technologies to improve the quality of education in the study of mathematical disciplines

Oleksandra Lytvyn  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
oleksandra.litvin@nure.ua

Nataliia Manchynska  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
natali.manchinska@nure.ua

**Анотація**—Розглядаються різні елементи інноваційних інформаційних технологій, які використовуються при вивчанні математичних дисциплін. Робиться наголос на якісне навчально-методичне забезпечення, використання систем комп'ютерної математики, використання можливостей платформи Moodle при навчанні, особливо дистанційному. Зокрема, використання платформи Moodle як інформаційної, а також для проведення опитувань, тестувань тощо. Наведено ілюстрацію вказаних елементів.

**Abstract**—Various elements of innovative information technologies used in the study of mathematical disciplines are considered. Emphasis is placed on high-quality educational and methodological support, the use of computer mathematics systems, and the use of the Moodle platform for learning, especially distance learning. In particular, the use of the Moodle platform as an information platform, as well as for surveys, tests, etc. An illustration of the specified elements is given.

**Ключові слова**—математична дисципліна, дистанційне навчання, система комп'ютерної математики, платформа Moodle, опитування, тестування.

**Keywords**—mathematical discipline, distance learning, computer mathematics system, Moodle platform, survey, testing.

### I. ВСТУП

Робота присвячена викладанню досвіду авторів використання інформаційних технологій при вивчанні фундаментальних математичних дисциплін. Тема актуальна. Для успішного вивчення математичних дисциплін важливим є наявність якісного навчально-методичного забезпечення з включенням інформаційних комп'ютерних технологій на базі систем комп'ютерної математики. Застосування систем комп'ютерної математики є інноваційна педагогічна технологія, яка забезпечує розвиток творчої активності студентів і сприяє впровадженню методичних інновацій в навчальний процес. Оволодіння вміннями та навичками здійснення обчислень у певній систем комп'ютерної математики та використання цих засобів для розв'язування навчальних та прикладних задач є необхідною умовою формування математичних компетентностей студентів.

Враховуючи теперішній час (пандемія, війна) важливими є технології, пов'язані з дистанційним навчанням. Авторами наводяться різні аспекти використання інтернет-технологій, пов'язаних з дистанційним навчанням на базі системи Moodle у різних математичних курсах.

## II. ЯКІСНЕ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ. ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Для забезпечення якісної освіти перш за все треба мати якісне навчально-методичне забезпечення, що виражається в наявності навчальних посібників високого рівня. Такі посібники складені та видані колективом викладачів, серед яких є автори цієї роботи. Особиста участь авторів у розробці навчальних посібників полягає у ідеї проекту, участі у написанні та у реальному практичному втіленні у навчальний процес.

Навчальні посібники неодноразово перевидувались. У цих навчальних посібниках традиційний підхід до вивчення фундаментальних математичних дисциплін поєднується з систематичним використанням інформаційних комп'ютерних технологій на базі систем комп'ютерної математики. Посібники мають багатоцільове призначення, бо можуть бути використані як підручники, задачники, розв'язувальники та довідники [1–3], а також як посібники з використання інформаційних комп'ютерних технологій на базі системи комп'ютерної математики Mathcad [4–6]. Впроваджено у навчальний процес концепцію неперервної комп'ютерної підготовки студентів при вивченні фундаментальних математичних дисциплін на основі використання систем комп'ютерної математики (СКМ), починаючи з першого семестру. Наведені навчальні посібники забезпечують впровадження СКМ у процес навчання математики. Це надає можливість активізувати навчально-пізнавальну діяльність студентів, сприяє розвитку їх творчих здібностей та навичок здійснення дослідницької діяльності з використанням сучасних засобів інформаційних комп'ютерних технологій. Це сприяє підвищенню якості та ефективності навчального процесу, пробудженню інтересу та зацікавленості студентів до вивчення математичних дисциплін.

Студенти починаючи з першого семестру виконують індивідуальні завдання з використанням системи комп'ютерної математики Mathcad. Це є комп'ютерною підтримкою при виконанні цих завдань. Використовують Mathcad і у курсовому проектуванні [7]. Завдяки новому підходу, курсова робота виглядає зовсім по іншому, сучасно. Студенти працюють творчо, вносять свої елементи досліджень. В результаті на базі курсової роботи виникають особисті наукові розробки, які доповідались неодноразово на студентському форумі. Отже, методичні розробки для виконання курсової роботи носять новаторський характер і відповідають сучасним вимогам та тенденціям у освіті.

Вибір системи Mathcad обумовлений тим, що це потужна та гнучка система. Система записів в ній максимально наближена до тієї, що використовується для запису математичних викладок на папері, в тому числі і при введенні інформації. Документ на екрані виглядає як звичний математичний розрахунок. Не вимагає попереднього вивчення спеціальної мови.

Отже, застосування Mathcad при вивченні математичних дисциплін є комп'ютерною підтримкою при виконанні домашніх практичних завдань, індивідуальних розрахункових завдань, курсових та дипломних робіт.

Студент має змогу перевірити правильність розв'язків, правильність процесу розв'язання, здійснити покрокове розв'язання, може варіювати початкові дані, оцінювати похибки, наводити графічну ілюстрацію тощо.

## III. ВИКОРИСТАННЯ ПЛАТФОРМИ MOODLE ЯК ІНФОРМАЦІЙНОЇ

Як правило, для кожного математичного курсу наводиться така інформація: а) інструктивно-методичні матеріали. Ці матеріали вводяться для кожного окремого курсу, кожного семестру та містять інформацію про зміст контрольних робіт, індивідуальних завдань, систему оцінювання, список літератури, зміст лекцій (для кожної лекції), зміст практичних занять (для кожного практичного заняття), а також зразки оформлення контрольних робіт та індивідуальних завдань; б) теми та дати проведення лекцій та практичних занять. Ці матеріали наводяться після подання розкладу занять і мають винятково важливе значення для організації навчального процесу; в) посилання на навчальні посібники; г) посилання на збірники задач; д) конспекти лекцій з кожного розділу; е) матеріали, пов'язані із застосуванням системи комп'ютерної математики Mathcad до кожного розділу.

Виставлені також відеоуроки з практичних та лекційних занять, терміни здачі і ресурси для проведення опитувань, тестувань, здачі індивідуальних завдань [8, 9].

## IV. ОПИТУВАННЯ

З метою підвищення активності, під час онлайн-лекцій, які проводяться за допомогою сервісу Google Meet, студентам ставляться питання за темою лекції. Якщо вони знають відповідь, то натискають значок піднятої руки. По кількості піднятих рук можна судити на скільки зрозумілий матеріал. Далі один із студентів дає відповідь.

Для розуміння засвоювання студентами основних понять та методів в кінці лекцій проводяться експрес-опитування на навчальній платформі Moodle (рис. 1). Результати аналізуються, пояснюються правильні відповіді.

### Опитування до лекції 5. Пряма та площина

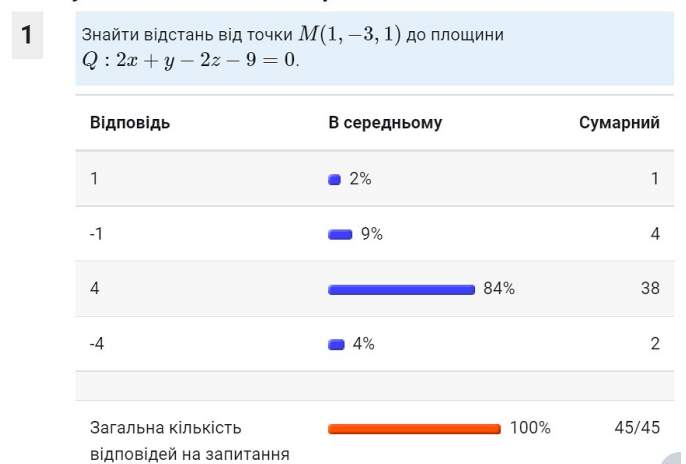


Рис. 1. Результати опитування.

Такі опитування мотивують студентів до більш уважного прослуховування лекцій.

## V. ТЕСТУВАННЯ

Для проведення поточного та підсумкового контролю знань проводяться тестування. Тестові завдання складаються таким чином, щоб неможливо було отримати відповідь простою підстановкою в онлайн-калькулятор. Це досягається введенням питань типу: за якого значення параметра справедливо те чи інше твердження. Таким чином у більшості завдань студенти отримують числову відповідь, яку вписують у відповідне поле (рис. 2). Це зменшує ймовірність вгадування на відміну від завдань з множинним вибором.

**питання 1**

Відповіді ще не було

Макс. оцінка до 1

Визначити, за якого значення параметра  $\alpha$  вектори ортогональні:

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = \alpha\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Відповідь:

Рис. 2 Тестове питання на обчислення параметра.

Після проходження тестування студенти одразу бачать отриманні бали. Викладачі, оцінивши загальну картину та результати всієї групи, мають можливість докладно вивчити індивідуальні результати студентів за кожним запропонованим питанням тесту і надалі, за необхідності, вносити відповідні корективи в навчальний процес, проводити роботу над помилками, над недостатньо засвоєним матеріалом курсу.

## VI. ВІДЕОУРОКИ

Відеозаписи дистанційних лекцій та практичних занять публікуються на відеохостингу YouTube. На сторінці курсу дається посилання на відеоурок за заданою темою. Такі відеозаписи користуються попитом у студентів, адже дають можливість повернутися до складних питань і згадати те, що розглядалось на занятті. Особливо це необхідно і дуже корисно при дистанційному навчанні, яке може відбуватися в асинхронному режимі. При такому режимі навчання студент отримає ту ж саму інформацію та знання, що і студенти, які були присутні на занятті онлайн.

Кількість переглядів відеозаписів лекцій можна побачити на рис. 3. Даємо приклад дисципліни, яку вивчають 140 студентів. Присутність на лекціях становить 75–80 %. По кількості переглядів можна зробити висновок, що лекції переглядають не тільки студенти, які були відсутні, а й ті, що вже прослухали лекцію.

Відеозаписи лекцій та практичних занять згруповані за темами, що полегшує студентам пошук [10].

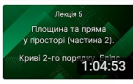
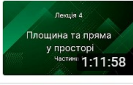
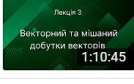
Відео	Дата ↓	Перегля...
	29 жовт. 2022 р. Завантажено	52
	21 жовт. 2022 р. Завантажено	29
	16 жовт. 2022 р. Завантажено	96

Рис. 3. Кількість переглядів відеозаписів лекцій.

## VII. ВИСНОВКИ

З метою підвищення якості освіти при вивчанні фундаментальних математичних дисциплін авторами пропонується вдосконалення навчально-методичного забезпечення, використання систем комп'ютерної математики, використання можливостей системи Moodle для дистанційного навчання. Аналіз використання системи Moodle показав її значущість, затребуваність та дисциплінуючу роль. Автори виклали свій досвід реалізації та втілення в навчальний процес вказаних пропозицій. Констатуємо, що такий підхід безсумнівно підвищує якість підготовки фахівців.

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Тевяшев А. Д., Литвин О. Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Київ: Кондор, 2006, 2017. 588 с.
- [2] Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних / Тевяшев А. Д., Литвин О. Г., Кривошеєва Г. М. та ін. Київ: Кондор, 2006, 2017. 460 с.
- [3] Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення / Тевяшев А. Д., Литвин О. Г., Кривошеєва Г. М. та ін. Київ: Кондор, 2006, 2017. 608 с.
- [4] Тевяшев А. Д., Литвин О. Г. Вища математика у прикладах та задачах: Алгебра та геометрія із застосуванням Mathcad. Частина 1. Харків: ТОВ «Друкарня Мадрид», 2015, 2017. 346 с.
- [5] Тевяшев А. Д., Литвин О. Г. Вища математика у прикладах та задачах: Алгебра та геометрія із застосуванням Mathcad. Частина 2. Харків: ТОВ «Друкарня Мадрид», 2015, 2017. 324 с.
- [6] Тевяшев А. Д., Литвин О. Г. Вища математика у прикладах та задачах: Математичний аналіз із застосуванням Mathcad. Харків: ТОВ «Друкарня Мадрид», 2015. 600 с.
- [7] Тевяшев А. Д., Литвин О. Г., Манчинська Н. Б. Методичні вказівки до курсової роботи з курсу «Алгебра та геометрія». Харків: ХНУРЕ, 2018. 48 с.
- [8] Тевяшев А. Д., Литвин О. Г., Манчинська Н. Б. Досвід використання системи дистанційного навчання Moodle при вивчанні фундаментальних математичних дисциплін // П'ята міжнародна науково-практична конференція «MoodleMoot Ukraine 2017». Теорія і практика використання системи управління навчанням Moodle». (Київ, КНУБА, 26–27 травня 2017 р.). Київ: КНУБА, 2017. URL: <https://2020.moodlemoot.in.ua/course/view.php?id=31> (дата звернення: 25.11.2022).
- [9] Система дистанційного навчання Moodle «НУРЕ Дистанційне навчання». URL: <https://dl.nure.ua> (дата звернення: 25.11.2022).
- [10] URL: <https://youtu.be/NiLV2HbmOFE> (дата звернення: 25.11.2022).

# Використання можливостей хмарних сервісів в онлайн навчанні у технічному університеті

Наталія Манчинська  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Харків, Україна  
natali.manchinska@nure.ua

Олександра Литвин  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Харків, Україна  
oleksandra.litvin@nure.ua

Ольга Матвієнко  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Харків, Україна  
olha.matviienko@nure.ua

## Using cloud services in online education at a technical university

Nataliia Manchynska  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
natali.manchinska@nure.ua

Oleksandra Lytvyn  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
oleksandra.litvin@nure.ua

Olha Matviienko  
department of applied mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
olha.matviienko@nure.ua

**Анотація**— Авторами розглядаються концептуальні засади використання хмарних сервісів при дистанційному викладанні математичних дисциплін, методичні аспекти поєднання хмарних сервісів Google з платформою навчання Moodle.

**Abstract**— The authors consider the conceptual principles of using cloud services in remote teaching of mathematical disciplines, methodical aspects of combining Google cloud services with the Moodle learning platform.

**Ключові слова**— дистанційне навчання, онлайн навчання, навчальна платформа Moodle, сервіси Google, математична дисципліна.

**Keywords**— distance learning, online learning, educational platform Moodle, Google services, mathematical discipline.

### I. ВСТУП

В Україні в останні роки швидкий розвиток отримало дистанційне навчання. Електронне навчання не замінює традиційні методи навчання, але в деякі періоди часу, під час пандемії, війни, ставало чи не єдиною формою підтримування освітнього процесу.

Онлайн навчання розвивається та вдосконалюється в усьому світі [1]. Відповідно до маркетингових досліджень Technavio [2], ринок хмарних обчислень у сфері шкільної освіти у США матиме загальний річний темп зростання 18,77%, зростаючи на 1,74 мільярда доларів до 2026 року.

У роботі автори діляться досвідом застосування хмарних сервісів при викладанні математичних дисциплін на навчальній платформі Moodle.

## II. МОЖЛИВОСТІ ХМАРНИХ СЕРВІСІВ В ОНЛАЙН НАВЧАННІ

Для онлайн навчання використовуються навчальні платформи з використанням хмарних сервісів. В хмарні сховища переносяться навчальні модулі, діяльність студентів і викладачів. Використання хмарних технологій в освітньому процесі відкриває багато можливостей, як для навчальних закладів, так і для викладачів, і для студентів. А саме:

1. Комунікація між учасниками навчального процесу. Студенти і викладачі можуть працювати у віртуальних класах, спілкуватися між собою в режимі реального часу, перебуваючи в різних місцях.

2. Зберігання даних в хмарі з дотриманням суворих протоколів захисту даних. У хмарі програми можна запускати в Інтернет-браузерах, тому маючи ноутбук, планшет або смартфон викладач може отримати або надати доступ до планів занять, методичних матеріалів, цифрових підручників та іншого. Хмара усуває потребу в дорогих або застарілих підручниках. Цифровий контент коштує значно дешевше, ніж друкований матеріал. Хмарні матеріали також можна легко оновлювати, щоб студенти завжди мали доступ до найновіших навчальних ресурсів. Додаткова перевага у хмарних технологіях полягає в тому, що існують усілякі засоби автентифікації, які гарантують доступ до академічних матеріалів потрібним людям і нікому іншому. Хоча хмарні системи не повністю захищені від кібератак, вони набагато краще підходять для боротьби з ними.

3. Перевірка залученості студента до навчання, поточний та підсумковий контроль знань з використанням тестів, анкет, співбесід. Викладач отримує інформацію про рівень знань кожного студента та усієї групи, має можливість внести зміни в навчальний процес, в спосіб подачі навчального матеріалу, надати поради відстаючим студентам. Комп'ютерні тести дають змогу отримати статистику результатів тестування по кожному студенту, визначити ряд питань, які є складними для більшості студентів. Статистична обробка результатів тестів дає інформацію про якість та валідність тестових питань.

## III. ХМАРО ОРІЄНТОВАНА СИСТЕМА ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ MOODLE

Автори для організації освітнього процесу використовують систему управління навчанням Moodle [3, 4], яка створює інформаційно-освітнє середовище, керує навчальним процесом, забезпечує взаємодію учасників освітнього процесу, які знаходяться віддалено, дозволяє розміщувати та зберігати навчальні матеріали у сховищі, автоматично контролює знання студентів.

На платформі Moodle на сторінках дисциплін розміщені інструктивно-методичні матеріали, теми та дати проведення занять, інструкції з подачі індивідуальних та контрольних завдань на перевірку, посилання на електронні задачі та підручники, конспекти лекцій, зразки виконання завдань в системі комп'ютерної математики, опитування, тести, посилання на відеозаписи лекцій та практичних занять.

Забезпечення студентів інформаційним та методичним супроводом має важливе значення для організації навчального процесу, який може відбуватись в синхронному та асинхронному режимах.

## IV. ХМАРНІ СЕРВІСИ GOOGLE ДЛЯ ОНЛАЙН-НАВЧАННЯ

У даний час існує багато хмарних сервісів, які можна застосовувати в освітньому процесі. Наведемо приклади використання найбільш ефективних рішень при викладанні дисциплін математичного циклу: а) сервіс для підтримки планування та організації (Google Календар); б) сервіс для високоякісних і безпечних відеозустрічей (Google Meet), в) сервіс для здійснення комунікації – поштовий сервіс Gmail; г) цифрова дошка Google Jamboard, ґ) офісний пакет (Google Документи, Таблиці, Презентації); д) сервіс для розміщення відеоматеріалів YouTube; е) сховище даних для зберігання і спільної роботи з документами (Google Диск).

Контрольні заходи, як то тестування, подача індивідуальних розрахункових завдань на перевірку, плануються заздалегідь та відображуються в Google Календарі. Призначаючи консультацію викладач також може використовувати Google Календар. Учасники зустрічі – студенти отримають повідомлення про час та мету зустрічі.

Навчальні заняття проводяться онлайн за допомогою сервісу відеоконференцій Google Meet. При під'єднанні виконується автентифікація учасників. Сервіс Google Meet дає можливість демонстрації матеріалів на робочому столі ПК під час занять: під час зустрічі можна надати доступ до свого екрану, щоб показати презентації або іншу інформацію на робочому столі. Під час відеозустрічей відбувається інтерактивна взаємодія між учасниками навчального процесу [5]. Сервіс Google Meet дозволяє вести запис заняття і зберігає відео на Google Диску, з цих відео формуються відеоуроки, які розміщуються на відеохостингу YouTube. Нова корисна функція в Google Meet – проведення опитування, щоб швидко дізнатися думку аудиторії.

Поштовий сервіс Gmail дозволяє вести персональну переписку, пересилати інформацію.

Цифрову дошку Google Jamboard автори використовують під час проведення практичних занять для самостійної роботи студентів. Заздалегідь готується шаблон завдання, далі створюються копії дошок (фреймів). Таким чином кожен студент має свою дошку (фрейм) для розв'язання задачі. Викладач може швидко перемикатися між фреймами і контролювати хід виконання завдання (рис.1).

Недоліком при використанні Google Jamboard є незручність написання рукописних формул та слів комп'ютерною мишею. Тому доводиться підбирати завдання, щоб розв'язок можливо було подати використовуючи клавіатуру.

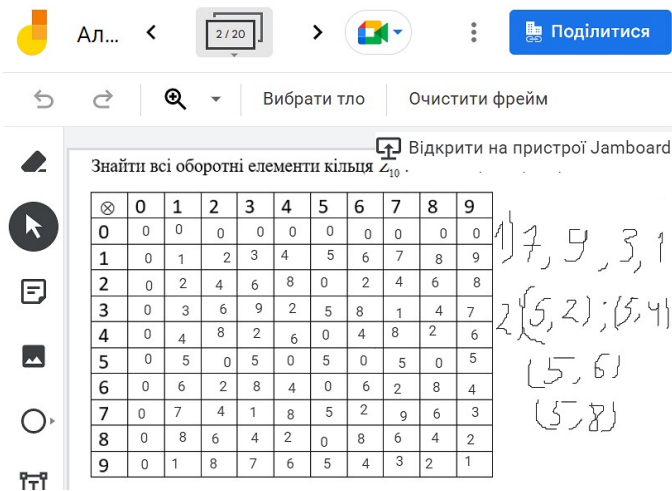


Рис. 1. Видгляд виконання завдання на цифровій дошці Google Jamboard.

Слайди лекцій для онлайн навчання створюються за допомогою сервісу Google презентації. Зручність полягає в тому, що презентації лекцій доступні на різних пристроях: ноутбуків, планшетів, смартфонів. Студенти іноді мають бажання скопіювати презентацію на свій Google диск. У такому випадку вони можуть легко стежити за презентацією, роблячи нотатки в області презентації. Зміни зберігаються автоматично.

Відеозаписи онлайн лекцій та практичних занять розміщені на відеохостингу YouTube. Перші відеозаписи робилися на початку пандемії коронавірусу, викладалися у широкому доступі, стали корисними не тільки для наших студентів, а і для широкого загалу (рис. 2). Відеозаписи занять корисні і для студентів, які навчаються асинхронно.

Відео	Пере...	Комент...	"Подобається" (...)
<p>Матричний метод розв'язання сист... Відеозапис дистанційного практичного заняття на тему: "Матричний метод..."</p>	8 578	3	95,4% 103 оцінки "подобається"
<p>Границя функції Відеозапис дистанційного практичного заняття на тему: "Границя функції"</p>	7 175	10	97,2% 139 оцінок "подобається"
<p>Числові ряди. Знакододатні ряди. О... Ознака Далала</p>	6 084	8	97,9% 139 оцінок "подобається"

Рис. 2. Кількість переглядів відеозаписів практичних занять.

На Google диску зберігаються електронні підручники та посібники, посилання на них дається на сторінці дисципліни на платформі Moodle. Подання рукописних індивідуальних розрахункових завдань на перевірку відбувається за допомогою сховища даних Google диск. Свої письмові роботи студенти фотографують, pdf-файл з фотографій завантажують на свій Google диск, а на платформу Moodle в відповідний розділ подають посилання на файл. Викладач, маючи спільний доступ до файлу, може його переглядати, не завантажуючи собі на комп'ютер. Зберігання даних на Google диску дозволяє не перевантажувати даними університетський сервер.

## V. ВИСНОВКИ

Величезну користь від користування хмарними сервісами автори відчули на початку війни, коли довелося терміново змінити місце перебування і продовжити навчальний процес на новому місці, маючи тільки смартфон. Дякуючи тому, що всі навчальні матеріали були в хмарних сховищах, вдалося без проблем продовжувати навчальний процес.

Переваги хмарних обчислень та сервісів полягають в тому що, якщо є підключення до Інтернету та браузер, можна отримати доступ до своїх даних без прив'язки до свого пристрою, не потрібно зберігати данні на фізичних носіях інформації, як то флешки та інші. Все це полегшує віддалену роботу, сприяє кращій організації навчального процесу, а отже підвищенню якості освіти.

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Коротун О.В. Використання хмаро орієнтованих засобів у вищій школі: світовий досвід. // Інформаційні технології у вищій школі: Монографія. Житомир: вид-во ФОП "О.О.Євенок", 2019. С. 223-246.
- [2] Cloud Computing Market in K-12 Education Sector by Service and Geography - Forecast and Analysis 2022-2026 // <https://www.technavio.com/report/cloud-computing-market-in-k-12-education-sector-market-industry-analysis> (дата звернення 17.11.2022).
- [3] Система дистанційного навчання Moodle «НУРЕ Дистанційне навчання». URL: <https://dl.nure.ua> (дата звернення: 02.12.2022).
- [4] Тевяшев А. Д., Литвин О. Г., Манчинська Н. Б. Досвід використання системи дистанційного навчання Moodle при вивченні фундаментальних математичних дисциплін // П'ята міжнародна науково-практична конференція «MoodleMoot Ukraine 2017». Теорія і практика використання системи управління навчанням Moodle». (Київ, КНУБА, 26-27 травня 2017 р.). Київ: КНУБА, 2017. URL: <https://2020.moodlemoot.in.ua/course/view.php?id=31> (дата звернення: 02.12.2022).
- [5] Литвин О. Г., Манчинська Н.Б. Інтерактивна складова у дистанційному навчанні з математичних дисциплін // Дев'ята міжнародна науково-практична конференція «MoodleMoot Ukraine 2021». Теорія і практика використання системи управління навчанням Moodle». (Київ, КНУБА, 17 червня 2021 р.): доповідь. – К.: КНУБА, 2021. URL: <https://2021.moodlemoot.in.ua/course/view.php?id=12> (дата звернення: 02.12.2022).

# Застосування машинного навчання для оцінювання показника Херста

Людмила Кіриченко  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет  
радіоелектроніки  
Харків, Україна  
[lyudmyla.kirichenko@nure.ua](mailto:lyudmyla.kirichenko@nure.ua)

Кирило Павленко  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет  
радіоелектроніки  
Харків, Україна  
[kyrylo.pavlenko@nure.ua](mailto:kyrylo.pavlenko@nure.ua)

## Application of machine learning to estimate the Hurst exponent

Lyudmyla Kirichenko  
Applied Mathematics Department  
Kharkiv National University of Radioelectronics  
Kharkiv, Ukraine  
[lyudmyla.kirichenko@nure.ua](mailto:lyudmyla.kirichenko@nure.ua)

Kyrylo Pavlenko  
Applied Mathematics Department  
Kharkiv National University of Radioelectronics  
Kharkiv, Ukraine  
[kyrylo.pavlenko@nure.ua](mailto:kyrylo.pavlenko@nure.ua)

**Помилка! Неприпустимий об'єкт гіперпосилання.**

*Анотація — У роботі розглянуто підхід до оцінювання показника Херста для фрактальних часових реалізацій, заснований на застосуванні машинного навчання, а саме регресійної нейронної мережі. Побудова регресійної моделі виходить з оцінювання показника Херста за допомогою дискретного вейвлет-перетворення. Вхідними даними є значення вейвлет-енергій, отриманих за реалізаціями фрактального броунівського руху. Порівняльний аналіз показав, що при застосуванні нейронної мережі точність оцінювання підвищилася в кілька разів.*

*Abstract — The paper considers an approach to estimating the Hurst exponent for fractal time realizations, based on the application of machine learning, namely, a regression neural network. The construction of the regression model is based on the estimation of the Hurst exponent using a discrete wavelet transform. The input data are the values of the wavelet energies obtained from realizations of the fractal Brownian motion. Comparative analysis showed that when using a neural network, the accuracy of the assessment increased several times.*

*Ключові слова — Оцінка показника Херста, фрактальний броунівський рух, регресійна нейронна мережа, оцінка на основі вейвлетів*

*Keywords — Hurst exponent estimation, fractional Brownian motion, regression neural network, wavelet-based estimation*

### 1. ВСТУП

Однією з основних властивостей біологічних, фізичних, технічних та інформаційних систем є властивість

самоподібності (фрактальності). Ця властивість притаманна не тільки самим об'єктам і системам, а й сигналам, які вони генерують, і траєкторіям їх руху, які описуються фрактальними часовими реалізаціями [1, 6, 9, 18]. Основною характеристикою фрактальної реалізації є її ступінь самоподібності, яка називається показником Херста. Різним станам досліджуваної системи відповідають різні значення показника Херста, тому кількісна характеристика самоподібності часто приносить важливу додаткову інформацію [3, 4, 16, 19].

Існує багато підходів і методів оцінки показника Херста за однією реалізацією, які відрізняються між собою точністю і швидкістю оцінювання [7, 8, 24, 18]. Відповідним математичним інструментом для вивчення самоподібних процесів є вейвлет-аналіз, оскільки основною властивістю вейвлет-функції є властивість інваріантності масштабу. Широко відомий розрахунок показника Херста на основі дискретного вейвлет-перетворення, який має добру швидкість і достатню точність [2, 10, 24]. Однак більшість методів оцінки, включаючи оцінку на основі вейвлетів, мають велику похибку для реалізацій з коротким часом [18].

Одним із перспективних напрямів дослідження фрактальних часових рядів, у тому числі оцінки ступеня самоподібності, є методи машинного навчання. Машинне навчання, зокрема глибокі нейронні мережі, стало популярним інструментом для класифікації, кластеризації



та прогнозування часових рядів [12, 15, 22]. Машинне навчання використовувалося для вивчення реалізацій аномальної дифузії в різних фізичних, біологічних і хімічних процесах [5, 17, 21, 23], класифікації ЕЕГ і виявлення DDoS-атак на основі їх фрактальних властивостей [20, 25], а також ряду інших досліджень.

Метою представленої роботи є реалізація вейвлет-оцінювання показника Херста самоподібних реалізацій за допомогою нейронної мережі та порівняння результатів зі статистичним оцінюванням.

## 2. МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ

### 3. Самоподібні процеси

Неперервний випадковий процес  $X(t)$  називається самоподібним процесом з параметрами  $H$ ,  $0 < H < 1$ , якщо для будь-якого дійсного значення  $a > 0$ , скінченновимірні розподіли  $X(t)$  тотожні скінченновимірним розподілам  $a^{-H}X(at)$ .

Параметр  $H$ ,  $0 < H < 1$ , називається показником Херста, є мірою самоподібності та тривалості тривалої залежності випадкового процесу  $X(t)$ .

Одним з найбільш відомих і широко використовуваних в практичних застосуваннях автотельних процесів є фрактальний броунівський рух (ФБР)  $B_H(t)$ . На відміну від звичайного броунівського блукання, де природи процесу незалежні, а дисперсія прямо пропорційна часу, природи  $B_H(t)$  мають гіперболічно спадну автокореляційну функцію та залежну від часу дисперсію  $Var(B_H(t) - B_H(t_0)) = \sigma_0 \cdot |t - t_0|^{2H}$ .

ФБР, його модифікації та різноманітні перетворення є математичними моделями багатьох реальних процесів [4, 7, 14, 18]. Безсумнівний практичний інтерес становлять методи генерації часових реалізацій і дослідження властивостей фракталів.

Існує ряд методів моделювання реалізацій фбр, як точних, так і наближених [11]. Одним із ефективних точних методів є алгоритм Дейвіса - Харта. Практична реалізація цього методу заснована на обчисленні дискретного перетворення Фур'є, що робить його найшвидшим.

### 4. Оцінка показника Херста на основі вейвлетів

Існує багато методів оцінки показника Херста за часовими реалізаціями [7, 8, 18]. Одним із широко використовуваних є оцінювання на основі вейвлетів. Цей підхід, запропонований у [2], добре зарекомендував себе для фрактального аналізу нестационарних процесів [2, 3, 10]. Слід також відзначити швидкість оцінки на основі вейвлетів, що дозволяє рекомендувати її для аналізу систем у реальному часі.

Вейвлет-перетворення часової реалізації — це її представлення у вигляді узагальненого ряду або інтеграла

на основі базисних функцій  $\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$  отриманих з материнської вейвлет-функції  $\psi(t)$ , через операції зсуву часу  $b$  і масштабування  $a$ .

Дискретне вейвлет-перетворення (ДВП) будується за допомогою багатомасштабного аналізу, який полягає в розбитті реалізації  $X(t)$  на дві складові: наближення (низькі частоти) і деталізацію (високі частоти). Далі процедура рекурсивно повторюється шляхом розщеплення компонент наближення до заданого рівня розкладання  $N$ . У результаті реалізація  $X(t)$  представляється як сума компонент апроксимації та набору компонент деталей на різних рівнях. На кожному рівні декомпозиції компонент деталі  $X(t)$  має відповідний набір деталізуючих вейвлет-

коефіцієнтів  $det(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\psi_{jk}(t)dt, k = 1, N_j$ .

Ряд деталізуючих вейвлет-коефіцієнтів, отриманих в результаті ДВП, має певні властивості, які дозволяють досліджувати поведінку стохастичних процесів із властивостями самоподібності. Якщо випадковий процес  $X(t)$  є самоподібним зі стаціонарними приростами, то коефіцієнти деталізації на кожному рівні розкладання  $j$  є самоподібними. Це означає рівність законів розподілу вейвлет-коефіцієнтів на кожному рівні декомпозиції з певним масштабом. Ця властивість коефіцієнтів деталізації впливає з самоподібності процесу  $X(t)$  і масштабною інваріантністю вейвлетів.

Значення вейвлет-енергії на заданому рівні вейвлет-розкладання  $j$  з кількістю деталізуючих вейвлет-коефіцієнтів  $N_j$  визначається як

$$E_j = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} det^2(j, k). \quad (1)$$

В основі оцінки на основі вейвлетів лежить той факт, що значення енергії вейвлетів на масштабованому рівні підкоряються співвідношенню масштабування:  $E_j \propto 2^{(2H+1)j}$ . З цієї формули впливає, що за наявності самоподібних властивостей показник Херста можна отримати шляхом оцінки нахилу функції  $\log_2(E_j)$  на  $j$ .

### 5. Оцінка показника Херста за допомогою нейронної мережі

Розглянемо оцінку показника Херста як задачу регресії, тобто необхідно передбачити значення параметра Херста на основі значень спектрів вейвлет-енергій, отриманих із реалізацій. Одним із потужних інструментів побудови регресії є нейронні мережі [13].

Проведені дослідження з декількома архітектурами нейронних мереж (НМ) показали, що для вирішення даної задачі регресії доцільно використовувати наступну нейронну мережу. Вона складається з 5 прихованих шарів

із функціями активації ReLu та вихідного шару з функцією активації сигмоїд.

ReLU є найкращою функцією активації на даний момент, тому що багато недоліків, зокрема проблема зникнення градієнта, повністю усунені в цій функції активації. Усі від'ємні значення перетворюються на 0, тому від'ємні значення недоступні. Максимальні порогові значення є нескінченними, тому проблема зникнення градієнта не виникає, отже, точність і ефективність вихідного прогнозу є максимальними. Швидкість висока порівняно з іншими функціями активації.

Сигмоїдна функція активації традиційно була дуже популярною функцією активації для нейронних мереж. Сигмоїдна функція допомагає нормалізувати вихід будь-якого вхідного сигналу між 0 і 1. У нашому випадку це добре узгоджується з діапазоном значень показника Херста.

## 6. ЕКСПЕРИМЕНТ

Розглянемо отримання вибірки даних, яка призначена для навчання та тестування НМ. Вхідними даними є часові реалізації, вихідними даними є відповідні значення показника Херста. Таким чином, вибірка є набором реалізацій фбр з різними значеннями  $H$ . Оскільки наші дані є модельними, розмір вибірки можна вибрати довільним.

Для створення реалізацій фбр показник Херста змінювався від 0,05 до 0,95 з кроком 0,01. Довжина реалізації була одним із параметрів і змінювалася в діапазоні від 200 до 2000 значень. Для кожного значення показника  $H$  було згенеровано набір різних реалізацій з однаковим  $H$ .

Для кожної реалізації було виконано дискретне вейвлет-перетворення та отримано спектр вейвлет-енергій за формулою (1). Кількість рівнів декомпозиції залежала від довжини реалізації. Вхідними даними для НМ були значення спектру вейвлет-енергій.

Розглянемо точність оцінки показника  $H$  у нашій моделі регресії. Очевидно, візуальний метод полягає в побудові гістограми оціночних значень показника Херста для деякого вибраного показника  $H$ . У цьому випадку також буде зручно порівняти з результатами оцінювання статистичним вейвлет-методом.

## 7. РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ

Програмна реалізація експерименту виконана на мові Python, яка містить багато бібліотек, призначених для реалізації методів машинного навчання. Генерацію реалізацій фбр проводили на основі алгоритму Девіса - Харта. Показник Херста був розрахований за допомогою статистичної оцінки на основі вейвлетів для реалізацій різної довжини. У таблиці 1 наведені значення середнього та стандартні відхилення оцінок параметра Херста для значень  $H=0.4, 0.8$ . Середнє значення та стандартне відхилення були отримані шляхом усереднення понад 300 різних реалізацій з однаковим значенням  $H$ . Отримані вибіркові значення добре узгоджуються з результатами, представленими в роботах [1, 18, 24].

TABLE I. СЕРЕДНЄ ТА СТАНДАРТНЕ ВІДХИЛЕННЯ СТАТИСТИЧНИХ ОЦІНОК

	Довжина реалізації			
	250	500	1000	2500
$H=0.4$				
Середнє	0.23	0.267	0.29	0.281
Стандартне відхилення	0.12	0.089	0.072	0.046
$H=0.8$				
Середнє	0.58	0.64	0.672	0.69
Стандартне відхилення	0.13	0.08	0.058	0.051

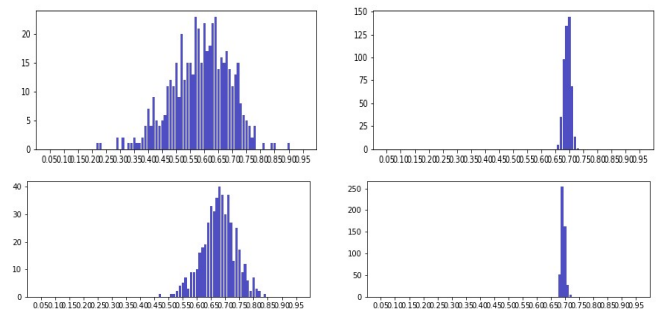
Очевидно, що оцінки показника Херста, крім достатньо великого стандартного відхилення, мають значне зміщення, яке, як і стандартне відхилення, зменшується зі збільшенням довжини реалізації.

Для отримання оптимальної конфігурації регресійної нейронної мережі було проведено низку експериментів з різними значеннями її параметрів та розмірами навчальної множини. Критерієм оптимізації було значення середньоквадратичної похибки (MSE) для валідаційного набору. В результаті була обрана описана вище архітектура нейронної мережі.

Навчальний набір містив 10000 спектрів вейвлет-енергій, 500 значень для кожного  $H$ . Для отримання вейвлет-спектрів, 10000 фбр реалізацій було згенеровано. Тестовий набір містив 500 значень вейвлет-спектрів з різними показниками Херста.

Результатом регресійної моделі була оцінка теоретичного значення показника Херста, тобто випадкового значення. Значення випадкової величини правильніше представляти у вигляді вибіркової щільності розподілу. Враховуючи те, що теоретичні значення показника Херста змінювалися з кроком 0,01, доцільно вибрати такий же інтервал для побудови гістограм.

На рис. 1 показано оцінки показника Херста, отримані для реалізацій з показником  $H=0.7$ . Ліворуч показані гістограми оцінок, отриманих статистичним розрахунком, а праворуч – за допомогою нейронної мережі. Гістограми, показані вгорі, отримані з реалізацій довжиною 250 значень, унизу - 2500 значень.



- Гістограми для оцінок  $H=0.7$ , статистичний розрахунок (ліворуч), нейронна мережа (праворуч); довжина реалізації 250 значень угорі, 2500 унизу.

Слід підкреслити, що оцінки, отримані за допомогою нейронної мережі, не мають зміщення і мають стандартне

відхилення на порядок менше, ніж оцінки, отримані статистично. У таблиці II представлено порівняння стандартного відхилення оцінок параметра Херста для значень  $H=0.4, 0.8$ .

TABLE II. СТАНДАРТНІ ВІДХИЛЕННЯ СТАТИСТИЧНИХ ОЦІНОК ТА ОЦІНОК НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ

	Довжина реалізації	
	250	2500
<i>Стандартне відхилення для <math>H=0.4</math></i>		
<i>Статистичний розрахунок</i>	0.13	0.046
<i>Нейронна мережа</i>	0.011	0.019
<i>Стандартне відхилення для <math>H=0.8</math></i>		
<i>Статистичний розрахунок</i>	0.14	0.045
<i>Нейронна мережа</i>	0.012	0.018

### ВИСНОВОК

У роботі представлено метод оцінки показника Херста за допомогою регресійної нейронної мережі. Вхідними даними для нейронної мережі були спектри вейвлет-енергій досліджуваних реалізацій. Нейронна мережа була навчена реалізаціям фрактального броунівського руху, що дозволило порівняти результати зі статистичною вейвлет-оцінкою. Точність оцінки показника Херста, виконаної за допомогою нейронної мережі, на порядок вище точності статистичних оцінок.

Подальші дослідження будуть зосереджені на двох напрямках. Перше: додати до регресійної моделі ознаки, отримані на основі інших методів оцінки, що має призвести до підвищення точності. Друге: розширити навчальний набір реалізацій різноманітних моделей самоподібних процесів, що дасть можливість працювати з реальними часовими рядами.

### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

[1] Abry, P., Goncalves P., Veitch, J. L.: *Scaling, Fractals and Wavelets*. John Wiley & Sons, London (2009)

[2] Abry, P., Veitch, D.: Wavelet analysis of long-range dependent traffic. *IEEE/ACM Transactions Information Theory* 1(44), 2–15 (1998).

[3] Abry, P., Flandrin, P., Taqqu, M.S., Veitch, D.: Self-similarity and longrange dependence through the wavelet lens. In: Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M.S. (Eds.), *Long Range Dependence: Theory and Applications*, pp. 125–160 (2002).

[4] Balcerak, M., Burnecki, K., Thapa, S., Wyloma'nska, A., & Chechkin, A.V. (2022). Fractional Brownian motion with random Hurst exponent: accelerating diffusion and persistence transitions, 2022. <https://doi.org/10.48550/arxiv.2206.03818>

[5] Bo, S., Schmidt, F., Eichhorn, R., Volpe, G. Measurement of anomalous diffusion using recurrent neural networks *Phys. Rev. E*, 100, 010102(R), 2019, DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.010102>

[6] Brambila, F.: *Fractal Analysis - Applications in Physics, Engineering and Technology*, <https://www.intechopen.com/books/fractal-analysisapplications-in-physics-engineering-and-technology>

[7] Burnecki, K., Sikora, G., Weron, A., Tamkun M.M., Krapf, D.: Identifying diffusive motions in single-particle trajectories on the plasma membrane via fractional time series models, *Physical Review E* 99, 012101. (2019) DOI: 10.1103/PhysRevE.99.012101.

[8] Clegg, R. G.: A practical guide to measuring the Hurst parameter. *International Journal of Simulation. Systems, Science & Technology* 7(2), 3–14 (2006).

[9] Feder, J.: *Fractals*. Plenum, New York, 1988

[10] Flandrin, P.: *Wavelet Tools for Scaling Processes*. Turbulence: measurements and signals. Lecture given at the Summer School, Lyon, pp.123–128 (2002)

[11] Fractional Brownian Motion: Approximations and Projections Author(s): Banna O., Mishura Yu., Ralchenko K., Shklyar S. (2019) DOI:10.1002/9781119476771

[12] Gamboa, J.C.B.: *Deep learning for time-series analysis*. arXiv:1701.01887 <http://arxiv.org/abs/1701.01887> (2017)

[13] Géron, A.: *Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems* (2nd ed.). O'Reilly Media (2020)

[14] Granik, N., Weiss L. E., Nehme E., Levin M., Chein M., Perlson E., Roichman Y., Shechtman Y.: Single-Particle Diffusion Characterization by Deep Learning, *Biophysical Journal*, Volume 117, Issue 2, pp. 185–192, (2019) DOI:/10.1016/j.bpj.2019.06.015.

[15] Ismail Fawaz, H., Forestier, G., Weber, J., Idoumghar, L., Muller, P.-A.: Deep learning for time series classification: a review. *Data Min. Knowl. Disc.* 33(4), 917–963 (2019). DOI:10.1007/s10618-019-00619-1

[16] Ivanisenko, I., Kirichenko, L., Radivilova, T.: Investigation of multifractal properties of additive data stream. In: 2016 IEEE First International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP), pp. 305–308 (2016). DOI: 10.1109/DSMP.2016.7583564

[17] Janczura, J., Kowalek, P., Loch-Olszewska, H., Szwabinski, J., Weron, A.: Classification of particle trajectories in living cells: machine learning versus statistical testing hypothesis for fractional anomalous diffusion. *Phys. Rev. E* 102(3), 032402 (2020) DOI: 10.1103/PhysRevE.102.032402 16.

[18] Kirichenko, L., Alghawli, A.S.A., Radivilova, T.: Generalized approach to analysis of multifractal properties from short time series. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2020, 11(5), стр. 183–198. DOI:10.14569/IJACSA.2020.0110527

[19] Kirichenko, L., Radivilova, T.: Analyses of the distributed system load with multifractal input data flows. In: 2017 14th International Conference The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM), pp. 260–264 (2017). DOI:10.1109/CADSM.2017.7916130

[20] Kirichenko, L., Zinchenko, P., Radivilova, T.: Classification of time realizations using machine learning recognition of recurrence plots. In: Babichev, S., Lytvynenko, V., Wojcik, W., Vyshemyrskaya, S. (eds.) *ISDMCI 2020*. AISC, vol. 1246, pp. 687–696. Springer, Cham (2021). DOI:10.1007/978-3-030-54215-3 44

[21] Kowalek, P., Loch-Olszewska, H., Szwabiński J.: Classification of diffusion modes in single-particle tracking data: Feature-based versus deep-learning approach, *Physical Review E* 100, 032410. (2019)

[22] Li, D., Bissyande, T.F., Klein, J., Traon, Y.L.: Time series classification with discrete wavelet transformed data. *Int. J. Softw. Eng. Knowl. Eng.* 26(9), 1361–1377 (2016). DOI:10.1142/S021819401640008

[23] Muñoz-Gil, G., Volpe, G., Garcia-March, M.A. et al. Objective comparison of methods to decode anomalous diffusion. *Nat Commun* 12, 6253 (2021). DOI:10.1038/s41467-021-26320-w

[24] Oswiecimka, P., Kwapin, J., Drozd, S.: Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures. *Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 74, 161-203 (2006).

[25] Radivilova, T., Kirichenko, L., Ageiev, D., Bulakh, V.: Classification methods of machine learning to detect DDoS attacks. In: 10th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems (IDAACS), pp. 207–210 (2019). DOI:10.1109/IDAACS.2019.8924406

# Застосування нейронної мережі для виявлення крадіжок у магазинах

Людмила Кіріченко  
Кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет  
радіоелектроніки  
Харків, Україна  
lyudmyla.kirichenko@nure.ua

Bohdan Sydorenko  
Кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет  
радіоелектроніки  
Харків, Україна  
bohdan.sydorenko1@nure.ua

## Application of a neural network to detect shoplifting

Lyudmyla Kirichenko  
Applied Mathematics Department  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
lyudmyla.kirichenko@nure.ua

Bohdan Sydorenko  
Applied Mathematics Department  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
bohdan.sydorenko1@nure.ua

**Анотація**— Розуміння динамічної людської поведінки на основі відео має багато застосувань у контролі безпеки, відеоспостереженні злочинності, спорті та промислових системах IoT. Ця робота вирішує проблему класифікації відеоданих, записаних на камери спостереження з метою ідентифікації випадків крадіжок в магазинах. Пропонується використовувати класифікатор, який є симбіозом двох нейронних мереж: згорткової та рекурентної. Згорткова нейронна мережа використовується для вилучення ознак з кожного кадру та рекурентна мережа для обробки часової послідовності з оброблених кадрів та подальшої класифікації.

**Abstract**— the human activity recognition based on surveillance has many applications in many fields. This paper proposes the solution of the problem of detection shoplifting on video data recorded on CCTV cameras. It was decided to use a neural classifier that is a combination of two neural networks: convolutional and recurrent. The convolutional neural network is used to extract the features from each frame of the video fragment, and the recurrent neural network to process the temporal information from sequences of frames in form of features and make a classification.

**Ключові слова**— поведінка людини, класифікація, особливості, нейронна мережа, крадіжки з магазину, відеоспостереження

**Keywords**— human behavior, classification, features, neural network, shoplifting, video surveillance

### I. ВСТУП

У сучасному світі важливою проблемою відеоспостереження є розпізнавання дій чи діяльності людини. Це робиться на основі дій, які виконує особа або група людей, специфічності або повторюваності рухів

(махання, біг, ходьба, бокс), жестів, групової діяльності та взаємодії людей.

Людське впізнавання є важливим інструментом у вирішенні проблеми крадіжок у роздрібних магазинах. Крадіжки в магазинах є великою проблемою не лише для власників магазинів, а й для поліції, судів та уряду. За даними Національної асоціації запобігання крадіжкам, лише 1 з 48 крадіжок виявляється і підлягає покаранню [1].

Ключовим елементом крадіжки з магазину є приховування речей особою, яка має характерну послідовність дій, не властиву середньостатистичному покупцеві та є аномалією. Переглядаючи відеоролики такого інциденту, людині було б досить легко визначити наявність крадіжки, але зі збільшенням кількості покупців, крадів і відповідно крадіжок виникає проблема складності відстеження кожного з них.

Кількість відеокамер у громадських місцях збільшувалася протягом кількох років, щоб підвищити громадську безпеку. Мережі камер генерують і передають величезні обсяги даних, що ускладнює завдання моніторингу [2]. Це ще одна причина неможливості обробки всієї інформації співробітниками служби спостереження. Таким чином, виникає необхідність розробки системи автоматичного виявлення крадіжок у магазинах у системах відеоспостереження [3], тобто системи відеоспостереження та розпізнавання крадіжок. Водночас виникають додаткові проблеми розмитого або брудного фону, які також можуть знизити або порушити роботу системи аналітичного моніторингу та знизити точність розпізнавання. Крім того, різні умови навколишнього середовища призводять до збільшення кількості даних моніторингу, що тягне за собою

проблему отримання надійних міток для розпізнавання дій людини.

Останнім часом для вирішення задач моніторингу та обробки великих обсягів інформації в режимі реального часу реалізуються методи штучного інтелекту, зокрема алгоритми виявлення аномалій та класифікації подій [4, 5, 6, 7].

Метою роботи є ідентифікація дій людини, спрямованих на вчинення крадіжки на основі гібридної нейронної мережі.

## II. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Автори [8] використовують модель CNN (згортовка нейронна мережа) і RNN (рекурентна нейронна мережа) для класифікації зображень за кількома мітками. Вони також передбачають різні мітки в різних областях зображення, щоб охарактеризувати кореляцію міток високого порядку, використовуючи нейрони довгострокової пам'яті як рекурентні нейрони. Модель, запропонована авторами, використовує CNN і RNN для моделювання залежності збігу спільних міток у просторі спільного вбудовування Image/Label. Для експериментів автори використовують набори даних: NUS-WIDE, Microsoft COCO та VOC PASCAL 2007.

У дослідженні [9] автори використовували глибоку модель штучного інтелекту та тензорний механізм навчання для системи промислового Інтернету, щоб зрозуміти поведінку людини. Самокритичне навчання з підкріпленням використовувалося для покращення можливості висновку між просторовими та часовими характеристиками під час фази вивчення параметрів. Щоб підвищити точність, автори вдосконалили SNN, врахувавши кореляцію між послідовними глибокими характеристиками.

Автори роботи [10] для виявлення та класифікації динамічних моделей поведінки людини на основі відеоданих пропонують об'єднати моделі CNN та LSTM. Модель CNN використовується для навчання людської поведінки на основі часових образів. Крім того, отримані результати є вхідними даними для моделі LSTM для детальної класифікації поведінки шляхом навчання особливостей часової послідовності.

Автори дослідження [11] використовували модель глибокого навчання на основі моделі 3D згорткової нейронної мережі для аналізу присутності насильства на відео з камер відеоспостереження. Щоб оцінити ефективність запропонованої моделі, автори провели експерименти з використанням трьох загальнодоступних наборів даних: Hockey Fights Dataset, Movies Dataset і Violent-Flows Dataset.

У дослідженні [12] проаналізовано алгоритми класифікації відео з метою вибору найбільш ефективного та продуктивного алгоритму. Результати аналізу авторів показали, що використання комбінації CNN і RNN має більшу ефективність і точність класифікації, ніж одиничні методи використання, залежні від CNN.

## III. МЕТОДИ ТА МАТЕРІАЛИ ДЛЯ КЛАСИФІКАЦІЇ

Автори цієї роботи використовували для своїх експериментів набір даних UCF-Crime [13, 14], який містить 1900 відео різної тривалості, загальна тривалість – 128 годин реальних злочинних дій: насильства, арешти, підпали, напади, дорожньо-транспортні пригоди, крадіжки зі зломом, вибухи, бійки, пограбування, стрілянина, крадіжки в магазині та вандалізм. Набір даних містить 28 відео з камер відеоспостереження роздрібних магазинів, які містять крадіжки в магазинах. Для навчання нейронної мережі потрібна значно більша вибірка, тому автори вирішили штучно збільшити набір даних, розділивши кожне відео на 32 фрагменти тривалістю 3 с. Таким чином, було отримано набір даних з 896 відеофрагментів, які були розділені на 2 класи: 155 відео з крадіжками в магазинах і 741 відео без крадіжок в магазинах.

Відеозаписи містять інформацію про час і простір, тому для аналізу відеофрагментів необхідно враховувати обидва види інформації. Найкраще для цього завдання підходять глибокі нейронні мережі: при обробці та аналізі просторової інформації найкращу продуктивність показала CNN, а при обробці та аналізі тимчасової інформації – RNN [15]. Класифікація вимагає аналізу обох типів інформації та використання обох архітектур. Тому автори обрали комбінацію згорткових і рекурентних нейронних мереж.

Згорткові нейронні мережі масштабуються до зображень великої ширини та висоти. В основному вони використовуються для розпізнавання зображень і різних об'єктів на них за допомогою комп'ютерного зору. Це пов'язано з формуванням згортковими мережами нових сегментів інформації зі зниженою розмірністю. У той же час вони використовують кілька різних типів нейронних шарів для об'єднання функцій [16]: згортковий, повністю зв'язаний, агрегаційний і нормалізаційний шари. Згорткові шари застосовують операцію згортки до вхідних даних і передають результат наступному шару.

Рекурентні нейронні мережі використовуються для обробки послідовностей значень і послідовностей змінної довжини. Вони можуть масштабуватися до дуже великих послідовностей [17]. Нейрон має форму пам'яті, оскільки вихід нейрона на кроці часу є функцією всіх попередніх кроків часу. Зберігання стану нейронної мережі через часові кроки називається коміркою пам'яті.

Таким чином, згорткова нейронна мережа буде використовуватися для виділення ознак кожного кадру відеофрагмента, а рекурентна мережа для обробки часової послідовності кадрів і подальшої класифікації.

В якості вхідних даних використовуються класифіковані відеокліпи однакової тривалості та кількості кадрів. Кожна кадрова послідовність формується з відеофрагментів і є позначеним об'єктом двох класів: 0 - не шопліфтинг, 1 - шопліфтинг. Цей позначений набір кадрових послідовностей є навчальним зразком. Характеристики отримує кожен об'єкт через гібридну нейронну мережу для навчання класифікатора, який потім використовується для класифікації нових об'єктів.

#### IV. ЕКСПЕРИМЕНТИ

Побудуємо алгоритм розв'язування задачі розпізнавання крадіжки як класифікаційної задачі. Можна виділити чотири основних етапи алгоритму.

1) На першому етапі збір даних для подальшого використання в навчанні моделі та тестуванні. У нашому випадку це набір відео із зафіксованими випадками крадіжок з камер спостереження в роздрібних магазинах, створених на основі даних UCF-Stime, взятих із відкритих джерел. Оскільки набір даних є незбалансованим, домінуючий клас був зменшений, тобто деяку кількість зразків, позначених як «не крадіжка», було видалено, щоб кількість відеокліпів у двох класах була рівною.

2) На другому етапі попередньої обробки даних операція виконується за даними: відеоролики розмічені за класами, де клас 1 - випадки з крадіжками, клас 0 - звичайна поведінка клієнтів. Також обробка виконується перед виділенням функцій — зміною розміру зображення до розміру 224x224 пікселів і поділом відео на кадри: оскільки кожен фрагмент відео має тривалість 3 секунди при 10 кадрах/секунду, ми отримуємо послідовності з 30 кадрів.

3) На третьому етапі функції витягуються за допомогою попередньо підготовленої згортової нейронної мережі.

4) Четвертий і завершальний етап є створення, навчання та тестування рекурентної нейронної мережі з шарами вентильних рекурентних вузлів. Тобто ознаки, виділені за допомогою згортової мережі з кожного зображення мічених послідовностей відеокadrів, піддаються навчанням у рекурентній вентильній мережі.

Для досягнення достатньо високої точності класифікатора було проведено багато досліджень та експериментів на практиці, зокрема, вибір методу класифікації відео, пошук набору даних, вибір оптимальної обробки даних, нейронних мереж та їх конфігурації з параметрами. 3 основні експерименти описані нижче.

##### А. Дослід 1.

Для навчання класифікатора використовувався набір даних із 310 зразків, InceptionV3 використовувався як згорточна нейронна мережа, ваги ('imagenet') для якої зберігаються в Keras.

Графік зміни значень точності навчання та перевірки показаний на рисунку 1.

Графік зміни значень тренувальних і тестових (валідаційних) втрат наведено на рисунку 2.

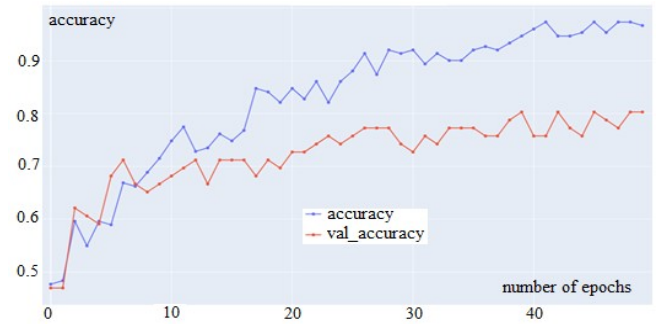


Рис. 1. Графік зміни значень точності навчання (синій) та точності перевірки (червоний)

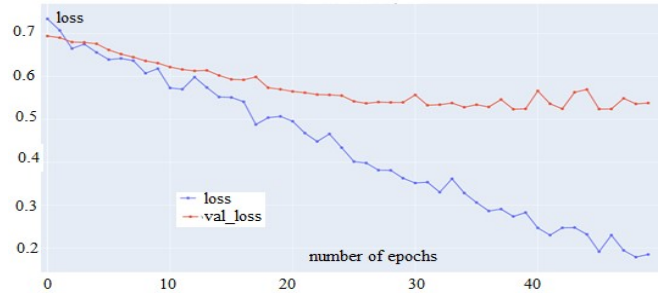


Рис. 2. Графік зміни значень тренувальних (синій) і тестових (червоний) втрат

У табл. 1 наведено значення розрахованих показників точності, запам'ятовування та оцінки F1 для кожного з класів.

TABLE 1. ЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ACCURACY, PRECISION, RECALL TA F1-SCORE ДЛЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ 1

	precision	recall	F1-score	support
не шопліфтинг	0.84	0.68	0.72	44
шопліфтинг	0.75	0.87	0.81	49
accuarcy			0.78	93

Таким чином, точність проведеної класифікації становить 77% і, оскільки вибірка була збалансованою та враховуючи представлені значення метрик, це значення достатньо повно характеризує результат класифікації.

##### Б. Дослід 2

Оскільки для такої нетривіальної задачі, як класифікація дій людини, набір даних дещо малий (всього 310 екземплярів), було вирішено штучно збільшити його: кожен відеофрагмент дзеркально відображався горизонтально, після чого ми отримали 620 екземплярів. Також з кожного з 620 фрагментів відео було сформовано ще дві копії: повернуті на 5 градусів вліво і на 5 градусів вправо. Таким чином ми отримали набір даних із 1860 фрагментів відео.

Для вилучення функцій, як і в попередньому експерименті, використовувався InceptionV3.

Графік зміни значень точності навчання та перевірки показаний на рисунку 3. Графік зміни значень навчальних і тестових (валідаційних) втрат наведено на рисунку 4.

У таблиці 2 наведено значення розрахованих показників метрик щодо кожного з класів.

Таким чином, точність класифікації становить 86% і, завдяки тому, що вибірка була збалансованою та враховуючи представлені значення метрик, це значення досить повно характеризує результат класифікації.

### С. Дослід 3

Для цього експерименту використовувався той самий набір даних, що й у попередньому експерименті. Згорткову нейронну мережу було замінено на MobileNetV3Large.

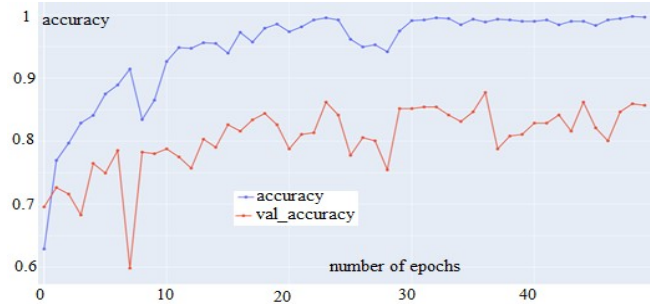


Рис. 3. Графік зміни значень точності навчання (синій) і перевірки (червоний)

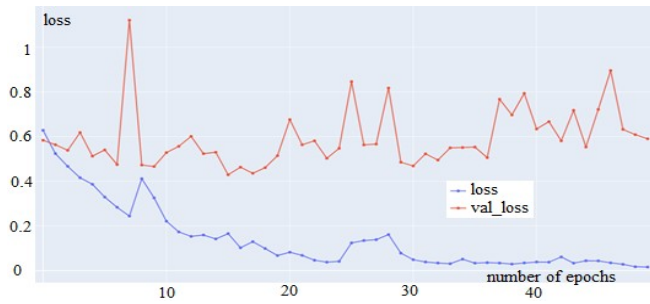


Рис. 4. Графік зміни значень тренувальних і тестових втрат

TABLE II. ЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ACCURACY, PRECISION, RECALL ТА F1-SCORE ДЛЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ 2

	precision	recall	F1-score	support
не шопліфтинг	0.85	0.89	0.87	280
шопліфтинг	0.87	0.84	0.86	279
accuracy			0.87	558

Графік зміни точності навчання та перевірки показаний на малюнку 5

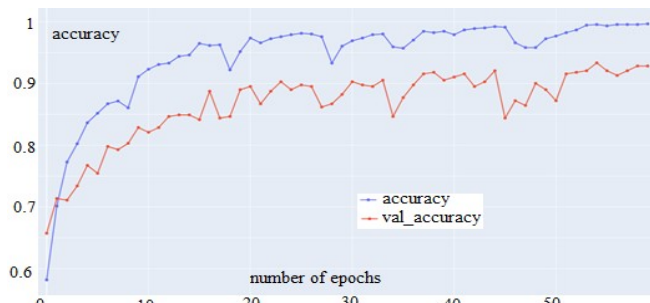


Рис. 5. Графік зміни значень точності навчання та перевірки

Графік зміни значень навчальних і тестових (валідаційних) втрат наведено на рисунку 6.

У таблиці 3 наведено значення розрахованих метрик precision, recall, F1-score по відношенню до кожного з класів.

TABLE III. ЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ACCURACY, PRECISION, RECALL ТА F1-SCORE ДЛЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ 3

	precision	recall	F1-score	support
не шопліфтинг	0.93	0.94	0.94	280
шопліфтинг	0.94	0.93	0.94	278
accuracy			0.94	558

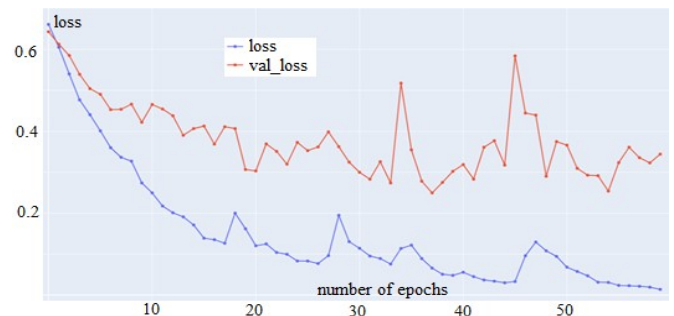


Рис. 6. Діаграма зміни значень навчальних і тестових втрат

Таким чином, точність класифікації становить 93% і, оскільки вибірка була збалансованою та враховуючи представлені значення метрик, це значення достатньо повно характеризує результат класифікації.

Таким чином, третій експеримент дав найкращий результат класифікації.

### ВИСНОВОК

У даній роботі розглянуто проблему класифікації відеоданих з камер відеоспостереження для ідентифікації фрагментів із випадками крадіжок у магазинах. Було запропоновано використовувати класифікатор, який є симбіозом двох нейронних мереж: згорткової та рекурентної. Згорткова нейронна мережа використовувалася для виділення ознак з кожного кадру відеофрагменту, а рекурентна мережа – для обробки тимчасової послідовності оброблених кадрів і подальшої класифікації.

Для навчання класифікатора використовувався набір даних UCF-Crime, який містить відео з випадками крадіжок у магазинах. Оскільки набір даних містить незбалансованість, ми зробили зменшення вибірки переважного класу та штучно розширили набір відеоданих. Експерименти також проводилися з попередньо навченою згортковою нейронною мережею. Для класифікації послідовності відеокліпів використовувалася нейронна мережа з вентильними рекурентними вузлами.

Результати класифікації показали високу точність: 93%, що на кілька відсотків перевищує точність моделей, представлених в огляді наукових досліджень. Також

навчений класифікатор має високу продуктивність, що дозволяє використовувати його в режимі реального часу.

Подальші дослідження будуть зосереджені на практичній реалізації запропонованої моделі в торгових центрах.

#### ПОДЯКА

Подяка спонсору наводиться у нумерованому посиланні на першій сторінці.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] D. S. Chemere, "Real-time Shoplifting Detection from Surveillance Video," Master thesis of Addis Ababa university 2018, 94.
- [2] T. Radivilova, L. Kirichenko, D. Ageyev, M. Tawalbeh, V. Bulakh and P. Zinchenko, "Intrusion Detection Based on Machine Learning Using Fractal Properties of Traffic Realizations," 2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT), 2019, pp. 218-221, doi: 10.1109/ATIT49449.2019.9030452.
- [3] U. J. Gim, J. J., Lee, J. H. Kim., Y. H., Park, and A. Nasridinov. An Automatic Shoplifting Detection from Surveillance Videos (Student Abstract). In Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence, Vol. 34, No. 10, pp. 13795-13796, 2020.
- [4] Kirichenko, L.; Radivilova, T.; Bulakh, V. Machine learning in classification time series with fractal properties. Data 2019, 4(1), 5.
- [5] O. Lemeshko, O. Yeremenko, M. Yevdokymenko and B. Sleiman, "Improvement of the Calculation Model the Set of Disjoint Paths with Maximum Bandwidth," 2019 International Conference on Information and Telecommunication Technologies and Radio Electronics (UkrMiCo), 2019, pp. 1-4, doi: 10.1109/UkrMiCo47782.2019.9165311.
- [6] T. Radivilova, L. Kirichenko, O. Lemeshko, D. Ageyev, O. Mulesa and A. Ilkov, "Analysis of Anomaly Detection and Identification Methods in 5G Traffic," 2021 11th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS), 2021, pp. 1108-1113, doi: 10.1109/IDAACS53288.2021.9660920.
- [7] S. Zaidi, B. Jagadeesh, K. V. Sudheesh and A. A. Audre, "Video Anomaly Detection and Classification for Human Activity Recognition," 2017 International Conference on Current Trends in Computer, Electrical, Electronics and Communication (CTCEEC), 2017, pp. 544-548, doi: 10.1109/CTCEEC.2017.8455012.
- [8] J. Wang, Y. Yang, J. Mao, Z. Huang, C. Huang and W. Xu, "CNNRNN: A Unified Framework for Multi-label Image Classification," 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2016, pp. 2285-2294, doi: 10.1109/CVPR.2016.251.
- [9] C. Dai, X. Liu, H. Xu, L. T. Yang and M. J. Deen, "Hybrid Deep Model for Human Behavior Understanding on Industrial Internet of Video Things," in IEEE Transactions on Industrial Informatics, vol. 18, no. 10, pp. 7000-7008, Oct. 2022, doi: 10.1109/TII.2021.3058276.
- [10] S. Wang, J. Z. Gao, H. Lin, M. Shitole, L. Reza and S. Zhou, "Dynamic Human Behavior Pattern Detection and Classification," 2019 IEEE Fifth International Conference on Big Data Computing Service and Applications (BigDataService), 2019, pp. 159-166, doi: 10.1109/BigDataService.2019.00028.
- [11] J. Li, X. Jiang, T. Sun and K. Xu, "Efficient Violence Detection Using 3D Convolutional Neural Networks," 2019 16th IEEE International Conference on Advanced Video and Signal Based Surveillance (AVSS), 2019, pp. 1-8, doi: 10.1109/AVSS.2019.8909883.
- [12] Md Shofiqul Islam, Shanjida Sultana Uttam, Kumar Roy, Jubayer Al [Online available] URL: [https://www.researchgate.net/publication/348363084\\_A\\_review\\_on\\_Video\\_Classification\\_with\\_Methods\\_Findings\\_Performance\\_Challenges\\_Limitations\\_and\\_Future\\_Work](https://www.researchgate.net/publication/348363084_A_review_on_Video_Classification_with_Methods_Findings_Performance_Challenges_Limitations_and_Future_Work)
- [13] W. Sultani, C. Chen and M. Shah, "Real-World Anomaly Detection in Surveillance Videos," 2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2018, pp. 6479-6488, doi: 10.1109/CVPR.2018.00678.
- [14] UCF-Crime Dataset. [Online available] URL: <https://www.v7labs.com/open-datasets/ucf-crime-dataset>
- [15] Learning, Deep. "Recurrent Neural Networks in Python: LSTM." GRU, and more RNN machine learning architectures in Python and Theano (2016).
- [16] X. Wang, "Improving Bag-of-Deep-Visual-Words Model via Combining Deep Features With Feature Difference Vectors," in IEEE Access, vol. 10, pp. 35824-35834, 2022, doi: 10.1109/ACCESS.2022.3163256.
- [17] X. Wang et al., "Robust Unsupervised Video Anomaly Detection by Multipath Frame Prediction," in IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, vol. 33, no. 6, pp. 2301-2312, June 2022, doi: 10.1109/TNNLS.2021.3083152



# Графи в розв'язанні фізичних задач

Олександр Шамшин  
кафедра фундаментальних дисциплін  
Національна академія Національної Гвардії України  
Харків, Україна  
apshamshin@gmail.com

## Graphs in solving physical problems

Oleksandr Shamshin  
Department of Fundamental Disciplines  
National Academy of the National Guard of Ukraine  
Kharkiv, Ukraine  
apshamshin@gmail.com

**Анотація**—Показано побудову та використання графа фізичної задачі, можливість узагальнення рішення задач по подібним графам шляхом нарощування циклів, проведення автоматичного рішення задач шляхом динамічних вузлів - вершин графу

**Abstract**—Shows the construction and use of a graph of a physical problem, the possibility of generalizing the solution of problems on similar graphs by increasing cycles, performing automatic problem solving by means of dynamic nodes - vertex's of the graph

**Ключові слова**—граф задачі з фізики, розв'язок фізичних задач, задача з фізики, автоматичне розв'язання задач, метод графів

**Keywords**—graph of physics problems, solution of physics problems, physics problem, automatic problem solving, graph method

### I. ВСТУП

Цифрова педагогіка потребує удосконаленої методичної системи комп'ютерного навчання. Знання мають практичну цінність, якщо студент може їх використовувати і має здатність і навички застосовувати отримані знання, наприклад, при вирішенні задач з фізики. Придбання навичок вирішення задач сприяє розумовому розвитку, формує організацію розумових операцій та навичок, розвиває творче мислення, формує фізичну картину світу, явищ та закономірностей, що пояснюють ці явища. Вирішення задач з фізики формує та розвиває такі особистісні якості, як цілеспрямованість, наполегливість, допитливість – інтерес до наук, математичні та фізичні здібності.

### II. АНАЛІЗ СТАНУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ГРАФІВ

Обговорення використання ІКТ для розв'язання фізичних задач висвітлювалося у численних публікаціях вітчизняних і зарубіжних дослідників. Програми для вирішення задач з фізики умовно можна розділити на три типи. 1) Онлайн програми, додатки для смартфонів з набором формул - Мобільна фізика, Physica, Physics Helper+ і т.п. Це радше довідники з фізики, ніж вирішувачі задач. 2) Фізичний калькулятор, призначений для математичного розрахунку бажаної величини з урахуванням вхідних змінних. Наприклад, Фізичний калькулятор Vuju's, OMNI' calculator та Physics 101 SE містять понад 150 рівнянь із 23 розділів фізики. Програма допомагає студентам інтегрувати основні поняття. Наприклад, яку відстань проходить об'єкт за заданий інтервал у рівномірно прискореному русі із заданими початковою швидкістю та прискоренням. Звичайний калькулятор може робити те, що робить так званий фізичний калькулятор, якщо відомі відповідні формули. Якщо не цікавить фізика процесу, але потрібно щось швидко обчислити, то знадобиться фізичний калькулятор. Цей розділ містить ряд програм та систем комп'ютерної алгебри, таких як MathLab, Mathematica, Maple та MathCad, які використовуються як багатогранні калькулятори. 3) Програми, які використовують елементи штучного інтелекту.

Аналіз великого різноманіття програмних засобів розв'язання фізичних задач показує, що деякі програми потребують попереднього проведення програмування задачі і скоріш за все доцільні на заняттях з інформатики. Це притаманно програмним розробкам етапу програмуваного та автоматизованого навчання. В період електронного навчання 1990 – 2012 рр. з'являються експертні навчальні системи (ЕНС), які за основи

розв'язання задач приймають різні форми самонавчання та самоконтролю, коли кожний крок розв'язання супроводжуються підказками, системою контролю та оцінювання дій студента, можливістю повернення до початкового кроку та зміни складності задачі, адаптації системи до рівня знань та умінь студента. Але у навчальному процесі з фізики ці системи не здобули широкого розповсюдження і зазвичай зазнають обмеженого використання в університетах – розробниках ЕНС. Цифрова педагогіка виникає у відповідь на необхідність побудови цифрового освітнього процесу, викликаного появою цифрового покоління, має властиві лише йому соціально-психологічні характеристики; відбувається формування та розвиток нових цифрових технологій у комп'ютерній екосистемі. Сьогодні характеризується широким використанням засобів штучного інтелекту. З'являються програми – розв'язувальники, що знаходять рішення задачі фотографуючи її та видають покроковий хід рішення з поясненнями для кожного кроку, формули, положення розв'язання. Прикладами таких програм в математиці є PhotoMath, Mathway, Maple Calculator, Cymath, Microsoft MathSolver, SnapCalc – фото-калькулятори, «у яких функція покрокового рішення допоможе швидко навчитися самому вирішувати математичні задачі». Є можливість ручного введення математичних рівнянь, систем рівнянь, диференціювання, інтегрування та багато інших можливостей. Аналогічних фізичних розв'язувальників значно менше, можна назвати PhyWiz та Vetaphysics – подібно математичним фото-калькуляторам ці дві програми дозволяють розв'язати покроково задачі, «в процесі їх використання в учасників учбового процесу формується інформаційно-цифрова компетентність». Два речення взяти в лапки тому, що це є цитати, які насправді відображають неосягнутого психолого-педагогічну проблему з якою зіштовхнулася система освіти в цифровій педагогіці – проблема використання штучного інтелекту, вмотивованості навчання, прикладання зусиль для подолання складнощів, що виникають при розв'язанні фізичних задач, необхідності використання нових методів проведення занять, подачі учбового матеріалу та традиційної, часто застарілої, системи навчання. Ще одна проблема пов'язана з контролем виконання задач. Коли викладач перевіряє задачі, розв'язані штучним інтелектом, то виникає цілком слушне питання: кому, за що і яку оцінку він ставить. Особливо гостро це питання постає при дистанційному навчанні. Тому потрібна така система проведення практичних занять, яка б дозволяла проводити онлайн контроль за виконанням задач. Програми прокторінгу не завжди корисні для поточного контролю, та часто потребують участі адміністратора — проктора, який стежить за діями екзаменованого за допомогою веб-камери і бачить, що відбувається на моніторі комп'ютера. Не всі програми прокторінгу дозволяють завантаження на смартфони.

Аналіз використання комп'ютера під час розв'язування різних типів задач шляхом запису початкових умов, перетворення даних у СІ та рішення таким чином, щоб студенти могли самостійно проводити розв'язування задач в звичній формі і послідовності дій, проводячи виведення розрахункової формули, підстановку даних, символічне

перетворення формул, чисельний розрахунок та перевірка розмірності, свідчить про відсутність такої програми. Розробка та використання таких програм є актуальним завданням на сучасному етапі розвитку викладання фізики у закладах вищої освіти.

Графове моделювання використовується для дослідження структурованих об'єктів як один із напрямків математичного моделювання. При цьому виконуються умови взаємної певної відповідності елементів моделі та об'єктів. Теорія графів також використовується в молекулярній фізиці. У фізиці конденсованого стану тривимірна структура з модельованих атомних структур може бути кількісно досліджена шляхом збору статистичних даних про теоретичні властивості графа, пов'язаного з атомною топологією. У статистичній фізиці графи можуть відображати локальні зв'язки між взаємодіючими частинами системи та динаміку фізичних процесів у таких системах.

Теорія графів дозволяє поєднати статистичну механіку та теорію вузлів. Існує також метод, званий вірусним розширенням, вивчення взаємодіючих газів. Цей метод вимагає багаторазових ітераційних інтегрувань за кількістю частинок обчислення функції розподілу. Оскільки інтеграл повинен враховувати взаємодії між кожною часткою, комбінаторика описує їх усі. Щоб полегшити проблему, можливо використовувати графи, в яких вершини представляють функції, а ребра є інтегралами. Тоді доволі легко розглянути перестановки графа та застосувати теорію графів. Віріальне розширення — це лише один із прикладів «теорії збурень». Тобто розкладання, що спостерігається, упорядковано за ступенями малих параметрів. Для кожного розкладу відображається багато якісно різних термінів, а графи (діаграми) дозволяють відстежувати різні терміни. Діаграма Фейнмана у QFT використовують ту саму ідею. У фізиці конденсованого стану шляхи у відносинах граф/суміжність можуть описувати простір станів деяких моделей. Теорія графів не є широко поширеною в фізиці. Графи часто використовуються як організуючий принцип. Тобто замість того, щоб писати довгі та стомлюючі формули, будується відповідні об'єкти у вигляді графів і точно запам'ятовується, що означає граф. Так само оператор композиції можна записати як граф. Існує також досить складний клас теорій під назвою «Теорія калчанових калібрів», які дуже складно пояснити математичними формулами, але фахівці можуть зрозуміти всі їхні аспекти, просто написавши невелику діаграму. Однак на глибших рівнях між теорією графів та фізикою мало взаємодій. Фундаментальні теореми теорії графів практично не зустрічається у фізичній літературі, однак два роки тому С. Вольфрам запропонував [1] суттєво новий підхід до використання графів в сучасній фізиці, при якому теорія графів стає альтернативою теорію струн. Від простого двомірного графа шляхом додавання нових елементів в двомірну сітку ребер графа можна перейти до побудови тримірних поверхонь за допомогою складних графів. Простір можна уявити як сітку, яка в такий спосіб пов'язує воедино ряд вузлів.

### III. ПРОПОНУЄМИЙ МЕТОД ВИКОРИСТАННЯ ГРАФІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ

У роботі розглядається побудова графа фізичної задачі, який складається із двох видів циклів, що описують функціональні зв'язки фізичних величин і співвідношення між ними.

Аналогічно MathGraph, ми використовуємо SymPy для перетворення шуканого вираження на математичне рівняння зі змінними, а для виконання обчислень ми використовуємо деякі основні правила пріоритету для отримання результатів. Ми можемо знайти дальність польоту кулі, випущеної під кутом до горизонту, знаючи початкову швидкість та кут вильоту. Однак, оскільки час польоту невідомий, ми обчислюємо час як перший крок, використовуючи дані задачі та величину прискорення вільного падіння. Цей процес зображує процес розумової діяльності людини у пошуках розв'язання задачі з деякими вхідними даними та відповідними виразами. Додавання або видалення циклів дозволяє масштабувати розв'язок задачі у випадку зміни умови. Застосування запропонованого графового методу дозволяє підвищити ефективність навчання за рахунок удосконалення змістовної частини структури розв'язку, у якій чітко видні методи розв'язку, завдяки використанню єдиної матриці суміжності графа для функціональних і реляційних зв'язків фізичних величин і побудові шляху графа, який, по суті, є послідовним записом рівнянь, необхідних для знаходження шуканої величини.

Як приклад, розглянемо граф для задачі знаходження середньої швидкості за відомими часами руху та швидкостями на двох ділянках - Рис.1. Можна побачити, що мається два виду циклів: 1) що містить операції додавання та віднімання (ребра таких циклів мають сірий колір), 2) містить множення та ділення. Розв'язок задачі зводиться до знаходження незалежних шляхів графу між вершинами даних та шуканої величини. Складності рішення задачі пов'язані з неоднозначностями вибору

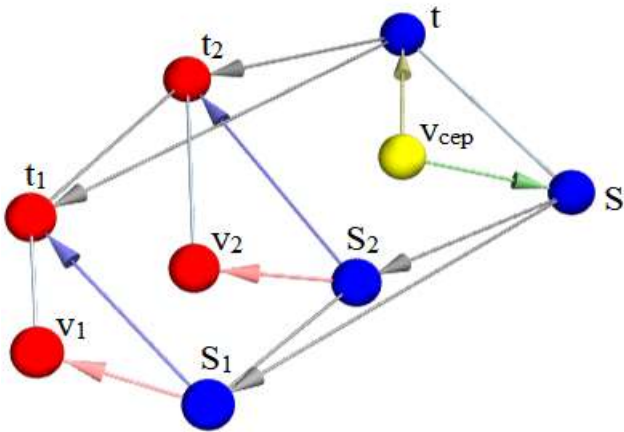


Рис. 1. Приклад графу задачі 1.1 з [2]. Червоні вершини – задані в умові задачі величини, сині – невідомі, жовта - шукана середня швидкість

можливих шляхів, відомих як незалежні шляхи або непересічні шляхи вершин. У випадку розглядання трохи складнішої задачі, коли додається додатковий цикл  $S_3$ -  $v_3$  –  $t_3$ , граф масштабується додаванням відповідного циклу –

Рис. 2. Все різноманіття задач на середню швидкість зводиться до графа Рис. 2, з відповідним забарвленням вершин та можливим подальшим його масштабуванням. Можливо це є один з тих випадків застосування графів, про

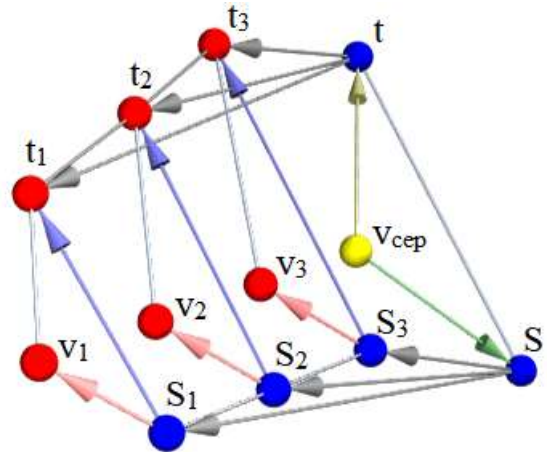


Рис. 2. Приклад графу задачі на знаходження середньої швидкості. Позначення відповідають Рис. 1.

які говорить С. Вольфрам [1], коли стверджує, що «створення графоподібних моделей безлічі можливих всесвітів відповідно до правил, що визначають розвиток моделі. У міру того, як графи стають складнішими — справді складнішими — вони породжують феномени, гідні вивчення власними силами. Якщо правила правильні, у них можна «відкрити» справжню фізику, що керує нашим Всесвітом, — все, від  $E = mc^2$  до закону гравітації».

Більш складний граф, показаний на Рис. 3., відповідає випадку, коли над вершинами графа розташовані формули для знаходження величин, шуканих у задачі, в яких динамічні кнопки вибору у формі списку пофарбовані в залежності від того, чи є ця літера, змінна, константа відома величина, то колір бірюзовий, невідома – жовтий. При натисканні на кнопки невідомих величин відкриваються списки вибору з набору формул. Наприклад, натискаючи на кнопку магнітної індукції  $B$  на лугому кроці рішення з'явиться список відомих формул для магнітної індукції поля прямого, кругового струму, провідника кінцевої довжини і т.п. Результат вибору показаний знизу основної лінії графу. Подібний підхід використовується при розробці програми автоматичного розв'язання задач – APS [3].

### IV. ВИСНОВКИ

В роботі проаналізовано тенденції щодо використання графів у розв'язанні фізичних задач. Показано приклади побудови графів, в вершинах яких містяться динамічні кнопки вибору зі списку, для покрокового рішення задачі.

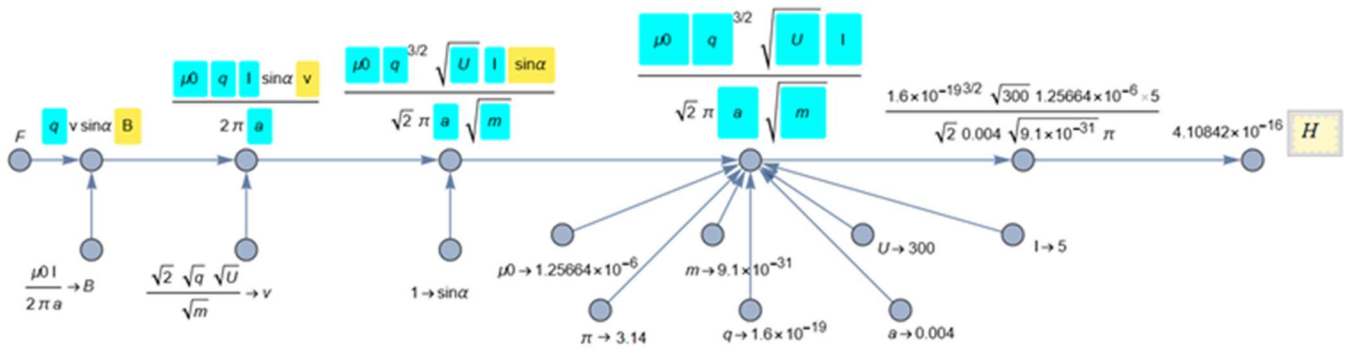


Рис. 3. Приклад графу задачі 1.1.70 з [2].

При цьому використовується або граф задачі, або граф, що будується на кожному кроці розв'язання. Використання запропонованого методу графів для розв'язання фізичних задач дає можливість звести когнітивну складову комп'ютерного рішення до відповідної складової розумової діяльності. Шляхом налаштування програми можливо здійснювати контроль за розв'язанням у випадку дистанційного проведення занять.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] S. Wolfram. (2020). The Wolfram Physics Project [Online]. Available: <https://wolframphysics.org/>
- [2] В. С. Волькенштейн, Сборник задач по общему курсу физики; М.: Наука, 1985.— 384 с.
- [3] A. Shamshin, Development and use of the program of automatic problem solving when conducting practical classes in physics at the university, (2021) ScienceRise: Pedagogical Education: No. 5(45)

# Recognition Of Computed Tomography Images Using Neural Networks For The Differential Diagnosis Of Malignant Lung Tumors And Coronavirus Pneumonia

Olexandr Shpak  
Faculty of Information  
Technologies  
Department of software system  
Uzhhorod National University  
Uzhhorod, Ukraine  
shpak@uzhnu.edu.ua

Kukri-Lavkai Andriana  
Department of radiology  
Transcarpathian Cancer Center  
Uzhhorod, Ukraine  
lavkajandriana@gmail.com

Evelina Khoma  
Faculty of Medicine  
Department of Oncology  
Uzhhorod National University  
Uzhhorod, Ukraine  
evelina.khoma@uzhnu.edu.ua

Mykola Starosta  
Faculty of Information  
Technologies  
Department of software system  
Uzhhorod National University  
Uzhhorod, Ukraine  
starosta.mykola@student.uzhnu.  
edu.ua

**Abstract**— Neural networks can be used in almost all directions and spheres of human activity, in particularly in economy, medicine, in the spheres of communication and informatization, in security systems, in the processing of large arrays of information, robotics, concepts of "smart house" and "smart city". In medicine neural networks are most often used to diagnose diseases.

**Keywords**—*computed tomography (CT), neural networks, lung, COVID-19, Coronavirus*

## INTRODUCTION

Digital medical images make it possible to conduct an in-depth study of the human body, study its functioning, and diagnose possible diseases at the early stages of their development.

Computed tomography (CT) images of lungs have recently received special attention among digital medical images [1].

This is related to the prevention of cancer, as well as for the diagnosis of coronavirus or viral pneumonia.

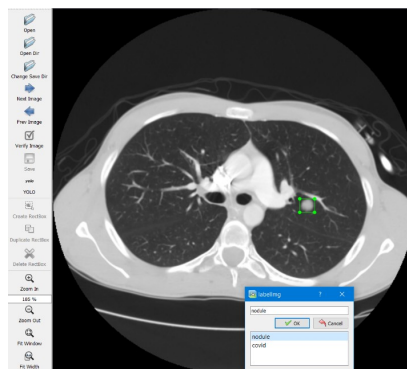
The aim of the research was to recognize CT images for the differential diagnosis of lung cancer and lung disease caused by coronavirus (SARS-CoV-2) using neural networks.

## THE RESULTS

In our work the Google Collaboratory cloud service and the darknet framework were used for research in the spheres of machine and in-depth study.

Due to the fact that Tensorflow [2] and almost all necessary for the work libraries for the Python have been installed in the Collaboratory, this allowed us to optimize the research process and focus on diagnosis.

The training sample was created manually, as shown in fig.1.



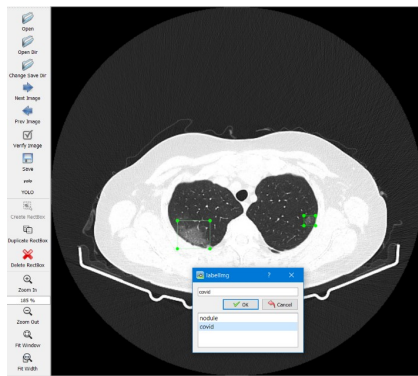


Fig. 1. Marking of tumors and infection with the COVID-19 virus on CT images

In order to do this a dozen doctors analyzed patient's images and highlighted suspicious areas in the lungs with markers.

This is the method due to which the initial training sample for the neural network was created.

The quality of image training depends on the marking accuracy of the input images and the number of images analyzed that reaches over 14,000.

The process and results of model training are shown in fig. 2.

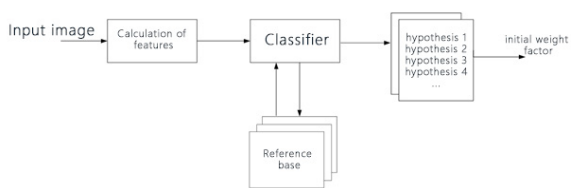


Fig. 2. Structural diagram of the model training algorithm

On the basis of the training sample and multiple trainings of the model, recognition of CT images and detection of pathological formations and their differentiation were carried out.

The results (fig. 3) showed a fairly high accuracy of recognition of pathological formations (within 78%), which indicates the perspective of this direction of research for use in the differential diagnosis of lung diseases

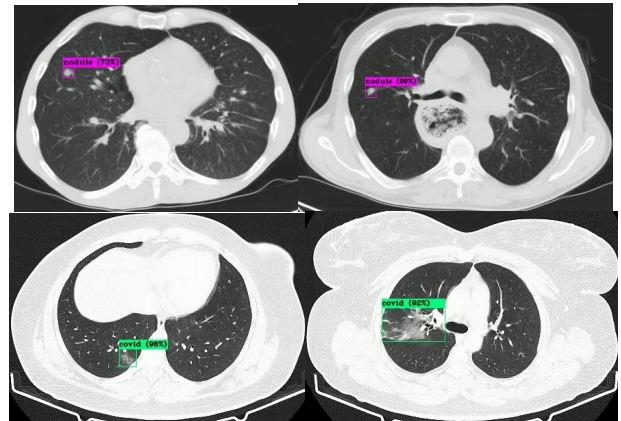


Fig. 3. The results of research

### CONCLUSIONS

The research showed an advantage in solving the problems with unknown regularities.

Using the ability to learn and generalize, the proposed approach makes it possible to carry out the most accurate differential diagnosis of oncological diseases of the lungs and their damage by the coronavirus (SARS-CoV-2) based on computer tomography and to automate the process, which will help the work of radiologists and doctors of functional diagnosis.

### REFERENCES

- [1] 1. Firmino et al. Computer-Aided Detection System for Lung Cancer in Computed Tomography Scans: Review and Future Prospects // B ioMedical Engineering, 2014, 13(41).
- [2] 2. M. Abadi, A. Agarwal et al., Tensorflow: Large-scale machine learning on heterogeneous distributed systems // arXiv:1603.04467, 2016.

# Система розпізнавання людської постанти для профілактики захворювань опорно-рухового апарату

Юрій Шпакович

Кафедра комп'ютерних наук та інформаційних систем  
Прикарпатський національний університет  
Івано-Франківськ, Україна  
yurii.shpakovych.22@pnu.edu.ua

Марія Семаньків

Кафедра комп'ютерних наук та інформаційних систем  
Прикарпатський національний університет  
Івано-Франківськ, Україна

## The human posture recognition system for the prevention of the musculoskeletal system diseases

Yurii Shpakovych

dept. of Computer Sciences and Information Systems  
Precarpathian National University  
Ivano-Frankovsk, Ukraine  
yurii.shpakovych.22@pnu.edu.ua

Maria Semankiv

dept. of Computer Sciences and Information Systems  
Precarpathian National University  
Ivano-Frankovsk, Ukraine

**Анотація**—В роботі визначено актуальність розробки системи розпізнавання людської постанти для профілактики захворювань опорно-рухового апарату. Проаналізовані причини виникнення захворювань хребта. Вказано переваги системи у порівнянні з існуючими рішеннями.

**Abstract**—The work develops a system of human posture recognition for the prevention of diseases in the musculoskeletal system. The causes of spine diseases are analyzed. The advantages of the developed system in comparison with existing solutions are described.

**Ключові слова**—людська постава, система розпізнавання, машинне навчання, профілактика захворювань хребта.

**Keywords**—human posture, recognition system, machine learning, prevention of spine diseases.

### I. ВСТУП

Біль у спині є однією з найпоширеніших причини, через які люди звертаються до лікаря або пропускають дні на роботі. Навіть у дітей шкільного віку може боліти спина. Робота за столом цілий день, особливо через неправильну поставу або сидіння в кріслі з недостатньою опорою для спини, є однією з основних причин виникнення болу та як результат розвитку хронічних захворювань опорно-рухового апарату людини [1]. Вражає вигляд «Емми» — хворобливої колеги з майбутнього, манекену у натуральну величину, створений, щоб показати, як неправильне

сидіння цілий день за ергономічно незручним столом може вплинути на працівників. Це застерезливе бачення було створено дослідниками після інтерв'ю з більш ніж 3000 співробітниками про їхні проблеми зі здоров'ям і занепокоєння [2]. Сидіння перед комп'ютером в офісі годинами поспіль означає, що ваше тулуб витягнуто перед стегнами, а не складено прямо та вирівняно, що спричиняє вигинання спини [3]. Це визначає актуальність розробки системи, головною метою якої буде профілактика захворювань хребта за допомогою навчання людини правильної організації робочого місця, безперервному контролю та моніторингу постанти людини протягом роботи.

### II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Штучний інтелект (AI) і машинне навчання (ML) широко використовуються в багатьох додатках, таких як моніторинг параметрів навколишнього середовища, моніторинг і контроль промислових ситуацій, інтелектуальний транспорт, моніторинг стану конструкцій, охорона здоров'я тощо. Розвиток електроніки, вбудованого управління, інтелектуального зондування, мережових технологій та зв'язку дозволив розробити недорогі інтелектуальні системи. Хоча це розумні системи, їх обчислювальні можливості мінімальні, а отже, вони вважаються обчислювальними пристроями з обмеженими ресурсами (наприклад, мобільні телефони, смарт-

годинники та міні-електронні гаджети). Завданням роботи є розробка системи, яка складатиметься з моніторингової частини (веб-камера) та крос-платформного додатка, який в свою чергу, міститиме декілька модулів: модуль навчання користувача, модуль навчання системи, модуль моніторингу постави та модуль сигналізації відхилення від нормального положення. На відміну від існуючих рішень, система буде не тільки контролювати, але і навчати людину правильній ергономіці та організації робочого місця, буде крос-платформною, проводитиме самонавчання та не потребує додаткового часу або обладнання.

### III. РЕАЛІЗАЦІЯ СИСТЕМИ РОЗПІЗНАВАННЯ

Модуль навчання - це набір кращих рекомендацій стосовно організації робочого місця при роботі з ПК, за допомогою якого людина може навчитися правильній організації робочого місця. Модуль навчання системи - це алгоритм, за допомогою якого система запам'ятає основні точки правильної постави конкретної людини, виконаний з використанням бібліотеки машинного навчання, яка розпізнаватиме та запам'ятовуватиме позу людини в момент її найкращого положення, згідно рекомендацій з першого модуля. Модуль моніторингу використовує відеосигнал з вебкамери та за допомогою алгоритму з модулю навчання [4, 5], контролюватиме відповідність постави її початковому положенню. В момент відхилення постави при тривалій праці за комп'ютером, система повідомлятиме користувача відповідним сигналом.

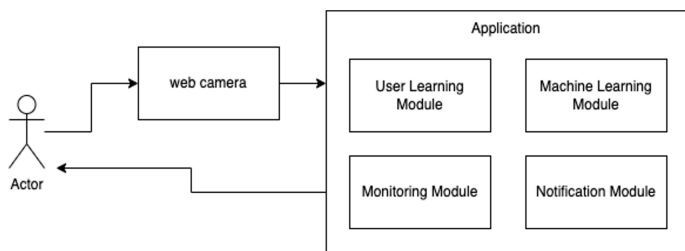


Рис. 3. Опис системи.

Алгоритм модулю навчання пропонується реалізувати на основі використання найсучасніших моделей визначення пози в реальному часі виконаних за допомогою бібліотеки TensorFlow.js. На даний момент є 3 варіанти моделей: MoveNet, BlazePose, PoseNet. MoveNet— це надшвидка та

точна модель, яка визначає 17 ключових точок тіла. Вона може працювати зі швидкістю 50+ кадрів в секунду на сучасних ноутбуках і телефонах. MediaPipe BlazePose може виявляти 33 ключові точки, крім 17 ключових точок COCO, вона надає додаткові ключові точки для обличчя, рук і ніг. PoseNet може виявляти кілька поз, кожна поза містить 17 ключових точок. [4, 5]. Ця бібліотека дозволяє застосовувати методи штучного інтелекту в браузері або обчислювальних пристроях з обмеженими ресурсами та має існуючі моделі для виконання аналізу ходи людини з використанням методів машинного навчання в браузері. Окрім цього, за допомогою програмних засобів TensorFlow.js розробники/користувачі можуть використовувати AI, не надсилаючи свою інформацію через систему, яка потенційно робить її доступною для сторонніх осіб. Ці інструменти спрощують розробку безпечних додатків, які відповідають основним принципам інформаційної безпеки, таких як додатки для охорони здоров'я, які зчитують дані з клінічних датчиків, що носяться. Інструменти також роблять можливим розширення програм AI, що дозволяє модернізувати їх при цьому захищаючи поведінку/інформацію користувача.

### ВИСНОВОК

Таким чином, спеціалізована система розпізнавання постави людини, що розробляється, допоможе запобігти розвитку захворювань опорно-рухливого апарату людини, завдячить виникненню болю в спині при довготривалій роботі за комп'ютером. Система покращить організацію робочого місця, що сприятиме підвищенню ефективності робочого процесу людей, що проводять багато часу сидячи.

### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Low Back Pain / National Institutes of Health Department of Health and Human Services Bethesda, Maryland. – 2020. – С. 6-7.
- [2] From Text Claw to Tech Neck: How Technology Affects Our Bodies [Online]. Available: <https://tollfreeforwarding.com/blog/from-text-claw-to-tech-neck-how-technology-affects-our-bodies/>
- [3] Pose Detection [Online]. Available: <https://github.com/tensorflow/tfjs-models/tree/master/pose-detection>
- [4] Gant Laborde. Learning TensorFlow.js / O'Reilly Media, Inc., – 2021. – 340 p.
- [5] Nagender Kumar Suryadevara. Beginning Machine Learning in the Browser: Quick-start Guide to Gait Analysis with JavaScript and TensorFlow.js / School of Computer and Information Sciences, University of Hyderabad, Hyderabad, Telangana, India., – 2021. – 193 p.



# Розпізнавання емоцій за допомогою нейронного класифікатора

Катерина Ювченко  
Кафедра Прикладної математики,  
Харківський національний університет радіоелектроніки,  
Харків, Україна  
kateryna.iuvchenko@nure.ua

Валентин Єсілевський  
Кафедра Прикладної математики  
Харківський національний університет радіоелектроніки,  
Харків, Україна  
valentyn.yesilevskyi@nure.ua

Олена Серєда  
Кафедра Прикладної математики,  
Харківський національний університет радіоелектроніки,  
Харків, Україна  
olena.sereda@nure.ua

## Emotion recognition using a neural classifier

Kateryna Yuvchenko  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
kateryna.iuvchenko@nure.ua

Valentyn Yesilevskyi  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
valentyn.yesilevskyi@nure.ua

Olena Sereda  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
olena.sereda@nure.ua

**Анотація**—Технології для розпізнавання людських емоцій, використовуються фірмами для поліпшення обслуговування клієнтів, прийняття рішення про співбесіду з кандидатами та оптимізацію емоційного впливу реклами. Тому метою роботи є знаходження та оптимізація найбільш задовільного з точки зору точності алгоритму класифікації емоцій людини за зображенням обличчя.

**Abstract**—Technologies for recognizing companies to improve customer service use human emotions make decisions about interviewing candidates and optimize the emotional impact of advertising. Therefore, the purpose of the work is to find and optimize the most satisfactory in terms of accuracy algorithm for classifying human emotions based on facial images.

**Ключові слова**—виявлення об'єктів; класифікація об'єктів; навчання з учителем; розпізнавання емоцій

**Keywords**—object detection; classification of object; supervised learning; recognition of emotions

### I. ВСТУП

Емоція – це особливий вид психічних процесів, які виражають переживання людиною його ставлення до навколишнього світу і себе. Вони можуть бути виражені різними способами: мімікою, позою, руховими реакціями, голосом. Проте найбільшу виразність має обличчя людини. Технології для розпізнавання людських емоцій, використовуються фірмами для поліпшення обслуговування клієнтів, прийняття рішення про співбесіду з кандидатами та оптимізацію емоційного впливу реклами.

Використовуючи розпізнавання емоцій обличчя, підприємства можуть обробляти зображення та відео в режимі реального часу для моніторингу відеопотоків або автоматизації відеоаналітики, тим самим знижуючи витрати та роблячи життя своїх користувачів кращим.

Розпізнавання емоцій людини на зображенні зі складною фоновою структурою є першою та основною проблемою при вирішенні задачі розпізнавання емоцій.

Розпізнавання обличчя досі залишається складною проблемою через різноманітність поз голови та налаштування фону. Люди завжди намагаються приховати або навіть фальсифікувати їхній справжній вираз обличчя. Величезні проблеми в розпізнаванні виразів обличчя – це пошук і розуміння виразу обличчя. За останні кілька років наука досягла достатнього прогресу, аби такі завдання можна було виконати за допомогою комп'ютерного зору, такі як виявлення орієнтирів, моделювання об'єктів і багато іншого.

Основною метою розпізнавання емоцій є ідентифікація емоційних станів людини на основі зображення обличчя. Архітектури глибокої згорткової нейронної мережі (DCNN) зробили ряд проривів у задачах класифікації зображень [1, 2]. З поглибленням мережі, коли вхідна інформація (або градієнт від зворотного поширення) проходить через багато шарів, вона може зникнути до того часу, коли досягне кінця мережі. Для вирішення цієї проблеми було запропоновано кілька архітектур DCNN. Highway Networks [3], ResNet (Residual Neural Network) [4] і DenseNet 169 обходять сигнал від одного рівня до іншого, ідентифікуючи проміжні з'єднання між шарами. FractalNets [5] багаторазово поєднує кілька паралельних послідовностей з різною кількістю блоків згортки, щоб отримати велику номінальну глибину, зберігаючи багато коротких шляхів у мережі. Хоча ці методи відрізняються з точки зору архітектури мережі та стратегії навчання, усі вони мають ключову характеристику: створення коротких шляхів від більш ранніх шарів до пізніших. Модель DenseNet 169 має трохи вищу загальну точність, ніж моделі ResNet та FractalNets. Саме вона буде використовуватися в даній роботі.

## II. АЛГОРИТМ

Програма для розв'язання задач розпізнавання людських емоцій реалізована на мові програмування Python. Код в повному об'ємі написаний в одному інтерактивному web-блокноті з середою виконання на основі тензорних процесорів Google на платформі Kaggle.

Дана програма класифікує зображення обличчя людини за сьома різними емоційними станами: щастя, нейтральність, смуток, гнів, здивування, огида, страх.

Тобто метою даної програми є побудова та навчання класифікатора, який, з деякою ймовірністю, говорив би нам, яка емоція людини зображена на фото.

Побудуємо алгоритм розв'язання задачі розпізнавання емоцій людини за зображенням обличчя.

На першому етапі збирається набір даних для навчання та тестування класифікатора. В нашому випадку використовується FER2013 (Facial Expression Recognition 2013 Dataset) [6]. Датасет містить 35 685 прикладів зображень обличчя у шкалі сірого розміром 48x48 пікселів, розділених на набори для тренування та тестування. Зображення класифікуються на основі емоцій, що виявляються у виразах обличчя (щастя, нейтральність, смуток, гнів, здивування, огида, страх).

На другому етапі проводиться робота над даними, тобто розбиття набору даних на тренувальну, валідаційну та тестувальну вибірки, а також попередня обробка самих зображень: приведення до однакового розміру (48x48 пікселів) і кольорової моделі (RGB).

На третьому етапі будуємо модель нейронної мережі. Спочатку використовуємо попередньо навчену на ImageNet датасеті DenseNet169 для вилучення ознак. Далі

створюємо класифікатор, набір шарів якого зображено на рисунку 1. Навчаємо модель на раніше підготовленому тренувальному наборі з наступними параметрами: оптимізація – стохастичний градієнтний спуск, функція втрат – перехресна ентропія та метрика – асигасу (для оцінки якості роботи класифікатора). Також задля підвищення точності моделі, використовуємо один із методів трансферного навчання – Fine Tuning («донавчання», «тонка настройка»). Після всіх навчальних процесів за допомогою відповідних метрик оцінюємо якість роботи моделі.

```
def classifier(inputs):
    x = tf.keras.layers.GlobalAveragePooling2D()(inputs)
    x = tf.keras.layers.Dense(256, activation="relu", kernel_regularizer = tf.keras.regularizers.L2(0.01))(x)
    x = tf.keras.layers.Dropout(0.3)(x)
    x = tf.keras.layers.Dense(1024, activation="relu", kernel_regularizer = tf.keras.regularizers.L2(0.01))(x)
    x = tf.keras.layers.Dropout(0.5)(x)
    x = tf.keras.layers.Dense(512, activation="relu", kernel_regularizer = tf.keras.regularizers.L2(0.01))(x)
    x = tf.keras.layers.Dropout(0.5)(x)
    x = tf.keras.layers.Dense(NUM_CLASSES, activation="softmax", name="classification")(x)
    return x
```

Рис.1. Програмна реалізація класифікатора зображень.

У результаті роботи даного алгоритму буде побудована модель, яка з високою точністю зможе розпізнавати емоції людини.

## III. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Програма для розв'язання задач розпізнавання людських емоцій реалізована на мові програмування Python. Код в повному об'ємі написаний в одному інтерактивному web-блокноті з середою виконання на основі тензорних процесорів Google на платформі Kaggle.

Дана програма класифікує зображення обличчя людини за сьома різними емоційними станами: щастя, нейтральність, смуток, гнів, здивування, огида, страх.

Тобто метою даної програми є побудова та навчання класифікатора, який, з деякою ймовірністю, говорив би нам, яка емоція людини зображена на фото.

Для тренування класифікатора використали набір даних FER2013. Завантажили в середу виконання та провели попередню обробку зображень та згенерували тренувальний та тестовий набори. Підібрали оптимальні параметри, такі як кількість епох навчання – 30, кількість епох файн тюнінгу – 20, стандартний розмір зображення – 48x48 пікселів та розмір батчу (кількість об'єктів в одній ітерації) – 64. Провели аналіз тренувальної вибірки на розподілення по класам, візуалізація графіку наведена на рисунку 2.

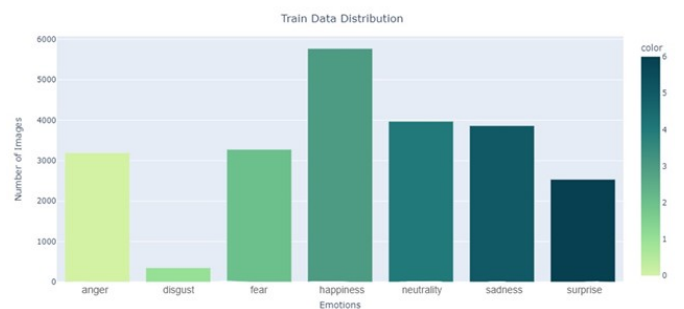


Рис. 2. Розподіл зображень тренувальної вибірки по класам.

Далі у програмі, на основі попередньо навченої нейронної мережі DenseNet169, отримали модель для вилучення ознак. Побудували класифікатор з щільно зв'язаними шарами. Для підвищення точності роботи

моделі та зниження ймовірності перенавчання, використали метод Fine Tuning. Після закінчення тренування моделі, оцінили якість класифікації на тестувальній вибірці.

Ми використовували бібліотеки Pandas для роботи з даними, NumPy для матричних обчислень, Matplotlib та Plotly для візуалізації, scikit-learn та TensorFlow (Keras) для розробки моделі глибокого навчання.

Для класифікації емоцій залежно від вхідних даних та порівняння результатів, ми побудували модель глибокого навчання, до якої були застосовані обличчя людей на зображенні. Модель, побудована для цього дослідження, заснована на щільно зв'язаній згортковій нейронній мережі (DCCN).

Проведена оцінка якості класифікатора за наступними метриками: accuracy (рисунок 3); confusion matrix (рисунок 4); precision, recall, f1-score (рисунок 5); ROC-крива та значення AUC (рисунок 6).

Значення accuracy відносно високе – 63%, за умови, що набір даних має незбалансовані класи. AUC також має високе значення – 89%.

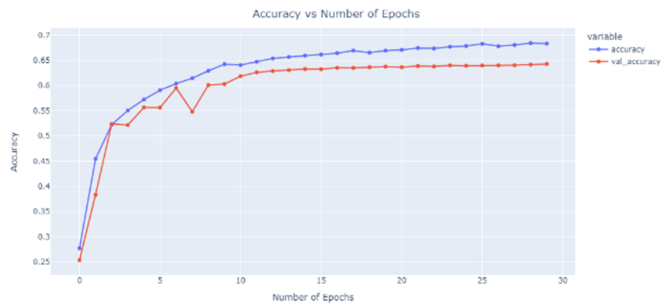


Рис. 3. Розподіл значення accuracy за епохами.

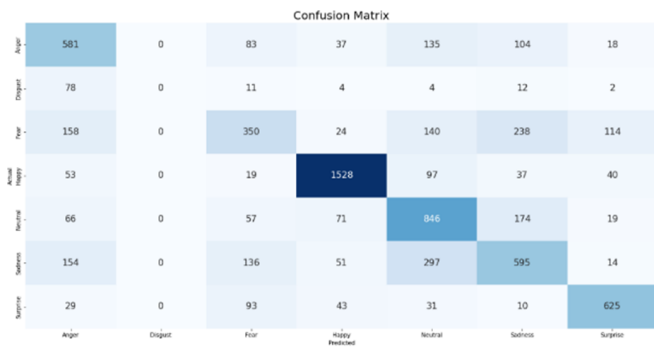


Рис. 4. Зображення матриці невідповідностей.

	precision	recall	f1-score	support
0	0.52	0.61	0.56	958
1	0.80	0.80	0.80	111
2	0.47	0.34	0.39	1824
3	0.87	0.86	0.87	1774
4	0.55	0.69	0.61	1233
5	0.51	0.48	0.49	1247
6	0.75	0.75	0.75	831
accuracy			0.63	7178
macro avg	0.52	0.53	0.52	7178
weighted avg	0.62	0.63	0.62	7178

Рис. 5. Значення метрик precision, recall, f1-score.

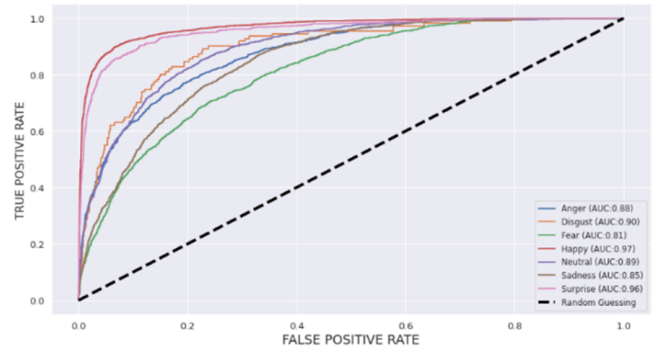


Рис. 6. Графік ROC-кривої.

#### IV. ВИСНОВКИ

В рамках цієї роботи було детально розглянуто методи класифікації емоцій та вибраний найкращий метод для поставленої задачі. З використанням датасету FER2013 програмна реалізація обраної нейронної мережі була успішно натренована та протестована. Якість роботи класифікатора перевірена на великій кількості різних метрик: accuracy, precision, recall, f1-score, confusion matrix, ROC-AUC. Виходячи з показників, можна сказати, що дана робота відповідає сучасному рівню наукових і технічних знань в сфері глибокого навчання. Актуальність теми зростає з кожним роком і необхідність в вирішенні подібних задач стає найбільш вичерпним завданням в великій кількості галузей.

Отримані результати можуть використовуватися для покращення роботи роботів і ботів, щоб їх розмова з людиною виглядала більш емоційальною. Також розпізнаванням емоцій можна скористатися для збору відгуків користувачів про будь-який проект або послугу у бізнесі. Завдяки створеній системі з'являється можливість проводити детальний аналіз того, які емоції викликає той чи інший товар та послуга в аудиторії споживачів, що дозволяє робити точніші прогнози майбутніх продажів та зміни популярності продукції та послуг.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Krizhevsky, A., Sutskever, I., Hinton, G. E. (2017), "Image Netclassification with deep convolutional neural networks", *Communications of the ACM*, Vol. 60, No. 6, P. 84–90.
- [2] Huang, G., Sun, Y., Liu, Z. (2016), "Deep networks with stochastic depth", *European Conf. on Computer Vision (ECCV)*, Amsterdam, Netherlands, October, P. 646–661.
- [3] Srivastava, R. K., Greff, K., Schmidhuber, J. (2015), "Training very deepnetworks", *Advances in Neural Information Processing Systems 28 (NIPS 2015)*, Montreal, Canada, December, P. 2377–2385.
- [4] He, K., Zhang, X., Ren, S. (2016), "Deep residual learning for image recognition", *The IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, Las Vegas, NV, USA, 26 June – 1 July, P. 1–9.
- [5] Larsson, G., Maire, M., Shakhnarovich, G. (2017), "Fractalnet: ultra-deepneural networks without residuals", *5th International Conference on Learning Representations*, Toulon, France, April, P. 1–11.
- [6] FER2013 (Facial Expression Recognition 2013 Dataset), available at: <https://paperswithcode.com/dataset/fer2013> (last accessed 12.05.2022).

# Підвищення надійності сигналів у цифрових ліній зв'язку автоматичних систем моніторингу

Артем Басько

Кафедра комп'ютерних наук, інформаційних технологій та прикладної математики  
Придніпровська державна академія будівництва та архітектури  
Дніпро, Україна  
basko.artem@pdaba.edu.ua

Олена Пономарьова

Кафедра комп'ютерних наук, інформаційних технологій та прикладної математики  
Придніпровська державна академія будівництва та архітектури  
Дніпро, Україна  
pricmech@ukr.net

## Increasing the reliability of signals in digital communication lines of automatic monitoring systems

Artem Basko

Department of Computer Science, Information Technology and Applied Mathematics  
Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Dnipro, Ukraine  
basko.artem@pdaba.edu.ua

Olena Ponomarova

Department of Computer Science, Information Technology and Applied Mathematics  
Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Dnipro, Ukraine  
pricmech@ukr.net

**Анотація**—В роботі представлено метод підвищення надійності сигналу у цифрових лініях зв'язку. Було зібрано випробувальний стенд та проведені відповідні дослідження за допомогою MATLAB Simulink, та відображено працездатність запропонованого методу.

**Abstract**— The paper presents a method of increasing signal reliability in digital communication lines. A test bench was assembled and relevant studies were carried out using MATLAB Simulink, and the performance of the proposed method was demonstrated.

**Ключові слова**—надійність цифрового зв'язку; АЦП; фільтрація сигналів; ФНЧ; моделювання.

**Keywords**— reliability of digital communication; ADC; signal filtering; LFP; simulation.

### I. ВСТУП

В даний час жодна з систем автоматизації не може бути розроблена без використання аналого-цифрового перетворювача (АЦП). Популярним рішенням для різноманітних системи керування є використання АЦП з роздільною здатністю 12 та 16 біт, з метою перетворення аналогового сигналу який генерують різні датчики, у нашому випадку це акселерометри. Аналогові

акселерометри, зазвичай використовують де необхідно отримати високу якість сигналу.

### II. ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ

Зазвичай дослідницькі роботи з підвищення стабільності сигналу спрямовані на поліпшення сигналу аналогової частини АЦП.

Наприклад, АЦП з регістром послідовного наближення (SAR). Цей АЦП показує дуже високу роздільну здатність та низький рівень шуму, він також показує хорошу енергоефективність і високу частоту дискретизації [1,2].

Обробка аналогової частини сигналу безумовно є важливою на етапі проектування електронних пристроїв. Серед багатьох рішень популярними є базові аналогові фільтри низьких частот, частотні перетворення для перетворення аналогового фільтра низьких частот в смуговий, та високочастотний аналоговий фільтр. Основними застосуваннями фільтрів низьких частот є розділення каналів, аналого-цифрове згладжування та загальна обробка сигналів [3-5].

Слід зауважити, що аналогові фільтри розраховуються для конкретних рішень, з урахуванням швидкості зміни сигналу, його форми та зовнішнього шуму який безпосередньо впливає на сигнал. Тому основною задачею

таких фільтрів є зменшення шумів та збереження більшої кількості початкових сигналів. [6,7].

Серед популярних проблем пов'язаних з нестабільною роботою цифрових ліній зв'язку можна виділити:

- якість джерела живлення, а саме шум джерела живлення
- невідповідність логічних рівнів ліній зв'язку між мікросхемами
- недостатнє або відсутнє екранування ліній зв'язку (на низьковольтні лінії та на лінії зв'язку з низьким струмом легше накладається небажаний сигнал, наприклад напруга живлення від побутових пристроїв, шум який повертають пристрої у мережу)

Зазвичай при використанні тієї чи іншої мікросхеми на початкових стадіях проектування та тестування можуть виникати проблеми у нестабільності цифрових ліній зв'язку між мікросхемою (ADC, різноманітні цифрові датчики, перетворювачі інтерфейсів) та мікроконтролером. У такому випадку інженери зазвичай використовують програмну обробку та збиток цілісності даних або змінюють поточну мікросхему на більш стабільну (у більшості випадків це більш дорогі за собівартістю), замість того, щоб розібратися з проблемами у поточному.

### III. ВИПРОБУВАЛЬНИЙ СТЕНД ТА ПОЧАТКОВІ УМОВИ

З метою вирішення нестабільності сигналу у цифрових лініях зв'язку було запропоновано використання ФНЧ. Далі у даному розділі розглядається прикладне вирішення проблеми, що виникає при передачі даних від АЦП до мікроконтролера через інтерфейс SPI. Оскільки основна проблема пов'язана з нестабільністю сигналу під час передачі даних між АЦП і мікроконтролером, то давайте розглянемо приклад передачі даних від первинного перетворювача до мікроконтролера.

Першочергово необхідно відобразити канал передачі даних який використовується у багатьох автоматизованих, що показаний на рис.1.

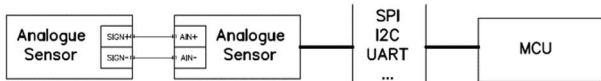


Рис. 4. Канал передачі даних

Представлений - канал зв'язку використовується в багатьох автоматизованих або автоматичних системах керування для отримання даних від датчиків температури, тиску, ваги, швидкості, прискорення та багатьох інших. Для вирішення проблеми нестабільності сигналу у цифровій лінії зв'язку між АЦП і мікроконтролером пропонується метод фільтрації сигналу на основі RC фільтра нижніх частот. Головне те, що це простий, дешевий і ефективний підхід для вирішення проблеми яка виникає у цифрових лініях зв'язку.

З метою відображення роботи RC фільтра був зібраний стенд для випробувань датчика аналогового 3х-осьового датчика прискорень MMA7368LR2. В якості системи збору,

обробки та керування даними обрано мікроконтролер STM32 серії F103C8T6 на базі процесора ARM Cortex-M3.

У якості АЦП використовувалася мікросхема AD7799, це сигма-дельта АЦП з малолумним інструментальним підсилювачем і програмованим посиленням. Мікросхема AD7799 має 24 бітну роздільну здатність та використовує інтерфейс SPI для передачі даних. У першу чергу необхідно дослідити схему без використання RC фільтра низьких частот R7-R10 та C15-C18 які показані на електричній схемі на рис.2.

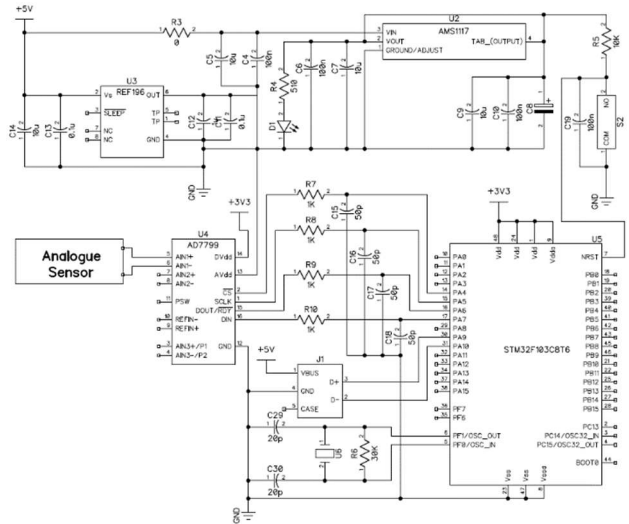


Рис. 5. Принципова електрична схема стенду для випробувань

Для дослідження форм сигналів, що протікають під час обміну даними, використовувався осцилограф. Щуп осцилографа було встановлено на АЦП DOUТ, що показано на діаграмі рис. 3. Розглядаючи верхню форму сигналу без використання запропонованого фільтра, можна спостерігати спотворених даних які проявляються у коливаннях верхньої частини сигналу.

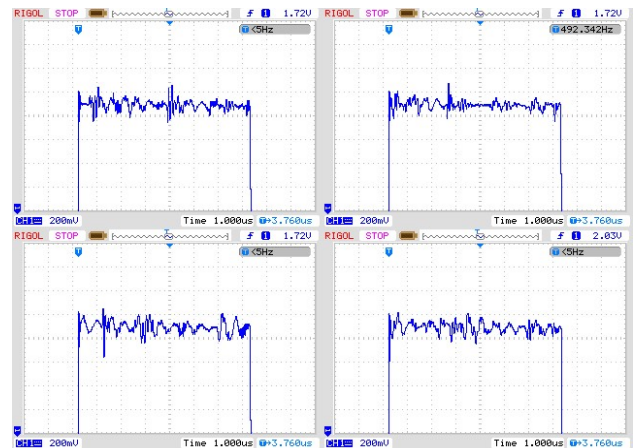


Рис. 6. Сигнал даних без використання RC фільтра

#### IV. АНАЛІЗ ДАНИХ ТА РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Виходячи з представленої діаграми можна зробити висновок що амплітуда шуму становить максимально 300 мВ, це безумовно негативно впливає на передачу даних.

Для стабілізації сигналу необхідно підібрати правильну комбінацію R і C електричних елементів. У загальному випадку вихідна напруга такого RC - ланцюга описується рівнянням (1):

$$U_{out}(t) = U_{in}(t) + C \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (1)$$

Виходячи з теорії автоматичного керування, це RC-ланцюг є аперіодичною ланкою (інерційною ланкою, аперіодичною ланкою першого порядку). Наступний зв'язок описується диференціальним рівнянням (2):

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t) \quad (2)$$

З теорії автоматизації фільтр низьких частот безперервного часу також можна описати як перетворення Лапласа. Імпульсна характеристика дозволяє легко проаналізувати всі характеристики фільтра. Фільтр низьких частот першого порядку можна описати рівнянням (3):

$$W(p) = \frac{K}{Tp+1} \quad (3)$$

Використовуючи середовище MATLAB Simulink, початкові дані були проаналізовані з використанням трьох моделей з різним значенням T, які показано на рис.4.

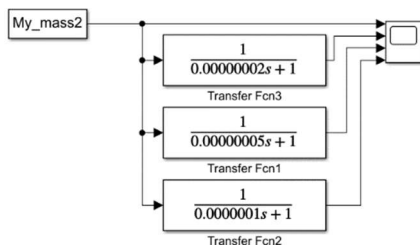


Рис. 7. Передатна функція з різними сталими часу T

Серед представлених рішень, найліпший результат має модель з  $T = 0.05 \cdot 10^{-6}$ . Номінал опору для RC фільтру візьємо рівним 1000 Ом, тоді відповідно до формули (4), ємність конденсатора буде складати 50 пФ.

$$C = \frac{T}{R} \quad (4)$$

Порівнюючи данні з використанням RC-фільтра рис.5 та без нього рис.3, можна зробити висновок, що фільтр із завданням стабілізації цифрового сигналу справляється досить добре. Сигнал став чіткішим, а амплітуду шуму вдалося знизити до 75 мВ.

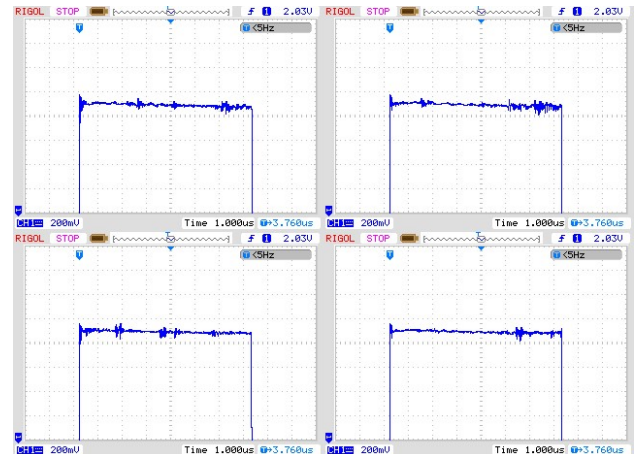


Рис. 8. Сигнал з використанням фільтра нижніх частот

#### V. ВИСНОВКИ

Складність пристроїв зростає, тому обсяг і швидкість передачі інформації між пристроями постійно зростають. Для підвищення продуктивності цифрової частини АЦП проаналізовано відомі способи розв'язання цієї проблеми та представлено власне схематичне розв'язання задачі. Було зібрано випробувальний стенд і проведено експеримент, а також проведено комп'ютерне моделювання ФНЧ у MATLAB Simulink, за допомогою цього підходу було зменшено рівень шуму та стабілізовано АЦП.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] S. Oh, K. Kim, and H. Chae, "Bandpass  $\Delta\Sigma$  ADC using pipelined SAR ADC," *Electronics Letters*, vol. 56, no. 10, pp. 480–482, 2020.
- [2] D. O'Hare, A. G. Scanlan, E. Thompson, and B. Mullane, "Bandwidth enhancement to continuous-time input pipeline adcs," *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, vol. 26, no. 2, pp. 404–415, 2018.
- [3] K. D. Rao, *Signals and systems*. Cham: Springer International Publishing, 2018.
- [4] G. Molnar and M. Vucic, "Bernoulli low-pass filters," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 61, no. 2, pp. 85–89, 2014.
- [5] W. Chen, "The regularized low pass filter," *Journal of Signal and Information Processing*, vol. 05, no. 01, pp. 14–16, 2014.
- [6] F. Yu and J. Lu, "Symmetry in digital signal processing," *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, vol. 42, no. 5, pp. 615–621, 2018.

# Система опрацювання RTSP потоку з використанням нейронної мережі

Віталій Веретельник  
кафедра інформаційних технологій  
Черкаський національний університет  
імені Богдана Хмельницького  
Черкаси, Україна  
veretelnyk.vitaliy@gmail.com

Мирослав Гаврилюк  
Магістр 2 року навчання  
Черкаський національний університет  
імені Богдана Хмельницького  
Черкаси, Україна  
myroslav04@gmail.com

## RTSP stream processing system using a neural network

Vitalii Veretelnyk  
Department of Information Technologies  
them Bogdan Khmelnytsky University  
Cherkasy, Ukraine  
veretelnyk.vitaliy@gmail.com

Myroslav Havryliuk  
Master's degree, 2nd year of study  
them Bogdan Khmelnytsky University  
Cherkasy, Ukraine  
myroslav04@gmail.com

*Анотація — Досліджено і запропоновано удосконалення каскадного методу опрацювання RTSP відеопотоку з використанням нейронної мережі. В основу методу покладено динамічний підхід для опрацювання відеокадрів для максимізації точності при підтримці початкового значення кадрів за секунду. Існує проблема пошуку компромісу між швидкістю та точністю. Якщо не пріоритизувати швидкість, в результаті можна отримати алгоритм з точними вихідними результатами, але він буде надзвичайно повільним і, як наслідок, марним для опрацювання відео в реальному часі. Якщо занадто спростити алгоритм опрацювання, то результати можуть бути недостатньо точними для поставленої задачі. Отже, неможливо створити оптимальний алгоритм, який буде і швидкий в опрацюванні, і достатньо точний. Таким чином, виникає проблема покращення методів опрацювання потокового відео для отримання максимальної вихідної точності, що будуть враховувати потужність обчислювальних приладів.*

*Abstract—The improvement of the cascade method of processing the RTSP video stream using a neural network has been studied and proposed. The basis of the method is a dynamic approach for processing video frames to maximize accuracy while maintaining the initial value of frames per second. There is a problem of finding a compromise between speed and accuracy. If you don't prioritize speed, you may end up with an algorithm with accurate output, but it will be extremely slow and, as a result, useless for real-time video processing. If the processing algorithm is oversimplified, the results may not be accurate enough for the given task. Therefore, it is impossible to create an optimal algorithm that will be both fast in*

*processing and sufficiently accurate. Thus, there is a problem of improving the methods of processing streaming video to obtain the maximum output accuracy, which will take into account the power of computing devices.*

*Ключові слова—система опрацювання, RTSP відеопоток, покадрова магистральна обробка, задача локалізації, підсистеми повнокадрової поведінкової моделі, модель опрацювання потокового відео, стек технологій: Python, keras, tensorflow, matplotlib, opencv*

*Keywords—processing system, RTSP video stream, frame-by-frame trunk processing, localization task, subsystems of full-frame behavior model, streaming video processing model, technology stack: Python, keras, tensorflow, matplotlib, opencv*

### I. ВСТУП

У повсякденному житті відеоформат відіграє важливу роль для життя та існування суспільства. Через постійне розширення використання мережі інтернет та комп'ютерних технологій в цілому, все більше областей побуту та промисловості починають впроваджувати нові інформаційні методи. Не меншого розвитку останнім часом зазнає і використання потокового відео, або відео в реальному часі. Їх використання лише збільшується шляхом зростання областей використання IoT-пристроїв, більша частина з яких використовує потокові дані, в тому числі і відеоформату [1].

Окремо можна виділити напрямок опрацювання відеопотоків, що можуть передаватися через різні протоколи, у тому числі RTSP. На такі методи накладаються додаткові умови на швидкість роботи, адже необхідно підтримувати початкове значення кадрів у секунду, що робить їх більш складними у проектуванні. Найбільшого використання такі моделі отримали у використанні разом IoT-пристроями, а саме IP камерами.

Серед основних методів такого опрацювання можна виділити:

- паралельна обробка шляхом поділу на блоки;
- покadroва магістральна обробка відеоданих [2].

Так, паралельна обробка шляхом поділу на блоки найчастіше використовується для файлової обробки відео, коли весь відеоряд вже отримано. Використання такого підходу до обробки відеопотоку не є доцільним по причинам, що будуть названими далі. Натомість покadroва магістральна обробка найчастіше використовується для опрацювання відеопотоку, адже такий метод, дозволяє проводити опрацювання по мірі надходження даних. В нашому випадку це кадри відеоряду.

## II. ТЕОРЕТИЧНИЙ БАЗИС АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Аналіз останніх публікацій показав, що ряд проблем пов'язаних з опрацюванням потокового відео в IoT-пристроях є актуальним, основні з них досліджуються в наступних публікаціях: в [1] розглядаються застосування методів інтеграція хмарних обчислень та Інтернету речей в смарт-пристроях в [2] приведені методи і алгоритми цифрової обробки потокового відео в [3] розглядаються алгоритми і методи оптимізації продуктивності в системах відеоаналітики на основі нейронних мереж і визначені найбільш перспективні шляхи їх реалізації в [4] – обробка відео в реальному часі на основі глибокого навчання з використанням багатозгорткових нейронних мереж. У літературі [5] розглядається і використовуються методи цифрової інтерполяції відеопотоку відеоінформації із застосуванням згорткових нейронних мереж з фіксованою точкою для обробки відео в реальному часі в FPGA для сприйняття та обробку в пристроях автоматичного аналізу. В останньому випадку на перший план виходять задачі виділення ознак, формування даних про кількісні характеристики. Протоколи передачі даних і методи оптимізації і ущільнення відеоряду покadroвої обробки та алгоритмів цифрової обробки відеопотоків зображень [6-12]. Різноманітність методів і алгоритмів обробки відеоінформації пов'язані з великим колом проблем, що виникають під час обробки і передавання відеоданих RTSP потоку та обробки в реальному часі.

## III. ТЕОРЕТИЧНИЙ БАЗИС. СИСТЕМА ОПРАЦЮВАННЯ RTSP ПОТОКУ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ

Основною метою роботи є узагальнене дослідження методології моделювання, проектування та створення системи опрацювання відеопотоку в реальному часі з використанням методів декодування RTP, управління роботою алгоритму в реальному часі, методів збору інформації, методів кодування та стиснення інформації,

методів швидкої ректифікації зображень відеопотоку, методів генерації єдиного бітового відеопотоку з вибраних плиток.

В нашій роботі ми будемо застосовувати обробку RTSP відеопотоку з використанням нейронної мережі для отримання максимальної вихідної точності, підтримуючи початкове значення кількості кадрів в секунду. Вхідний відеопотік буде передаватися з використанням RTSP та RTP протоколів.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- виконати аналіз предметної області опрацювання потокового відео та дослідити методи обробки RTSP потоку з використанням нейронної мережі;
- спроектувати логічну та фізичну структуру покращеного алгоритму;
- розробити математичну модель обробки відеопотоку з використанням нейронної мережі;
- удосконалити каскадний метод опрацювання RTSP потоку з використанням нейронної мережі. В основу методу покладено динамічний підхід для опрацювання відеокадрів для максимізації точності при підтримці початкового значення кадрів у секунду;

В роботі можна виділити два основних компонента для дослідження – це методи передачі потокових даних та методи створення, навчання та використання нейронних мереж. Розглянемо дані дослідження для подальшого використання та створення власної моделі для опрацювання потокового відео з використанням нейронної мережі.

Одним з найпопулярніших протоколів передачі даних у реальному часі є RTP (Real Time Transport Protocol). Його популярність можна пояснити надійністю та відносною простотою у використанні. Слід зазначити, що це один із перших створених протоколів для передачі потокових даних, що також обумовлює його популярність [8]. RTP – це мережевий протокол для передачі аудіо та відео через IP-мережі. RTP використовується в комунікаційних і розважальних системах, які включають потокове медіа, наприклад, телефонію, програми для відеоконференцій тощо. Сам протокол не регламентує дані, що передаються, і його можна адаптувати для передачі й інших форматів даних. Протокол RTP складається з двох основних частин – це заголовки протоколу та його корисне навантаження. Заголовки описують основну інформацію про дані, що передаються, відправника та необхідну інформацію для подальшого опрацювання [9].

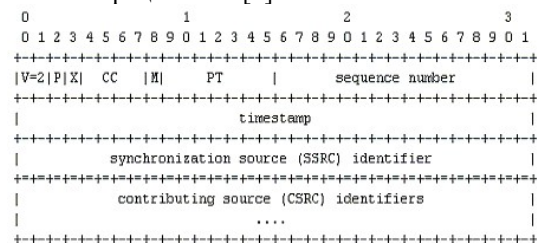


Рис. 1. Структура заголовків протоколу RTP другої версії



Вище приведена на (рис. 1) загальна структура заголовків протоколу RTP другої версії, яка є нині чинною. Розглянемо їх більш детально:

- V – версія протоколу, яка в нашому випадку буде рівною два;
- P – вказує наявність додаткових байтів заповнення в кінці пакета;
- X – вказує на наявність заголовків розширення, що знаходяться в кінці заголовків самого пакету;
- CC – вказує кількість ідентифікаторів CSRC (contribution source);
- M – сигнальний біт, вказує, що цей пакет має певне особливе значення для застосунку, значення біту, як правило, регламентується типом даних що передається;
- PT – формат даних, вказує формат корисного навантаження, й таким чином визначає його інтерпретацію програмою, значення можуть задаватися динамічно;
- Sequence number – порядковий номер пакету, збільшується для кожного надісланого пакета даних RTP і має використовуватися одержувачем для виявлення втрати пакета;
- Timestamp – позначка часу, використовується приймачем для відтворення отриманих зразків у відповідний час та з відповідним інтервалом;
- SSRC – ідентифікатор джерела синхронізації, унікально визначає джерело потоку, джерела синхронізації в одному сеансі RTP будуть унікальними;
- CSRC – ідентифікатори джерел, що вносять внесок у дані, перераховують джерела, які вносять внесок у потік, який було згенеровано з кількох джерел.

Після заголовків пакету йде його фактичне корисне навантаження. Як правило, воно також має свої заголовки, які вже визначені типом даних, що передаються. Так, наприклад, формат даних при передачі MJPEG відео описано у стандарті RFC 2435 [10]. Пакет RTP зазвичай працює через протокол UDP (User Datagram Protocol), хоча може використовувати і TCP (Transmission Control Protocol). Причина більшого використання UDP досить проста, адже UDP працює швидше, у порівнянні з TCP. Причина більшої швидкодії передачі обумовлена відсутністю етапу підключення при передачі даних, який присутній при використанні TCP.

Протокол RTP використовується в поєднанні з протоколом керування RTCP (Real Time Control Protocol). У той час як RTP передає медіа-потоки (наприклад, аудіо та відео), RTCP використовується для моніторингу статистики передачі та якості обслуговування (QoS), а також сприяє синхронізації кількох потоків. Дані з протоколу RTCP, в основному, використовуються сервером для отримання статистики по якості доставляння пакетів, які використовуються для збільшення кількості успішно доставлених пакетів.

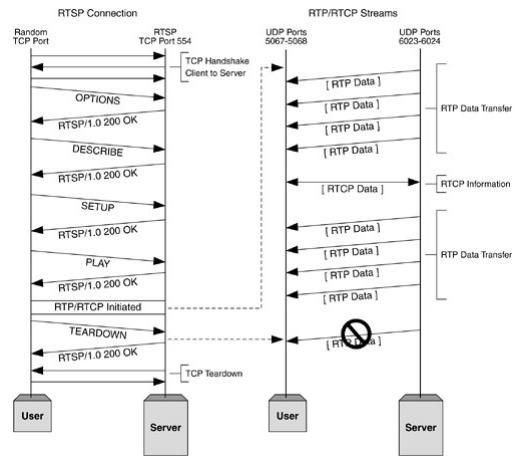


Рис. 2. Процес передачі відеопотоків протоколів RTSP, RTP

Розглянемо процес передачі відеопотоку протоколів RTSP, RTP та RTCP (рис. 2). На лівій частині рисунку наведено комунікацію клієнту та серверу через протокол RTSP, на правій – через RTP. Як бачимо, спочатку відбувається ініціалізація передачі даних через команди OPTIONS, DESCRIBE та SETUP протоколу RTSP використовуючи TCP. Після ініціалізації сервер починає передачу RTP потоків на вказаний порт клієнта через UDP. Через певний інтервал часу клієнт та сервер обмінюються RTCP пакетами для отримання статистики по передачі. Після передачі клієнтом команди TEARDOWN сервер перестає передавати RTP пакети, та канал TSP закривається. Передача завершена.

Через великий попит на підхід до опрацювання відео з використанням нейронних мереж, виникло багато різних методів для вирішення поставленої задачі. В загальному, підходи можна поділити на два основні класи – це методи, що враховують міжкадровий зв'язок, та методи, які опрацюють кожен кадр окремо.

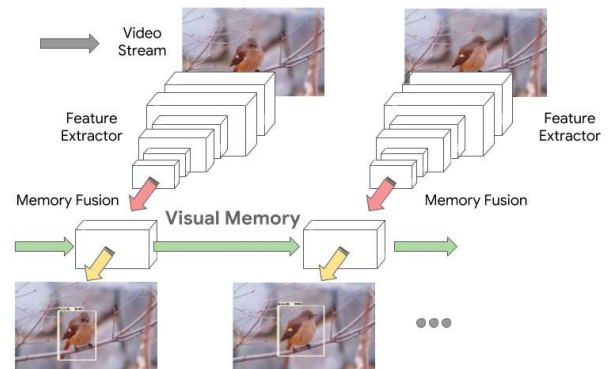


Рис. 3. Процес опрацювання відео покaдрово нейронною мережею

Для початку розглянемо найпростіший підхід, коли метод опрацює кожен відеокaдр окремо (рис. 3). Такий метод з'явився першим, адже він напpямy слiдує з пiдходiв для опрацювання зображень, що вже були розробленi ранiше. У такому випадку метод опрацювання відео напpямy використовує нейронну мережу для опрацювання

зображення, щоб опрацювати відеокадри, та агрегує отримані результати [12]. Такий підхід є більш простим у проектуванні та навчанні, адже необхідно вирішити більш просту задачу по опрацюванню зображення, що є добре вивченою. Отримані моделі є не надто великими, що дозволяє використовувати їх напряму в IoT-пристроях, які в більшості не мають великих обчислювальних потужностей. Однак слід враховувати, що при опрацюванні кожного відеокадру окремо відновити міжкадровий зв'язок неможливо, що робить таким метод менш універсальним. Проте навіть враховуючи простоту описаного методу, він може добре справлятися з поставленою перед нами задачею по локалізації об'єктів на відео.

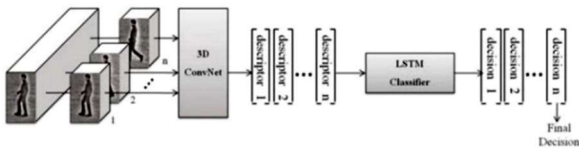


Рис. 4 Архітектура нейронної мережі для опрацювання відео враховуючи міжкадровий зв'язок

Методи, що враховують міжкадровий зв'язок, є більш новими та, відповідно, точнішими для виконання більшості задач. Головною характеристикою таких підходів є опрацювання кадру не як окремої сутності, а як частини цілого відео, враховуючи попередні або навіть наступні фрагменти (рис. 4). При такому підході нейронна мережа отримує більше даних на вхід і, відповідно, може з більшою точністю знаходити необхідні особливості, що, в свою чергу, покращує результат. Також слід зазначити, що такі моделі є більш складними в проектуванні та навчанні через збільшення кількості вхідних даних та необхідність шукати між ними зв'язок. При пошуку міжкадрового зв'язку нейронні мережі також стають досить великими, що унеможливає їх використання у невеликих IoT-пристроях напряму [12]. Як приклад задач, що добре розв'язуються при такому підході, можна назвати класифікацію емоцій людини на відео. У цій задачі аналіз окремих кадрів не буде повноцінним, адже необхідно також враховувати динаміку зміни миміки обличчя. Оскільки перед нами поставлена задача локалізації об'єкту на відео та однією з цілей створення нашого методу є універсальність, ми можемо використовувати більш простий підхід для опрацювання відео не враховуючи міжкадровий зв'язок. Даний вибір суттєво не відобразиться на точності результуючого методу, проте дозволить його використання на більш простих IoT-пристроях з меншою обчислювальною здатністю. Розглянемо більш детально використання, принципи роботи та створення нейронної мережі для локалізації об'єкту на відео при покадровому опрацюванні. Слід зазначити, що ми вирішуємо задачу саме по локалізації, а не по виявленню об'єктів. Головна відмінність цих двох задач полягає в тому, що при виявленні з'являється додаткова підзадача по класифікації локалізованого об'єкту. Задача локалізації об'єктів на відео при покадровому опрацюванні зводиться до локалізації об'єктів на зображенні, тому подалі будемо розглядати саме таку постановку. В загальному можна виділити два

основних підходи для вирішення даної проблеми – це повнозв'язні нейронні мережі та згорткові.

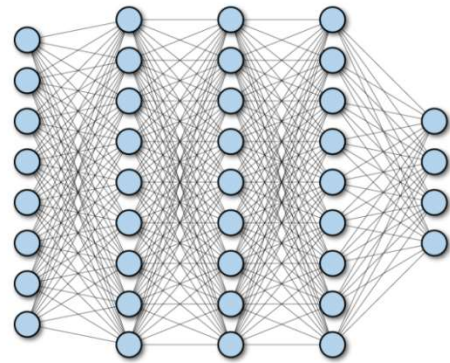


Рис. 5 Повнозв'язана нейронна мережа

Повнозв'язні нейронні мережі це найбільш класичний варіант мереж. Даний тип було створено одним з перших, тому відповідно так мережі досить прості по своїй архітектурі (рис. 5) [13]. Серед головних особливостей таких мереж можна виділити:

- складається з серії повнозв'язаних шарів, які з'єднують кожен нейрон одного шару з кожним нейроном сусідніх шарів;
- головна перевага повністю зв'язаних мереж полягає в тому, що вони «незалежні від структури», тобто не потрібно робити особливих припущень щодо вхідних даних;
- незважаючи на те, що простота структури робить повнозв'язні мережі дуже широко застосовними, такі мережі, як правило, мають нижчу продуктивність, ніж мережі спеціального призначення, налаштовані на структуру проблемного простору.

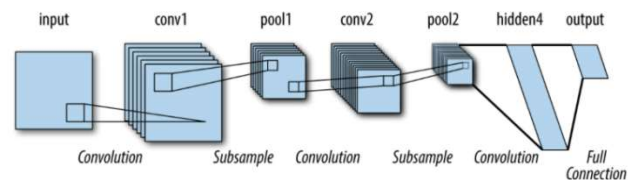


Рис. 6 Згорткова нейронна мережа

Методи, що враховують міжкадровий зв'язок, є більш новими та, відповідно, точнішими для виконання більшості задач. Головною характеристикою таких підходів є опрацювання кадру не як окремої сутності, а як частини цілого відео, враховуючи попередні або навіть наступні фрагменти (рис. 6). При такому підході нейронна мережа отримує більше даних на вхід і, відповідно, може з більшою точністю знаходити необхідні особливості, що, в свою чергу, покращує результат. Також слід зазначити, що такі моделі є більш складними в проектуванні та навчанні через збільшення кількості вхідних даних та необхідність шукати між ними зв'язок. При пошуку міжкадрового зв'язку нейронні мережі також стають досить великими, що

унеможливує їх використання у невеликих IoT-пристроях [12].

Розглянемо особливості використання згорткових нейронних мереж для вирішення задачі локалізації об'єкту на зображенні. Задача локалізації є побічним результатом звичайних алгоритмів класифікації з використанням нейронних мереж. Такі алгоритми передбачають класи з вихідними дискретними числами. Під час локалізації об'єкта алгоритм передбачає набір із, як правило, чотирьох вихідних дійсних чисел, а саме координату  $x$ , координату  $y$ , висоту та ширину рамки, що описує локалізований об'єкт. В алгоритмі локалізації об'єкту присутні всі ті самі шари, що й при класифікації, крім вихідного. В алгоритмах класифікації останній рівень дає значення ймовірності в діапазоні від 0 до 1.

Алгоритми локалізації навпаки дають вихід у вигляді чотирьох дійсних чисел, оскільки локалізація є проблемою регресії. Як обговорювалося вище, ці чотири значення використовуються для опису рамки навколо об'єкта. Метою будь-якого алгоритму машинного навчання є прогнозування значень максимально близьких до базових привільних. Для цього будь-який керований алгоритм машинного навчання використовує функцію втрат, а алгоритми навчаються шляхом мінімізації втрат за допомогою оптимізації вагів або параметрів [11].

Оскільки локалізація об'єкта є проблемою регресії, можна використовувати будь-яку функцію втрат регресії, що може бути застосована до  $N$ -вимірної масиви. Наприклад, втрати відстані  $L_1$ , відстані  $L_2$ , втрати Губера тощо. Виходячи з вищесказаного, втрата відстані  $L_2$  широко використовується галузевими практиками та дослідницькими спільнотами. Відстань  $L_2$  також відома як евклідова відстань. Це відстань між двома точками в  $N$ -вимірному просторі, яка обчислюється шляхом застосування теореми Піфагора про Декартові координати точок. Цей підхід працює для будь-якого  $N$ -вимірного простору. Мінімізуючи різницю між істинним значенням положення об'єкта на зображенні та фактичним значенням отриманим з мережі, проводиться навчання [10].

#### IV. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИЙ БАЗИС. СИСТЕМА ОПРАЦЮВАННЯ RTP ПОТОКУ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ

Одним з перших етапів роботи нашого методу по обробці потокового відео має бути блок по перетворенню вхідного RTP потоку у відеокадри, які вже можна буде обробляти. Розглянемо більш детально методи, що використовуються для вирішення поставленої задачі. Слід зазначити, що ми будемо розглядати передачу відео у форматах, що не враховують міжкадрову різницю, як, наприклад, MJPEG. Даний вибір можна обумовити тим, що відео саме такого формату, як правило, транслюється з IP-камер, систем відеонагляду, веб камер. Головна характеристика такого формату в тому, що кожен окремих кадр є повноцінним зображенням, на відміну від форматів, де міжкадрова різниця враховується (H264 та H265). Правила передавання відео у форматі MJPEG через RTP протокол детально описано в стандарті RFC 2435 [10]. Саме в ньому знаходиться детальний опис заголовків корисного

навантаження, як їх використовувати та особливості використання заголовків RTP пакету. Так, наприклад, у стандарті вказано принципи, по яких має відбуватися поділ відеокадрів на пакети. Вони включають два головних пункти:

- пакети мають мати однакове значення позначки часу, якщо вони є частиною одного відеокадру;
- сигнальний біт  $M$  із заголовку протоколу RTP має бути рівний 1, якщо пакет починає цикл передачі кадру.

Відповідно до описаних стандартів, для отримання декодованого ряду кадрів з PRT потоку необхідно акумулювати пакети, що мають однакове значення позначки часу та починаються з сигнального біту  $M$  рівним 1, відсортувати їх по порядкувому номеру, відновлюючи послідовність надсилання, прибрати заголовки з корисного навантаження та декодувати отримані дані. Описаний метод є найпростішим та найрозповсюдженішим для вирішення поставленої задачі. Обробка пакетів не створює затримок при декодуванні і, відповідно, при надсиланні відеокадрів на обробку.

Окрім самого пакету PRP, нам також слід використовувати RTSP для ініціалізації передачі та для можливості контролю програвання відео. Для цього нам необхідно реалізувати методи OPTIONS, DESCRIBE, SETUP PLAY, TEARDOWN відповідно до документації протоколу. Дані методи дадуть нам достатній контроль над передачею для вирішення поставленої задачі.

Щодо використання нейронних мереж, підсумовуючи описані методи їх використання для опрацювання відео, можемо зробити висновок, що використання згорткової нейронної мережі для локалізації об'єкту на зображенні без урахування міжкадрового зв'язку є більш доцільним. Такий вид мереж більше пристосований до опрацювання зображень та є найменш вибагливим при все ще високих значеннях точності роботи. Саме таку архітектуру мереж будемо використовувати в наших цілях для опрацювання відеопотоку в реальному часі. Використання описаних підходів досить добре поєднуються між собою для створення повноцінного методу для опрацювання RTSP потоку з використанням нейронної мережі.

Метод прийому RTP пакетів та їх декодування буде видавати по одному відеокадру по мірі їх надходження. Далі ці кадри будуть направлятися на опрацювання нашому покращеному методу покадрової магістральної обробки, що використовує нейронну мережу та метод інтерполяції локалізації. Обидва компоненти можуть обробляти лише по одному зображенню одночасно, що і є виходом методу по прийому та декодування пакетів. Опрацьовані кадри можуть бути об'єднані в один відеоряд для подальшого користування.

Для перевірки точності алгоритму інтерполяції для визначення положення рамки описаної навколо локалізованого об'єкту, нами була обрахована метрика IoU (Intersection over Union), яка визначає наскільки повно перетинаються дві рамки [8]. В загальному, значення IoU визначається формулою:

$$IoU = \frac{\text{площа перетину}}{\text{площа об'єднання}} \in [0, 1] \quad (1)$$

Для перевірки було обрано значення  $K$  рівне  $\frac{1}{4}$ , та було опрацьовано сто кадрів відеоряду. Таким чином, нейронна мережа опрацьовувала лише кожен четвертий кадр, а описаний алгоритм інтерполяції обраховував рамки для всіх інших. На кадрах опрацьованих за допомогою інтерполяції було окремо обраховано значення IoU, яке було усереднене по всіх кадрах, де не використовується нейронна мережа. У результаті проведення перевірки, значення IoU було рівним 0.89, що можна вважати за задовільний результат, однак пояснює чому слід максимізувати використання нейронної мережі для опрацьовання. Розглянемо математичну модель запропонованої нами модифікації методу покадрової магістральної обробки з використанням константного інтервалу використання нейронної мережі. Запропонована нами модифікація передбачає динамічну зміну частоти використання нейронної мережі для опрацьовання відеоряду. Це зробить систему опрацьовання більш гнучкою під час зміни навантаження, дозволить максимізувати використання більш точної нейронної мережі у порівнянні з методом інтерполяції. У нашому випадку формула для обрахування положення рамки використовуючи метод інтерполяції змін не зазнає і ми можемо використати вже описану у формулі 1.

$$B[i] = \begin{cases} NN[i], & i \bmod N[i] > M \\ I(F[i], & i \bmod N[i] \leq M \end{cases} \quad (2)$$

$$N[i] = \begin{cases} N[i] - 1, & \frac{\sum_{a=1}^L Q[a]}{L} > 1 \wedge \sum_{a=1}^L Q[a] - Q[a-1] \leq 0 \wedge N[i-1] > 1 \\ N[i] + 1, & \frac{\sum_{a=1}^L Q[a]}{L} \leq 1 \wedge \sum_{a=1}^R IT[a] \geq \frac{\sum_{a=1}^R NT[a]}{R} \wedge N[i-1] < M \\ N[i], & \frac{\sum_{a=1}^L Q[a]}{L} \leq 1 \wedge \sum_{a=1}^R IT[a] \leq \frac{\sum_{a=1}^R NT[a]}{R} \end{cases} \quad (3)$$

Математична модель запропонованої нами модифікації описана формулами 2 та 3. Формула 2 була створена на основі математичної моделі методу покадрової магістральної обробки шляхом додавання динамічної частоти використання нейронної мережі. Частота використання нейронної мережі обраховується за формулою 3. Вона залежить від розміру вхідної черги з неопрацьованих відеокadrів –  $Q$ , часу бездії системи –  $IT$  та часу опрацьовання кадру через нейронну мережу –  $NT$ . Таким чином, частота використання нейронної мережі буде зменшена, якщо вхідна черга непорожня та неспадна.

Частота використання нейронної мережі буде збільшена, якщо вхідна черга незаповнена та час бездії системи опрацьовання за останній проміжок часу більший за середній час використання нейронної мережі, інакше частота використання нейронної мережі не буде змінена.

Структурна схема нашої системи опрацьовання відеопотоку з використанням нейронної мережі визначає головні логічні частини системи, їх взаємозв'язки та призначення. За цією схемою можна побачити основні компоненти системи, та як вони взаємопов'язані між собою. Ця діаграма визначає загальний вигляд рішення, яке буде більш детально плануватися та реалізовуватись на наступних кроках.



Рис. 7 Структурна схема опрацьовання відеопотоку з використанням нейронної мережі

На (рис. 7) наведено структурну діаграму для нашої системи. На ній було виділено чотири головних підсистеми:

- підсистема роботи з RTSP потоком, яка відповідає за всі операції комунікації з сервером;
- підсистема обробки відеокадру, що в цілому відповідає за локалізацію цільового об'єкту на кадрі;
- підсистема роботи з нейронною мережею, яка відповідає за опрацьовання кадру з використанням нейронної мережі;
- підсистема передачі результуючого відео, що відповідає за транспортування опрацьованого відеоряду до користувача.

#### Розробка функціональної системи опрацьовання відеопотоку

Функціональна схема є більш деталізованою у порівнянні зі структурною. Вона дає більше розуміння про процеси що відбуваються у системі що розробляється шляхом додавання нових логічних модулів



Рис. 8 Функціональна схема опрацьовання відеопотоку з використанням нейронної мережі

На (рис. 8) наведено функціональну схему для системи, яка складається з наступних підсистем:

- підсистема налаштування передачі через RTSP, відповідає за комунікацію з RTSP сервером для налаштування передачі через RTP та його контролю;

- підсистема перетворення RTP потоку у відеокадри, що відповідає за отримання пакетів та їх декодування у відеокадри для подальшого опрацювання;
- підсистема опрацювання відеокадру, яка відповідає за безпосереднє опрацювання отриманого кадру шляхом локалізації об'єкту на ньому;
- підсистема контролю швидкодії відслідковує завантаженість системи та необхідність у зміні налаштувань опрацювання для більш швидкого опрацювання або для більш точного;
- підсистема роботи з нейронною мережею, яка відповідає за опрацювання кадру з використанням раніше створеної нейронної мережі;
- підсистема передачі результуючого відео надсилає опрацьовані кадри до кінцевого користувача;
- підсистема комунікації з кінцевим користувачем отримує команди від нього для зміни налаштувань системи або для припинення опрацювання.

Як вже було зазначено, мова програмування Python має безліч вже готових бібліотек, що значно пришвидшують процес створення цільової системи. У нашому випадку головними бібліотеками, що були використані для створення системи опрацювання відеопотоку з використанням нейронної мережі є:

- tensorflow та keras це дві найбільш розповсюджені Python бібліотеки для створення, навчання та використання нейронних мереж, і саме вони були використані для роботи зі згортковими нейронними мережами для задачі локалізації;
- opencv-python це великий модуль, що реалізує безліч функціоналу для роботи з комп'ютерним зором та не тільки, в нашому випадку ми використовуємо його для роботи з RTSP сервером та для маніпуляцій над відеокадрами;
- pygame, як правило, використовується для створення графічних відображень, в нашій системі він використовується для візуалізації опрацьованих кадрів;
- matplotlib це великий модуль візуалізації даних, його ми використовуємо для побудови графіків та діаграм роботи системи.

#### *Навчання нейронної мережі для задачі локалізації*

Як вже було зазначено, у нашій роботі ми розглядаємо відеопотік, що не має міжкадрового стиснення, отже, кожен окремий кадр є повноцінним зображенням. Таким чином, ми маємо створити нейронну мережу, яка буде розв'язувати задачу локалізації на зображенні, що дозволить проводити опрацювання кожного відеокадру окремо.

Перед проектуванням та навчанням нейронної мережі спершу слід конкретизувати задачу, яку вона буде розв'язувати. Оскільки в нашій роботі ми більше розглядаємо сам процес опрацювання відеопотоку, аніж процес створення складної мережі, нами було вирішено взяти розповсюджену та добре вивчену задачу локалізації

собаки на відео. Вибір задачі легко пояснити великою кількістю готових до використання датасетів, що значно спрощує процес навчання.

Для процесу навчання нашої згорткової мережі, що буде далі використана для опрацювання відеопотоку, було обрано The Oxford-III Pet Dataset [7]. Згідно документації, він містить близько п'яти тисяч зображень котів та собак, частина з яких промаркована вже готовими рамками, що виділяють тварин. Даний датасет добре підходить для наших цілей, адже ми не будемо намагатися зробити дуже точну нейронну мережу. Нам лише необхідно навчити модель достатньо точно, щоб вона могла відігравати роль корисного навантаження на систему для перевірки гіпотез по опрацюванню відеопотоку.

Перед початком навчання згорткової нейронної мережі було проведено попередню підготовку даних. З датасету було виділено 2490 зображень собак для яких були вже готові рамки. Зображення були поділені на дві частини, де перша частина у кількості 2347 зображень буде використана на навчання та друга частина у кількості 143 для валідації. Також було окремо виділено 20 зображень собак для тесту готової моделі.

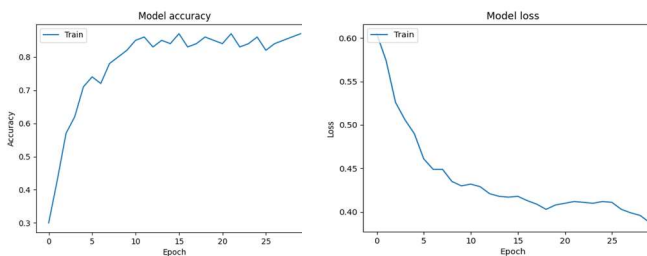
Рамка кожного зображення представляє собою чотири натуральних числа, які описують прямокутник навколо тварини (верхній лівий та нижній правий кутки). Оскільки більш прийнятним для задачі локалізації є варіант представлення рамки у форматі координати верхнього правого кута та висота з шириною, значення рамок були змінені. Також було проведено нормалізацію значень по висоті та ширині кожного зображення.

В результаті проведеної роботи було підготовлено дані для подальшого навчання згорткової нейронної мережі для задачі локалізації собаки на зображенні. Сама модель згорткової нейронної мережі має наступну структуру по шарах:

1. input layer, size - (128, 128, 3);
2. convolution layer, filters – 64, kernel size - (3, 3), activation –relu;
3. convolution layer, filters – 64, kernel size - (3, 3), activation –relu;
4. max-pool, pool-size – (2, 2);
5. convolution layer, filters – 128, kernel size - (3, 3), activation –relu;
6. convolution layer, filters – 128, kernel size - (3, 3), activation –relu;
7. max-pool, pool-size – (2, 2);
8. convolution layer, filters – 256, kernel size - (3, 3), activation –relu;
9. convolution layer, filters – 256, kernel size - (3, 3), activation –relu;
10. max-pool, pool-size – (2, 2);
11. convolution layer, filters – 512, kernel size - (3, 3), activation –relu;
12. convolution layer, filters – 512, kernel size - (3, 3), activation –relu;
13. max-pool, pool-size – (2, 2);
14. convolution layer, filters – 512, kernel size - (3, 3), activation –relu;

15. convolution layer, filters – 512, kernel size - (3, 3), activation –relu;
16. flatten;
17. dense, units – 2048, activation – relu;
18. dense, units – 1024, activation – relu;
19. dropout, rate – 0.2;
20. dense, units – 128, activation – relu;
21. dense, units – 4, activation – softmax.

Тобто спочатку ми збільшуємо кількість ознак та зменшуємо розмір самого зображення для кращої концентрації ознак. Далі ми згладжуємо отримані результати в один вектор і використовуємо повнозв'язну нейронну мережу зі зменшенням ширини. Додано шар відкидання для того, щоб модель не перенавчалась. З більш детальним аналізом архітектури можна ознайомитись в додатку А. Як функцію втрат було обрано MSE (Mean Squared Error), так як вона оптимально підходить для задачі локалізації. Оптимізатором було обрано Adam зі швидкістю навчання  $1e-4$ .



1) 2)

Рис. 9 Результати навчання: 1 – точність, 2 – втрати

В результаті проведеного навчання було отримано наступні графіки точності та втрат моделі (рис. 9). На тестовому датасеті було отримано точність 87.34%, що можна вважати задовільним результатом для наших цілей.

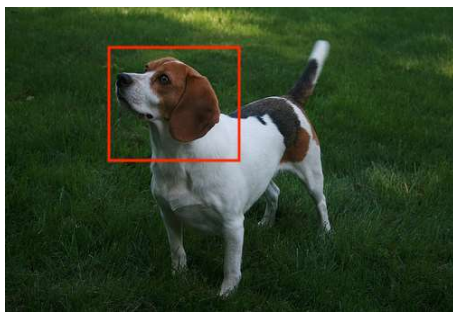


Рис. 10 Результат роботи на тестовому зображенні

На (рис. 10) наведено приклад роботи навченої згорткової нейронної мережі на тестовому зображенні. Як бачимо, створена модель добре справляється з поставленою задачею.

*Тестування системи опрацювання відеопотоку*

Оскільки основні принципи реалізації запропонованої системи вже описані, тепер ми можемо приступити до порівняння та аналізу отриманих результатів. Порівняння буде проводитись між системою для опрацювання відеопотоку, що використовує константний інтервал виклику нейронної мережі, та запропонованою системою, що може динамічно змінювати цей інтервал.

Для початку розглянемо результати роботи алгоритму, що використовує константне значення К. Головними метриками тут можна вважати розмір вхідної черги протягом опрацювання та графік, на якому буде відображено розподіл часу опрацювання між процесами. Для збору даних було проведено два тестування. Перший тест такої системи було проведено при правильно встановленому значенні К, в нашому випадку воно було рівним  $\frac{1}{3}$ . Під правильним мається на увазі значення, при якому не створюється затримка при відтворенні відео.

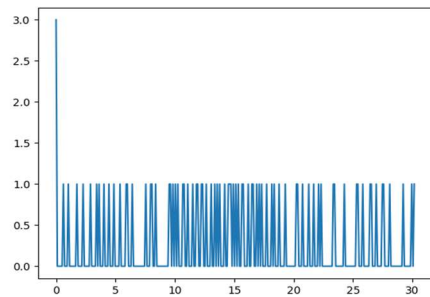


Рис. 10 Розмір вхідної черги при сталому значенні К яке не створює затримок при опрацюванні

На (рис. 10) наведено графік зміни вхідної черги з неопрацьованих кадрів під час проведення першого тесту. Як бачимо, на самому початку була невелика черга в три кадри, що можна пояснити процесом запуску системи оскільки модуль опрацювання запускається вже після модуля отримання кадрів. Дана черга була дуже швидко вичерпана, і надалі кількість не опрацьованих кадрів не перевищувала одного. Це значить, що система опрацьовувала вхідні дані з достатньою швидкістю.

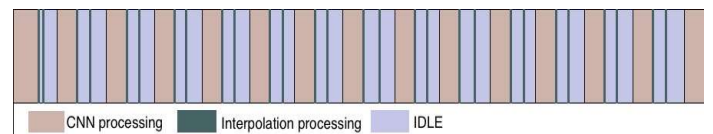


Рис. 11 Розподіл часу опрацювання при сталому значенні К, яке не створює затримок при опрацюванні

На (рис. 11) наведено розподіл використання часу для попереднього прикладу. На діаграмі наведено часовий проміжок довжиною дві секунди. Використання нейронної мережі чергується з використанням алгоритму інтерполяції за заданим значенням К рівним  $\frac{1}{3}$  (опрацювання двічі через інтерполяцію після одного з нейронною мережею). Як можна помітити, на діаграмі присутні проміжки без дії, що

свідчить що система встигає опрацювати всі вхідні кадри.

Тепер розглянемо другий приклад для системи, що використовує нейронну мережу через константний інтервал. Під час цього тесту значення K було встановлено 9/10. Воно є надто великим і призводить до накопичення неопрацьованих кадрів.

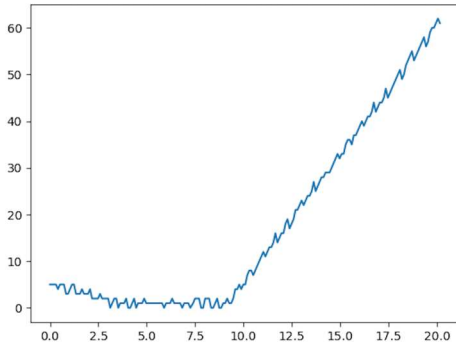


Рис. 12 Розмір вхідної черги при сталому значенні K яке створює затримку при опрацюванні

Як можна побачити на (рис. 12), розмір вхідних черги з не опрацьованих кадрів починає стрімко зростати, що створює затримку при відтворенні відео. Так, вже на двадцятій секунді тесту в черзі знаходилось шістьдесят кадрів, що для відео з частотою 24 кадри в секунду рівне 2.5 секунди затримки.

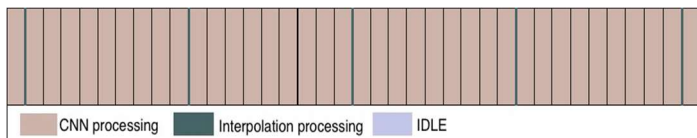


Рис. 13 Розподіл часу опрацювання при сталому значенні K яке створює затримку при опрацюванні

На (рис. 13) наведено розподіл використання часу для попереднього прикладу. На діаграмі наведено часовий проміжок довжиною дві секунди. Як можна помітити, в системі зовсім відсутній час без дії. Проаналізувавши останній приклад стає зрозумілим чому модель з константним інтервалом використання нейронної мережі не є ефективною. Вона не може підлаштовуватись під стан середовища, де виконується опрацювання, та не може реагувати на її зміни. Також серед недоліків можна виділити надто велику залежність від початково вибору значення K, що можна побачити проаналізувавши два наведених приклади. Тепер розглянемо результати виконання тестування на запропонованому нами методі опрацювання з динамічним інтервалом використання нейронної мережі.

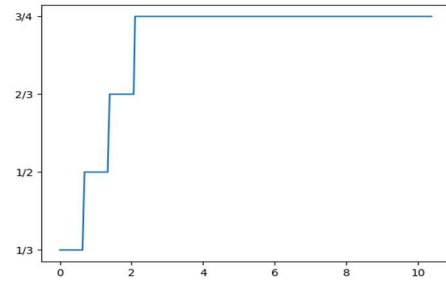


Рис. 13 Зміна значення K протягом проведення тестування

Для першого тесту нашої системи початкове значення K було встановлено  $\frac{1}{3}$ . Як можна помітити на (рис. 13) алгоритмом було помічено що значення можна збільшувати без створення затримки, що і було зроблено. Фінальне значення K було встановлено на рівні  $\frac{3}{4}$ , що значно більше початково та однозначно покращує точність опрацювання.

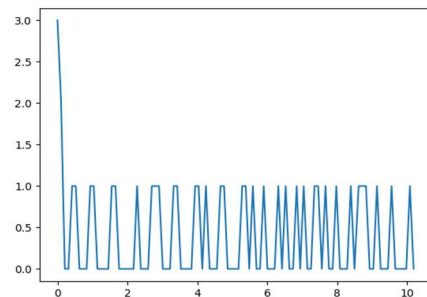


Рис. 14 Функціональна схема опрацювання відеопотоку з використанням нейронної мережі

На (рис. 14) наведено розмір вхідної черги для відповідного тесту. Як можна помітити, черга залишається порожньою, що свідчить про коректний час опрацювання без створення затримки при опрацюванні.

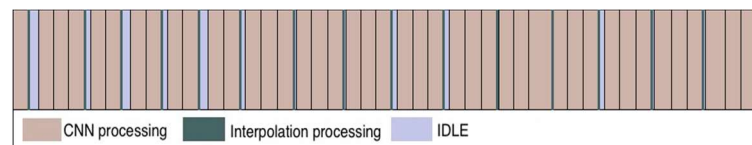


Рис. 15 Розмір вхідної черги при динамічному значенні K

На (рис. 15) наведено розподіл використання часу для попереднього прикладу. На діаграмі наведено часовий проміжок довжиною дві секунди. Як можна помітити, відображено проміжок переходу зі значення K  $\frac{2}{3}$  до  $\frac{3}{4}$ . Як бачимо, наш метод зміг помітити, що проміжки бездії системи були достатніми для додавання ще одного опрацювання нейронною мережею.

Тепер розглянемо більш складний приклад, при якому ми будемо моделювати зміну навантаження на систему опрацювання. Дана зміна буде реалізована шляхом

штучного збільшення часу опрацювання кадру нейронною мережею через певний проміжок часу після початку тесту та повернення до початкового значення після.

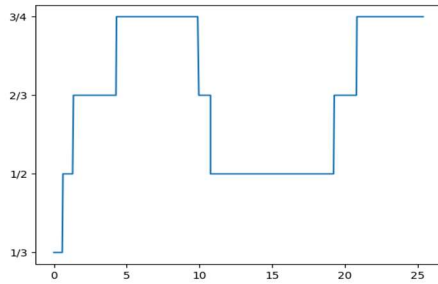


Рис. 16 Зміна значення К протягом проведення тестування зі зміною навантаження

На (рис. 16) наведено зміну значення К під час проведення тестування. Між десятою та двадцятою секундою можна спостерігати зменшення частоти використання нейронної мережі, адже було штучно збільшено час її виконання. Після того, як додаткове навантаження було прибрано, система сама повернулась до максимально можливого значення К.

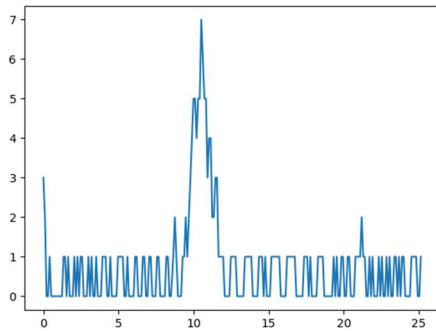


Рис. 17 Розмір вхідної черги при динамічному значенні К зі зміною навантаження

На (рис. 17) наведено зміну розміру вхідної черги на цьому ж прикладі. Можна помітити, що після штучного збільшення часу роботи нейронної мережі, черга почала

заповнюватись неопрацьованими відеокадрами, проте вже протягом наступних декількох секунд ситуація була стабілізована шляхом зменшення частоти використання нейронної мережі.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Botta A., Donato W., Persico V., Pescapé A. Integration of Cloud computing and Internet of Things: A survey. *Future Generation Computer Systems*. 2016. Vol. 56. P. 684-700.
- [2] Duanmu Zh., Zeng K., Ma K., Rehman A., Wang Zh. A Quality-of-Experience Index for Streaming Video. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*. 2017. Vol. 11, Is. 1. P. 154-166.
- [3] Ibrahim N., Maurya P., Jafari O., Nagarkar P. A Survey of Performance Optimization in Neural Network-Based Video Analytics Systems. *Arxiv.org*. 10.05.2021. URL: <https://arxiv.org/abs/2105.14195> (дата звернення: 15.05.2022).
- [4] Maksymenko S. Deep Learning-based Real-time Video Processing. *KDnuggets*. 17.02.2021. URL: <https://www.kdnuggets.com/2021/02/deep-learning-based-real-time-video-processing.html> (дата звернення: 22.05.2022).
- [5] Solovyev R., Kustov A., Telpukhov D., Rukhlov V., Kalinin A. Fixed-Point Convolutional Neural Network for Real-Time Video Processing in FPGA. 2019 *IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus)*. (Sankt-Peterburg, 28-31 January 2019). *Ieexplore.ieee.org*. 2019. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8656778>. (дата звернення: 10.05.2022).
- [6] Aliyu A., Abdullah A. H., Kaiwartya O., Cao Y., Lloret J., Aslam N., Joda U.M. Towards video streaming in IoT Environments: Vehicular communication perspective. *Computer Communications*. 2018. Vol. 118. P. 93-119.
- [7] Sodagar I. The MPEG-DASH Standard for Multimedia Streaming Over the Internet. *IEEE MultiMedia*. 2011. Vol., 18, Is. 4. P. 62-67.
- [8] Busse I., Deffner B., Schulzrinne H. Dynamic QoS control of multimedia applications based on RTP. *Computer Communications*. 1996. Vol. 19, Is. 1. P. 49-58.
- [9] Schulzrinne H., Casner S., Frederick R., Jacobson V., TP: A Transport Protocol for Real-Time Applications. *Network Working Group*. 1996.
- [10] Akhlaq M., Sheltami T. R. RTSP: An Accurate and Energy-Efficient Protocol for Clock Synchronization in WSNs. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 2013. Vol. 62, N 3. P. 578-589.
- [11] Kung S.-Y., Hwang J.-N. Neural networks for intelligent multimedia processing. *Proceedings of the IEEE*. 1998. Vol. 86, N 6. P. 1244-1272.
- [12] Berc L., Fenner W., Frederick R., McCanne S., Stewart P. RTP Payload Format for JPEG-compressed Video. *Network Working Group*. 1998. URL: <https://www.rfc-editor.org/rfc/rfc2435>. (дата звернення: 9.05.2022)



# Новий метод отримання контурів зображень

Ярослав Луц  
Відділ оптимізації чисельних методів  
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
rorr-t@ukr.net

## A new method for obtaining image contours

Yaroslav Luts  
Department of Optimization of Numerical Methods  
V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
rorr-t@ukr.net

**Анотація**— Запропоновано новий метод отримання контурів зображення, використовуючи відомий дельта-алгоритм.

**Abstract**— A new method of obtaining image contours using the well-known delta algorithm is proposed.

**Ключові слова**— контури, дельта-алгоритм

**Keywords**— contours, delta algorithm

### I. ВСТУП

Виділення контурів — це потужний інструмент для аналізу зображень, який можна використовувати для різних застосувань. Це процес виділення країв об'єктів на зображенні та надання їм видимості. Виділення контурів можна використовувати для ідентифікації та сегментації об'єктів на зображенні, виявлення об'єктів і форм і аналізу їхніх властивостей.

Виділення контурів зазвичай використовується в поєднанні з іншими методами обробки зображень, такими як виявлення країв і сегментація. Виявлення країв використовується для визначення меж об'єктів, тоді як сегментація використовується для поділу зображення на різні області. Потім для визначення форми об'єкта чи області використовується виділення контурів.

Процес виділення контуру починається з виявлення країв об'єкта. Це робиться шляхом застосування до зображення фільтра, який може виявляти краї. Потім відфільтроване зображення сегментується на різні регіони. Краї кожної області виявляються, а потім краї витягуються.

Витягнуті краї потім використовуються для визначення форми об'єкта. Це робиться за допомогою математичних алгоритмів для підгонки лінії до країв. Лінію можна використовувати для визначення форми об'єкта.

Після визначення форми об'єкта можна проаналізувати властивості об'єкта. Це включає вимірювання розміру та орієнтації об'єкта, а також визначення його текстури та кольору. Цю інформацію потім можна використовувати для різних програм, таких як розпізнавання об'єктів, відстеження та класифікація.

### II. ОПИС МЕТОДУ ЗНАХОДЖЕННЯ КОНТУРІВ ШЛЯХОМ ВИКОРИСТАННЯ ДЕЛЬТА-АЛГОРИТМУ

#### Дельта-алгоритм

Одним із методів стиску даних без втрат є так званий дельта-алгоритм [1], що полягає в обчисленні відносних різниць між сусідніми значеннями. Його застосування було більш доцільне для 1D даних (сигналів), ніж для 2D даних (зображень), оскільки блочні перетворення працюють з 2D кореляцією даних. Але застосування дельта-алгоритму до зображень дає можливість знайти найбільші перепади між сусідніми значеннями.

#### Знаходження контурів

Оскільки для зображення можливо знаходження різниць як між сусідніми значеннями в рядках, так і в стовпцях, то виникають три модифікації, версії методу знаходження контурів шляхом використання дельта-алгоритму:

- Обчислення горизонтальних різниць
- Обчислення вертикальних різниць
- Одночасне узгоджене обчислення горизонтальних і вертикальних різниць

Звісно, що отримані дельта-алгоритмом різниці між сусідніми пікселями беруться по модулю, оскільки значення пікселів можуть бути лише додатніми.

Відповідно, для кращого відображення контурів можна зробити суму двох зображень — вертикальних та

горизонтальних різниць. Це збільшує яскравість отриманих контурів.

На відміну від класичних методів визначення контурів [2], де вони відображаються однобітовими зображеннями, даний підхід дає кольорові контури. Відповідно, можна просувувати і досліджувати як сумарні контури по трьом каналам кольору, так і кольорові.

### III. ПОРІВНЯННЯ ЗАПРОПОНОВАНИХ АЛГОРИТМІВ ВИЗНАЧЕННЯ КОНТУРІВ

Для наочності наведемо результат знаходження горизонтальних різниць для двох тестових зображень, які дано на рисунках 1 і 2. На рисунках 3-5 дано контури для першого зображення, а 6 – інтегральні контури для другого зображення, з високою кореляцією пікселів.



Рис. 1. Тестове зображення з середньою кореляцією між пікселями.



Рис. 2. Тестове зображення з високою кореляцією між пікселями



Рис. 3. Сума вертикальних і горизонтальних різниць по модулю

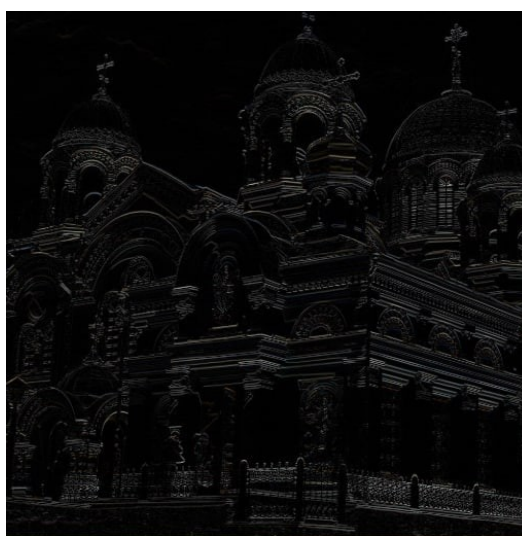


Рис. 4. . Контури на базі вертикальних різниць



Рис. 5. Контури на базі горизонтальних різниць

Для зображення з рисунку 2 дамо лише сумарні контури, оскільки вони краще передають повноту, інформативність за вертикальні та горизонтальні.

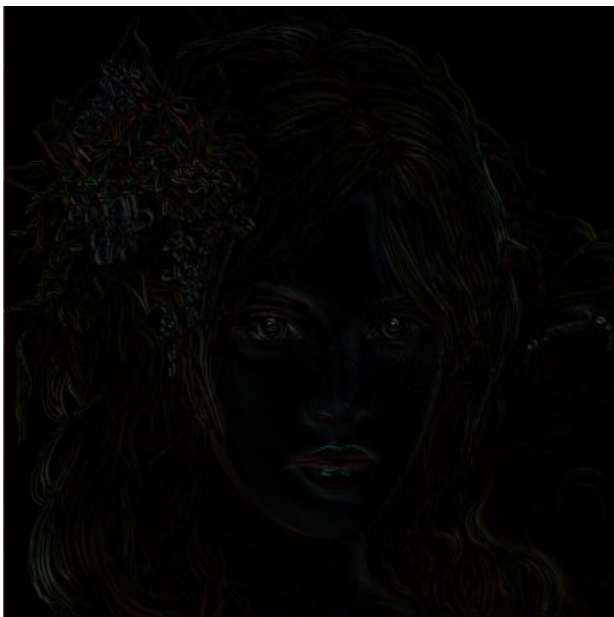


Рис. 6. Контури на базі сумарних різниць

#### IV. ПОРІВНЯННЯ З ВІДОМИМИ МЕТОДАМИ ВИЗНАЧЕННЯ КОНТУРІВ

Порівняємо відомий алгоритм виділення контурів Canny [3] з запропонованим. На рисунку 7 показано контури на основі сумарних різниць, отриманих за дельта-алгоритмом, на рисунку 8 – контури за алгоритмом Canny для зображення, що дано на рисунку 9.

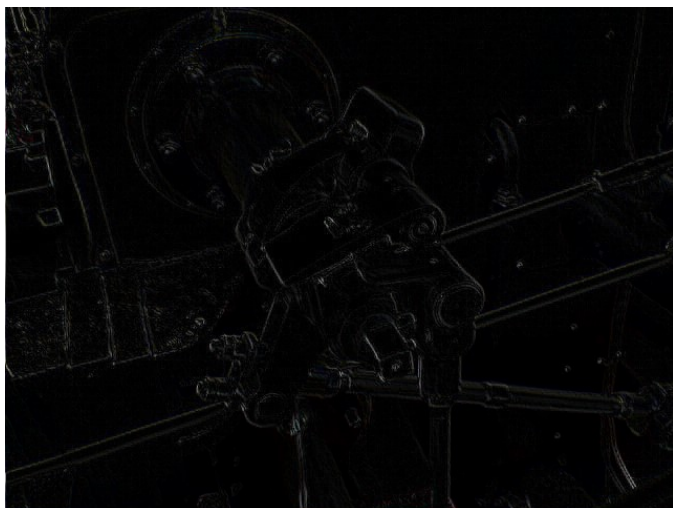


Рис. 7. Контури на основі запропонованого методу

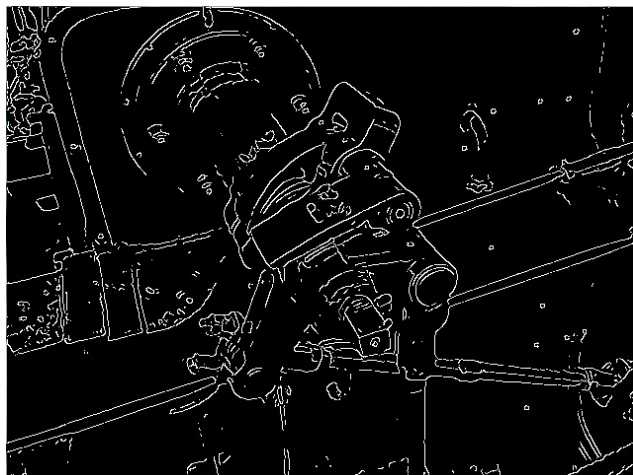


Рис. 8. Контури на основі алгоритму Canny

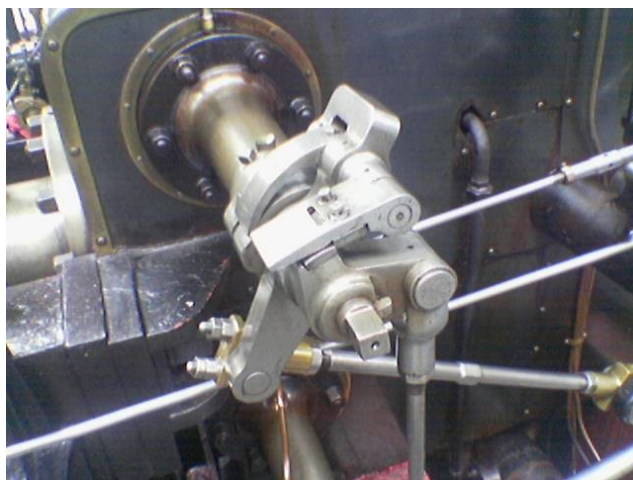


Рис. 9. Оригінальне зображення

Висновки. Запропонований метод виділення контурів відзначається простотою реалізації і достатньо високою точністю. Потрібні подальші дослідження універсальності застосування для різних типів зображень, та використання контурів з широкою палітрою кольорів, або зменшення їх розрядності до традиційних.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] P. Rafael C. Gonzalez • Richard E. Woods. Digital Image Processing, 2005 – 1007с
- [2] David Salomon. Data Compression: The Complete Reference. Springer 2007
- [3] .E. R. Davies Computer Vision: Principles, Algorithms, Applications, Learning. Academic Press; 5th edition 2017

# Комплексні підходи та моделі для кодування та обробки зображень

Василь Луц  
Відділ оптимізації чисельних методів  
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
vkluts@gmail.com

## Complex approaches and models for coding and processing images

Vasyl Luts  
Department of Optimization of Numerical Methods  
V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
vkluts@gmail.com

**Анотація**— Розглядаються комплексні підходи та моделі в області кодування та обробки зображень. Запропоновано модифікацію базового алгоритму lcevc

**Abstract**— Complex approaches and models in the field of coding and image processing are considered. A modification of the basic LCEVC algorithm is proposed

**Ключові слова**—комплексні моделі, кодування зображень, обробка зображень

**Keywords**— complex models, image coding, image processing)

### I. ВСТУП

Оскільки моделі є спрощеними, обмеженими проекціями прототипів та мають неусувні похибки, з метою покращення результатів їх застосування можливі два різні підходи:

- поглиблення, деталізація моделі в рамках обраних установок, аксіом та правил,
- застосування альтернативних підходів та доповнюючих моделей

Основна проблема побудови моделей – висока складність реального світу. Відповідно, пропонується більш широко використовувати комплексні моделі, які є результатом спільного, сумісного, комплексного використання різних моделей та підходів.

Складність узгодження різних моделей є основною перепорою на шляху розвитку концепції комплексного

моделювання. Розглянемо конкретні приклади узгодження моделей різних типів та формування комплексних підходів.

### II. ПРИКЛАДИ КОМПЛЕКСНОГО ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛЕЙ РІЗНИХ ТИПІВ

#### *Блочні перетворення і вейвлет-перетворення*

Технологія і концепція вейвлет-перетворень [1] зазвичай розглядається як альтернатива блочних перетворень [2]. Що заважає створити новий підхід, який об'єднує переваги обох концепцій.

Визначимо ключові риси та відмінності кожної технології, та спробуємо знайти їх спільну реалізацію. Можливих варіантів комбінацій декілька, але ми розглянемо лише один.

Блочне перетворення – це перетворення одного рівня.

Вейвлет-перетворення – це перетворення декількох рівнів (масштабуючі коефіцієнти першого рівня обробляються перетворенням другого рівня, масштабуючі коефіцієнти другого рівня – обробляються перетворенням третього рівня, і т.д.)

Чи можна запропонувати версію блочних перетворень, які теж мають декілька рівнів?

Так, і саме це реалізовано в кодуку LCEVC. Значення пікселів вищого рівня є середнім значенням блоку пікселів нижчого рівня. А середнє значення блоку пікселів – це і є аналог масштабуючого коефіцієнту (якщо провести його обернене перетворення – отримаємо якраз середнє значення блоку пікселів).

Але в кодеку зроблено ще краще, ніж у вейвлетів – на нижніх рівнях кодуються не більш детальні зображення, а різниці між середнім значенням блоку пікселів та кожним значенням пікселів з блоку. Що дозволяє більш точно відновлювати зображення, оскільки різниці несуть менше інформації, ніж зображення в цілому.

#### *Дельта-алгоритм кодування і блочні перетворення*

Комплексне, узгоджене використання дельта-алгоритму кодування даних (обчислення різниць між сусідніми відліками, значеннями) з блочними перетвореннями є тривіальним: результати, отримані після дельта-алгоритму кодування зображень, додатково стискаються блочними перетвореннями.

Чому цей варіант свого часу не був перевірений, реалізований? Невідомо. Спочатку блочними перетвореннями стискалися абсолютні значення пікселів зображень, а пізніше – з'явилися алгоритми передбачення значень пікселів, і блочними перетвореннями вже стискали різниці між передбаченими та реальними значеннями пікселів блоку. А дельта-алгоритм по суті може виступати в якості універсального алгоритму передбачення значень пікселів, як і середнє значення блоку (що і реалізовано в LCEVC [3], де пікселі меншого зображення є середнім значенням блоку більшого зображення).

#### *Комплексне використання дельта-алгоритму, блочних перетворень і вейвлет-перетворень.*

Нескладно об'єднати та застосувати ідеї дельта-алгоритму в якості алгоритму передбачення значень пікселів, блочних перетворень та ідеї декількох рівнів обробки від вейвлет-перетворень.

Розглянемо дві можливі модифікації алгоритмів LCEVC з урахуванням дельта-алгоритму.

1. Пікселі зображення вищого рівня формуються, обчислюються як середнє значення блоків пікселів нижчого рівня, як і зараз. Але при обчисленні різниць обчислюється тільки різниця між середнім значенням блоку та першим значенням пікселя блоку, а для другого і наступних пікселів блоку – використовується дельта-алгоритм, тобто обчислюються різниці між сусідніми значеннями пікселів блоку.
2. Пікселі зображення вищого рівня є значеннями першого пікселя з блоку пікселів нижчого рівня. При цьому варіанті нема потреби обчислювати середнє значення блоку пікселів.

Також залишається варіант просто стиску блочними перетвореннями результату сигма-алгоритму. Він має недолік – неможливо обчислити окремі фрагменти зображення, потрібно декодувати ціле зображення. І має перевагу – не треба кодувати та передавати проміжні зображення, достатньо значення одного першого пікселя. Можливо, в результаті експериментів буде визнано перспективним варіант з меншою кількістю блоків (і пікселів зображень вищих рівней).

### III. ОЦІНКА ЗАПРОПОНОВАНИХ МОДИФІКАЦІЙ LCEVC

Зробимо попередню оцінку запропонованих комплексних підходів, з метою оцінки запропонованої концепції комплексних моделей на основі моделей різних типів.

Розглянемо тестове зображення «фото» (рисунок 1), та результати обчислення різниць дельта-алгоритмом (рисунок 2) і алгоритмом LCEVC (тобто різниці між середнім значенням блоку та значеннями пікселів блоку), на рисунку 3.



Рис. 1. Тестове зображення «фото».

Чіткість контурів на рисунку 2 помітно краща, ніж на рисунку 3 (всі різниці взяті по модулю, щоб отримати зображення, і зроблено інверсію – для кращого сприйняття).

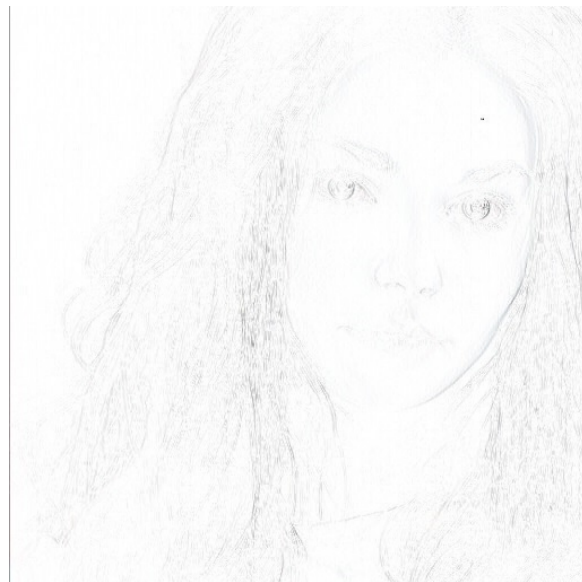


Рис. 2. Різниці між сусідніми пікселами (дельта-алгоритм).

Блочна структура на рисунку 3 досить помітна (були взяті блоки розміру 16, для наглядності)

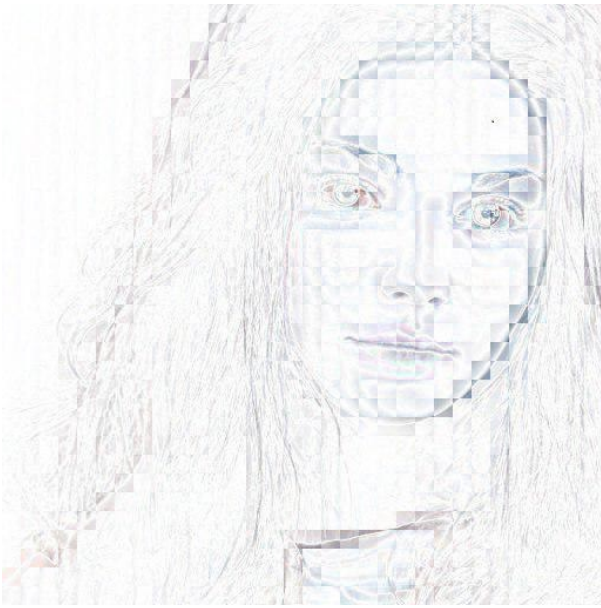


Рис. 3. Різниця між зображенням вищого рівня і нижчого.

Отже, переваги запропонованого комплексного підходу полягають у наступному:

- зменшення об'єму інформації для кодування блочними перетвореннями,
- зменшення об'єму інформації для зображень вищих рівнів (розміри яких можна робити меншими, оскільки вони не впливають на різницю, які отримуються дельта-алгоритмом).

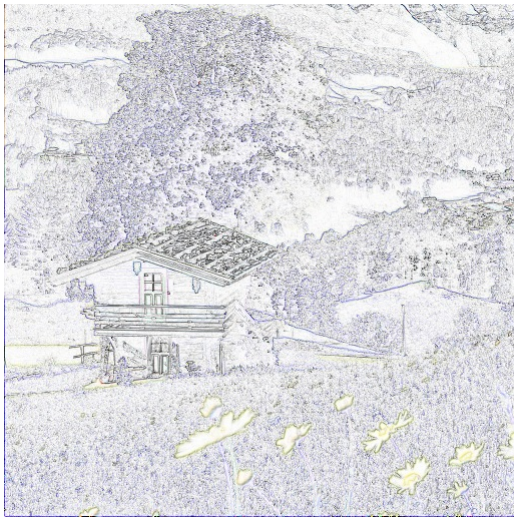


Рис. 4. Різниця дельта-алгоритмом для зображення «пейзаж».

Отже, для різних зон, областей зображення можна застосовувати різні підходи, в залежності від того, який результат буде кращий.

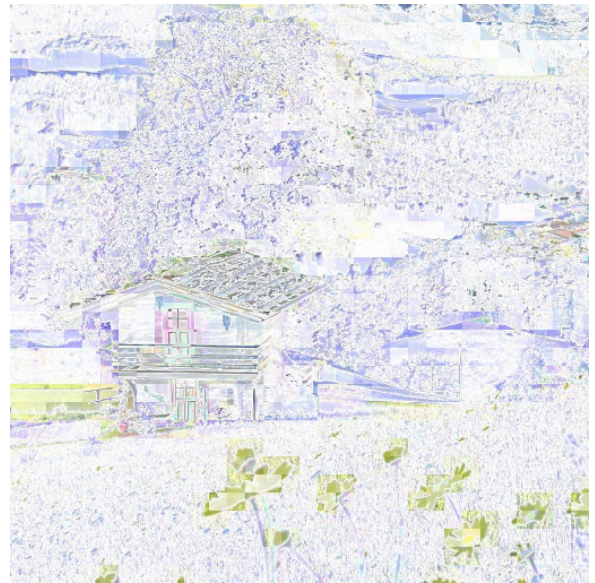


Рис. 4. Різниця за алгоритмом кодека LCEVC

Тобто можливе адаптивне використання обох підходів, в залежності від додаткових факторів та умов, наприклад – для зображень з високою кореляцією пікселів один підхід, а для зображень з низькою (рисунок 4) – інший. Більш детальні дослідження впливу різних умов буде зроблено в наступній статті.

#### *Висновки.*

Концепція комплексного моделювання є інтуїтивно зрозумілою та обґрунтованою, і використовувалась в неявній формі в багатьох випадках.

З іншого боку, значна комбінаторна складність та невизначеність, варіативність варіантів узгодження різних підходів та моделей різного типу між собою ускладнює як можливість неявного застосування комплексних підходів, так і формування теорії комплексного моделювання у явному вигляді.

Наведені приклади демонструють, по-перше, відносну легкість комбінування різних підходів (дельта-алгоритм і блочні перетворення) та низький рівень використання комплексних підходів, що характеризуються відносною легкістю втілення, дослідження.

Розвиток міждисциплінарних теорій, підходів, моделей буде стимулювати подальше використання комбінацій моделей різних типів, як практично, так і на рівні теоретичних досліджень концепції комплексного моделювання, формування принципів узгодження та сумісного використання різнопланових моделей.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] C.K. Chui, An Introduction to Wavelets. Academic Press, Boston, 1992
- [2] David Salomon. Data Compression: The Complete Reference. Springer 2007.
- [3] <https://www.lcevc.org/>

# Спрощення реалізації рекурентних логарифмічних аналого-цифрових перетворювачів

Зиновій Мичуда  
кафедра комп'ютеризованих  
систем автоматики  
Національний Університет  
«Львівська політехніка»  
Львів, Україна  
z\_mychuda@ukr.net

Леся Мичуда  
кафедра безпеки інформаційних  
технологій  
Національний університет  
«Львівська політехніка»  
Львів, Україна  
lesyamychuda@yahoo.com

Ганна Єлісеєва  
кафедра комп'ютеризованих  
систем автоматики  
Національний Університет  
«Львівська політехніка»  
Львів, Україна  
hanna.s.yelisiieva@lpnu.ua

## Simplification of implementation of recurrent logarithmic analog-to-digital converters

Zynoviy Mychuda  
dept. of Computer System of  
Automatics  
National University Lviv Politechnik  
Lviv, Ukraine  
z\_mychuda@ukr.net

Lesya Mychuda  
dept. of Information Technology  
Security  
National University Lviv Politechnik  
Lviv, Ukraine  
lesyamychuda@yahoo.com

Hanna Yelisiieva  
dept. of Computer System of  
Automatics  
National University Lviv Politechnik  
Lviv, Ukraine  
hanna.s.yelisiieva@lpnu.ua

**Анотація** — Запропоновано спосіб побудови рекурентних логарифмічних аналого-цифрових перетворювачів, що дає змогу спростити схемну реалізацію при збереженні заданої точності. Наведено узагальнену структурну схему рекурентного логарифмічного АЦП, що ілюструє цей спосіб.

**Abstract** — A method for constructing recurrent logarithmic analog-to-digital converters is proposed, which allows to simplify the circuit implementation while maintaining the specified accuracy. A generalized block diagram of a recurrent logarithmic ADC is given, which illustrates this method.

**Ключові слова**—логарифмічний аналого-цифровий перетворювач; рекурентний принцип; побудова

**Keywords**—logarithmic analog-to-digital converter; recurrent principle; construction

### I. ВСТУП

Логарифмічні аналого-цифрові перетворювачі (ЛАЦП) поряд з перетворенням аналогових сигналів у цифрову форму дають змогу реалізувати функціональні

перетворення у широкому динамічному діапазоні при забезпеченні сталого значення відносної похибки, здійснювати лінеаризацію характеристик і опрацювання сигналів у логарифмічній арифметиці, завдяки якій такі довготривалі операції лінійної арифметики як множення та ділення зводяться до швидких операцій додавання та віднімання. Таким чином значно швидшим буде і виконання операцій піднесення до степеня чи добування кореня. Збільшення швидкодії особливо важливе для систем реального часу (аеро-космічні апарати, автоматичні системи, роботи тощо), оскільки в них часові затримки недопустимі або мають бути зведені до мінімуму.

У різних технічних сферах для спрощення побудови використовують рекурентні алгоритми, які полягають у запам'ятовуванні останнього значення і використанні його для перетворень чи обчислень.

У роботі [1] здійснено порівняння логарифмічних і лінійних АЦП на підставі біомедичних застосувань, де сигнали мають широкий діапазон. Показано, що логарифмічні АЦП кращі в області менших сигналів, але для великих амплітуд мають більшу абсолютну похибку.

Проте лінійні АЦП мають менший діапазон вхідних сигналів.

У [2] описано реалізацію малопотужного циклічного АЦП на комутованих конденсаторах. Використано структуру конденсаторів типу С-2С. Вихідний код перетворювача відповідає 9-ти двійковим розрядам. Однак характеристика перетворення є лінійною, а не логарифмічною. І це вказує на вузький динамічний діапазон вхідних сигналів.

У роботі [3] наведено рекурентний аналого-цифровий перетворювач з нейронно кодованим зміщенням рівня.

У [4, 5] запропоновано рекурентні логарифмічні АЦП на комутованих конденсаторах з накопиченням заряду. При високій точності вони мають порівняно складне схемне рішення.

У [6,7] досліджено принципи побудови та динамічні властивості, проведено аналіз і моделювання логарифмічних АЦП на комутованих конденсаторах з накопиченням заряду.

Метою даної роботи є дослідження способу побудови рекурентних ЛАЦП для досягнення спрощення схемної реалізації.

## II. ОСНОВНА ЧАСТИНА

Спростити схемну реалізацію рекурентних логарифмічних аналого-цифрових перетворювачів можна шляхом об'єднання функцій окремих вузлів і зменшення кількості розрядів.

Узагальнена структурна схема рекурентного логарифмічного аналого-цифрового перетворювача, що ілюструє запропонований спосіб побудови, наведена на рис. 1. Схема містить Км - компаратор, ГТІ - генератор тактових імпульсів, ЛР - лічильник результату, РР - регістр результату, СУ - схему управління, БФПФ - блок формування показникової функції, в який входять ДН - дільник напруги, П/Ком - перемножувач/комутатор, ЕП1 і ЕП2 - перший і другий елементи пам'яті. На рисунку позначено:  $U_{ВХ}$  і  $U_0$  - відповідно вхідна і опорна напруги,  $U_{k1} - U_{kn}$  - компенсаційні напруги,  $\zeta^n - \zeta^1$  - коефіцієнти передачі дільника напруги по виходах 1 - n,  $N_1$  і  $N_2$  - відповідно старші та молодші розряди вихідного коду,  $F_T$  - тактова частота; А, В, С і ПУСК - керуючі сигнали.

Особливістю реалізації цього ЛАЦП є суміщення дільника напруги з перемножувачем/комутатором, використання конденсаторів як елементів пам'яті та регульованого масштабного перетворювача як дільника напруги, причому в якості регістра результату застосовано регістр послідовних наближень.

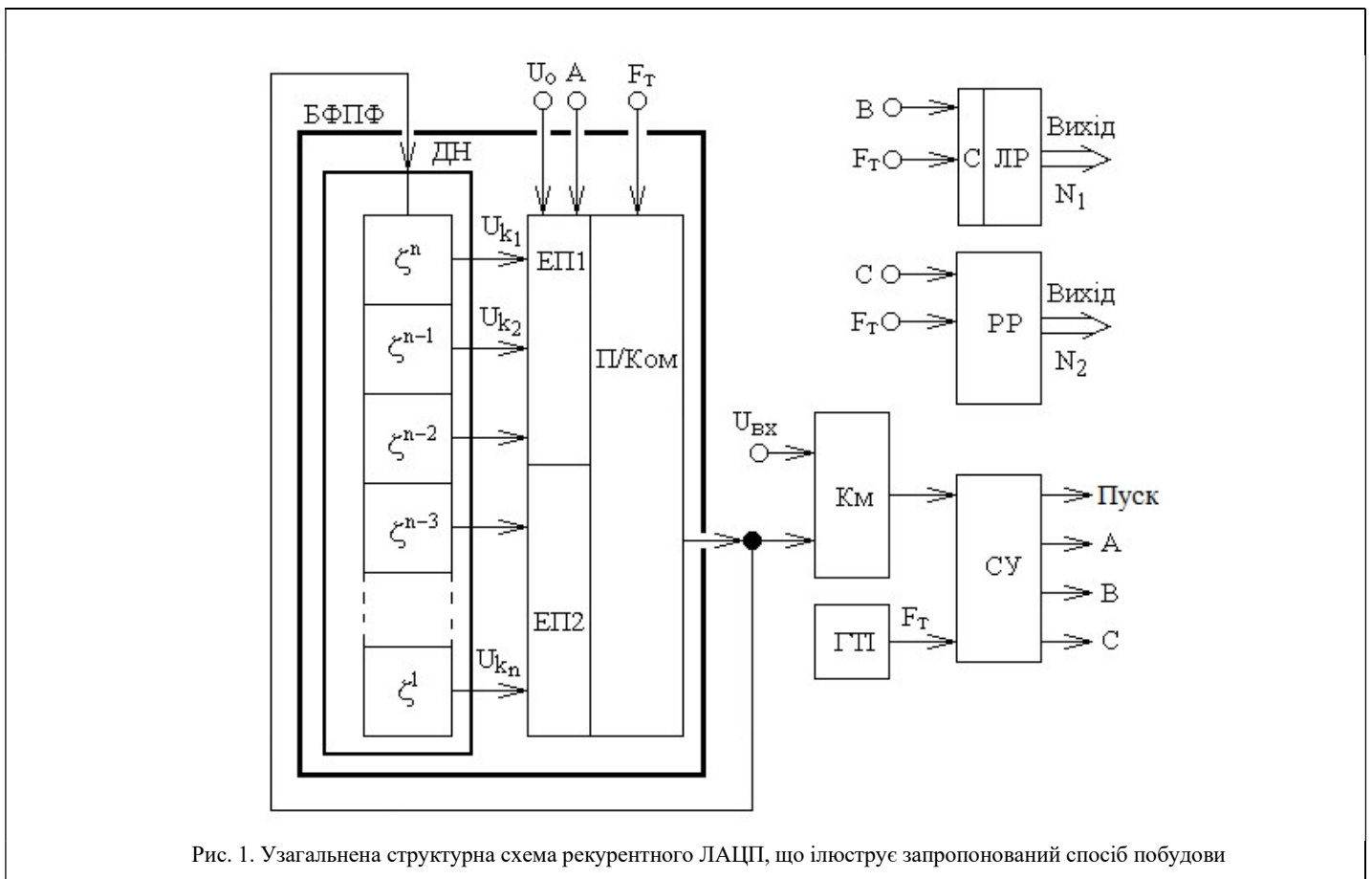


Рис. 1. Узагальнена структурна схема рекурентного ЛАЦП, що ілюструє запропонований спосіб побудови



Сутність роботи рекурентного ЛАЦП (рис.1) полягає в наступному. Сигналом ПУСК всі функціональні вузли ЛАЦП устанавлюються у початкове положення, причому опорна напруга записується в елемент пам'яті ЕПІ. З виходу ЕПІ ця напруга через перемножувач/компаратор подається на вхід дільника напруги, на виході якого відтворюються компенсаційні напруги  $U_{k1} - U_{kn}$ , причому  $U_{k1}$  – має найбільшу вагу, а  $U_{kn}$  – найменшу.

Процес перетворення починається після закінчення сигналу ПУСК і протікає циклічно шляхом опитування ДН від найбільшої ваги до найменшої.

**Перший цикл перетворення.** Комутатор по чергово підключає виходи дільника напруги ДН до входу перемножувача/комутатора П/Ком. Закінчується перетворення на першому циклі тоді, коли буде опитано вихід дільника напруги з найменшою вагою  $U_{kn}$ . Наступний тактовий імпульс записує одиницю у лічильник результату ЛР, а рекурентний ЛАЦП переходить до перетворення у наступному циклі, тобто у другому циклі.

**Наступні цикли перетворення.** У наступних циклах перетворення проходять аналогічно до першого.

У лічильник результату ЛР записується кількість циклів перетворення без урахування останнього. Останнім циклом буде той, на якому вперше спрацював компаратор. Компаратор спрацює при переході компенсаційної напруги на виході блоку формування показникової функції БФПФ через рівень вхідного сигналу.

Після першого спрацювання компаратора запис циклів у лічильник результату ЛР блокується і рекурентний ЛАЦП переходить до роботи на останньому циклі, на якому регістр результату РР працює за відомим алгоритмом послідовних наближень. Вихідний двійковий код РР матиме логічні одиниці у цих розрядах, що відповідають перевищенню рівня компенсаційної напруги над рівнем вхідної ( $U_{ki} > U_{ВХ}$ ) і логічні нулі у розрядах, що відповідають переходу компенсаційної напруги через рівень вхідної ( $U_{ki} < U_{ВХ}$ ).

Остаточну у лічильнику результатів ЛР будуть записані старші розряди вихідного коду, а у регістрі результату РР – молодші.

Взагалі у будь-якому  $i$ -такті в  $m$ -циклі напруга на виході блоку формування показникової функції матиме значення

$$U_{kn} = U_o \prod_{k=1}^m \prod_{i=1}^n \zeta^{a_i} \cdot \frac{N_n}{2^{(k-1)n+i}}$$

Тут  $N_n$  – номінальне значення вихідного коду,  $n$  – кількість тактів у циклі,  $m$  – кількість циклів;  $a_i$  – коефіцієнт, що приймає значення 1 або 0, коли результат порівняння компаратора на  $i$ -такті в  $k$ -циклі є рівний логічним „1” або „0”.

Вихідний код запропонованого рекурентного ЛАЦП

$$N = N_{cm.p.} + N_{m.p.} = 2^n \cdot (m-1) + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{N_n}{2^{(k-1)n+i}}$$

При спрощенні схемного рішення шляхом зменшення розрядності рекурентного ЛАЦП треба збільшувати

кількість циклів перетворення  $m$  згідно формули, яка враховує потрібну точність перетворення

$$m = \frac{N_r}{N_n}$$

Тут  $N_r$  – номінальне значення коду потрібної розрядності

$$(r), N_r = 2^r$$

Час перетворення запропонованого рекурентного ЛАЦП визначається залежністю

$$t_{\Pi} = m \cdot n$$

### III. ВИСНОВКИ

Проведені нами дослідження показують:

1. Спростити схемне рішення рекурентних ЛАЦП можна шляхом об'єднанням функцій окремих вузлів і зменшенням кількості розрядів.
2. Щоб при зменшенні кількості розрядів рекурентних ЛАЦП не було втрати точності, треба збільшувати кількість циклів перетворення, що призводить до збільшення часу перетворення.
3. Зменшувати кількість розрядів рекурентних ЛАЦП більше ніж на 2-4 двійкові розряди недоцільно, оскільки тоді значно зросте час перетворення.

### Література References

- [1] Matteo Pagin, Maurits Ortmanns. (2017). Evaluation of logarithmic vs. linear ADCs for neural signal acquisition and reconstruction // 39th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. July 2017, (pp. 4387–4390).
- [2] N. Bako, A. Baric. (2011). A low-power fully differential 9-bit C-2C cyclic ADC // IEEE 20th European Conference on Circuit Theory and Design, August 2011, (pp. 576–579).
- [3] Aigerim Tankimanova, Akshay Kumar Maan, Alex Pappachen James. (2017) Level-shifted neural encoded analog-to-digital converter [conference-paper]/ 24th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS): 5-8 December 2017, Batumi, Georgia. DOI: [10.1109/icecs.2017.8292026](https://doi.org/10.1109/icecs.2017.8292026)
- [4] Mychuda L. Z. Logarithmic analog-to-digital converter: Pat. 113138 Ukraine. № a201604094, application. 14.04.2016; publ. 12.12.2016, Bull. № 23.
- [5] Z. Myczuda, Patent No. 232384 Polska, „Logarytmiczny przetwornik analogowo-cyfrowy”, 2019, WUP 06/19.
- [6] Zynoviy Mychuda, Lesia Mychuda, Uliana Antoniv, Adam Szczesniak. „Logarithmic ADC with accumulation of charge and impulse feedback – construction, principle of operation and dynamic properties”, International Journal of Electronics and Telecommunications, Vol. 67, No 4 (2021), pp. 699-704. DOI:0.24425/ijet.2021.137865.
- [7] Zynoviy Mychuda, Lesia Mychuda, Uliana Antoniv, Adam Szczesniak. „Logarithmic ADC with accumulation of charge and impulse feedback – analysis and modeling”, International Journal of Electronics and Telecommunications, Vol. 67, No 4 (2021), pp. 705-710. DOI:0.24425/ijet.2021.137866

# Модифікація циклічних кодів за допомогою операції перфорації

Василь Семеренко, Олександр Войналович  
кафедра обчислювальної техніки,  
Вінницький національний технічний університет  
Вінниця, Україна  
vpsemerenko@ukr.net, sashavoinalovich@gmail.com

## Modification of cyclic codes by help operation of perforation

Vasyl Semerenko, Oleksandr Voinalovych  
Department of Computer Technique  
Vinnytsia National Technical University  
Vinnytsia, Ukraine,  
vpsemerenko@ukr.net, sashavoinalovich@gmail.com

*Анотація Розглядається операція перфорації (виколювання) циклічних кодів. Пропонується перевірочні розряди, які вилучаються, позначати як “стерті”. Для декодування таких кодів використовується автоматна модель циклічних кодів на основі теорії лінійних послідовнісних схем.*

*Ключові слова: циклічні коди, модифікація кодів, перфорація кодів, лінійна послідовнісна схема.*

*Abstract The operation of perforation (puncturing) of cyclic codes is considered. Check bits, which are deleted, are designated as “erased”. To decode such codes, an automaton model of cyclic codes based on the theory of linear finite-state machine.*

*Keywords: cyclic codes, code modification, code perforation, linear finite-state machine*

### I. ВСТУП

В багатьох галузях науки і техніки широко використовуються різноманітні системні компроміси. Наприклад, в каналах цифрового зв'язку можна досягти високої достовірності даних різними способами: або збільшуючи потужність передавача, або використовуючи спеціальні кодові перетворення даних. В самих завадостійких кодах можна збільшити кількість додаткових перевірочних розрядів при зменшенні швидкості передачі даних, або збільшити швидкість передачі даних при зменшенні коректувальної здатності коду [1].

Розглянемо детальніше кодові компроміси в завадостійких кодах в задачах виявлення та виправлення помилок. Основну увагу приділимо циклічним кодам [2]. В

циклічному  $(n, k)$ -коді  $n$ -розрядне кодове слово складається з  $k$ -розрядного інформаційного слова та  $r$ -розрядного перевірочного слова ( $r = n - k$ ). Чим більший параметр  $r$ , тим більше помилок може виявити та виправити такий код. Але, тоді по каналу зв'язку за одиницю часу передається менше корисної інформації, тобто падає швидкість коду. Далі потрібно врахувати, що кодові параметри  $n, k, r$  не можуть бути довільними, а мають ряд обмежень.

В результаті маємо нетривіальну задачу вибору оптимальних кодових параметрів для конкретних умов. Традиційно така задача розв'язується за допомогою операцій модифікацій коду.

Для прикладу модифікації з метою підвищення коректувальної здатності коду розглянемо операцію перфорації (виколювання) коду [3].

Для задач модифікації найчастіше використовується спосіб задання цих кодів за допомогою перевіряльної матриці  $H$ . Розглянемо інтерпретацію операції перфорації в циклічних кодах на основі математичного апарату лінійних автоматів.

### II. ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ОПЕРАЦІЇ ПЕРФОРАЦІЇ НА ОСНОВІ АВТОМАТНИХ МОДЕЛЕЙ

В загальному випадку перфорація полягає в тому, що кодер на боці передавача на основі  $k$ -розрядного інформаційного слова формує  $r$ -розрядне перевірочне слово, однак в канал передається лише  $(r - h)$  перевірочних розрядів (інформаційне слово передається без змін). Загальна довжина кодового слова зменшується на

константу  $h$ , але дані передаються швидше, що є перевагою такого способу кодової модифікації. На боці приймача ускладнюється задача перевірки правильності передачі даних, оскільки необхідно врахувати особливості різних типів помилок.

Найпоширенішим типом помилок є інверсні помилки ("1" переходять в "0" і навпаки). виправити такі помилки важко. Зовсім інша ситуація з помилками типу "стирання". При перфорації перевірочні розряди, які вилучаються, позначаються як "стерті". Оскільки розташування "стертих" розрядів відомо на боці приймача, тому їх відносно легко декодувати.

Традиційне завадостійке кодування в системах передачі даних орієнтовано на двійково-симетричну модель каналу та інверсну модель помилок. Така математична модель може використовуватись кодером на стороні передавача, який використовує елементи даних із множини  $M = \{0, 1\}$ . Розряди кодового слова, який поступає з виходу демодулятора на боці приймача даних, можуть приймати значення з множини  $M_X = \{0, 1, x, \bar{x}\}$  (символи  $x, \bar{x}$  будуть позначати стирання  $x \in \{0, 1\}$ ).

Як показали дослідження, алгебраїчна структура для множини елементів  $M_X$  із операціями додавання та множення відповідає всім ознакам комутативного кільця  $R$  [4]. Тому для операцій декодування можна використати автоматну модель циклічних кодів над комутативним кільцем  $R$  на основі теорії лінійних послідовнісних схем (ЛПС) [5].

Ця модель циклічних кодів над комутативним кільцем  $R$  на основі теорії лінійних послідовнісних схем (ЛПС) базується на функції переходів

$$S(t+1) = A \times S(t) + B \times U(t), \quad R$$

і функції виходів

$$Y(t) = C \times S(t) + D \times U(t), \quad R,$$

де  $A, B, C, D$  – характеристичні матриці ЛПС;  $S(t)$  – слово стану;  $U(t)$  – вхідне слово;  $Y(t)$  – вихідне слово.

### III. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПОМИЛОК ТА АЛГОРИТМИ ЇХ ВИПРАВЛЕННЯ

Розглянемо окремо тип помилок, які ефективно декодуються за допомогою циклічних кодів – пакети стирань.

Такі помилки дозволяють збільшити кількість виправлених стирань з окремими стираннями по всій довжині кодового слова. При цьому довжина максимального виправленого пакета стирань буде вдвічі

більшою максимального виправленого пакета інверсного пакета помилок.

Із всіх типів помилок найпростіше декодуються і виправляються суцільні пакети стирань. Якщо кількість виправлених стирань окремих кодових розрядів, як і інверсних помилок, обмежена величиною кодової відстані, то довжина виправленого пакета стирань обмежена тільки параметром  $r$ . Тому в розріджених пакетах стирань доцільно всі розряди помічати як стерті і розглядати їх як суцільний пакет стирань.

### IV. ВИСНОВКИ

Розглянуті методи модифікації двійкових циклічних кодів дозволяють збільшувати або зменшувати коректувальну здатність кодів при збереженні існуючих форматів даних. Це полегшує впровадження запропонованих методів в різноманітних системах передавання даних, зокрема, в системах з використанням кодів CRC.

Враховуючи велике розповсюдження циклічних кодів є доцільним розробити автоматну інтерпретацію для всіх базових класів модифікації. В попередніх роботах [5, 6] вже була дана автоматна інтерпретація для таких операцій: поповнення коду, звуження коду, вкорочення коду.

Метод модифікації, при якому швидкість коду зростає за рахунок зменшення перевірочних розрядів, використовується і в сучасних завадостійких кодах. Наприклад, кодер паралельного турбокоду передає в канал кодові слова, які складаються з однієї інформаційної послідовності та двох перевірочних послідовностей. Тобто швидкість такого турбокоду дорівнює  $\frac{1}{3}$ . Якщо забрати одну перевірочну послідовність, тоді швидкість зростає до  $\frac{1}{2}$ .

Схожі операції використовуються і в інших кодах.

### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Б. Скляр Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2-е, испр. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2004. – 1104 с.
- [2] Р. Блейхут Теория и практика кодов, исправляющих ошибки – М.: Мир, 1986. – 477 с..
- [3] Р. Морелос-Сарагоса . Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение . – М.: Техносфера, 2006. – 320 с.
- [4] Э. Фрид. Элементарное введение в абстрактную алгебру – М.: Мир, 1979. – 260 с.
- [5] В.П. Семеренко. Теория циклічних кодів на основі автоматних моделей : монографія. Вінниця : ВНТУ, 2015. – 444 с. .
- [6] В.П. Семеренко, О.Ю. Войналович. Модифікація циклічних кодів на основі автоматних моделей. *Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання*: матеріали статей міжнар. наук.-практ. конф., 5-10 липня 2021 р. Івано-Франківськ : п. Голіней О. М., 2021- С. 69-70.

# Відновлення розривних функцій без явища Гіббса з використанням сплайнів та методу скінченних сум Фур'є

Олег М. Литвин

кафедра інформаційно комп'ютерних технологій  
і математики  
Українська інженерно-педагогічна академія  
Харків, Україна  
academ\_mail@ukr.net

Олександра Литвин

кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет  
радіоелектроніки  
Харків, Україна  
oleksandra.litvin@nure.ua

Олег О. Литвин

кафедра інформаційно комп'ютерних технологій  
і математики  
Українська інженерно-педагогічна академія  
Харків, Україна  
olegolitvin55@gmail.com

Наталія Манчинська

кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Харків, Україна  
natali.manchinska@nure.ua

## Reconstruction of discontinuous functions without the Gibbs phenomenon using splines and the method of Fourier finite sums

Oleg M. Lytvyn

department of Informational Computer Technologies  
and Mathematics  
Ukrainian Engineering-Pedagogical Academy  
Kharkiv, Ukraine  
academ\_mail@ukr.net

Oleksandra Lytvyn

department of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
oleksandra.litvin@nure.ua

Oleg O. Lytvyn

department of Informational Computer Technologies  
and Mathematics  
Ukrainian Engineering-Pedagogical Academy  
Kharkiv, Ukraine  
olegolitvin55@gmail.com

Nataliia Manchynska

department of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
natali.manchinska@nure.ua

*Анотація*—Робота присвячена відновленню розривних функцій за їх відомими проєкційними даними, які поступають з комп'ютерного томографа. Використовується метод, заснований на використанні розривних сплайнів і методу скінченних сум Фур'є. Застосування цього підходу дозволило усунути явище Гіббса, яке виникає при використанні сум Фур'є для відновлення розривних функцій. Розглядається випадок, коли лініями розриву є система границь прямокутників, з об'єднання яких формується об'єкт

дослідження. Наведена чисельна реалізація методу. Отримано результати, що підтверджують ефективність методу.

*Abstract*—The work is devoted to the restoration of discontinuous functions based on their known projection data obtained from a computer tomograph. The method based on the use of discontinuous splines and the method of finite Fourier sums is used. Using this approach made it possible to eliminate the Gibbs phenomenon, which occurs when using Fourier sums to restore

discontinuous functions. The case is considered when the break lines are a system of rectangle boundaries, the union of which forms the research object. The numerical implementation of the method is presented. The results confirming the effectiveness of the method were obtained.)

*Ключові слова*—комп'ютерна томографія, розривна функція, розривний сплайн, клас диференційовності, явище Гіббса, сума Фур'є.

*Keywords*—computed tomography, discontinuous function, discontinuous spline, class of differentiation, Gibbs phenomenon, Fourier sum.

## I. ВСТУП

Теоретичні засади методу відновлення розривних функцій двох змінних за відомими проєкційними даними з використанням розривних сплайнів та скінченних сум Фур'є без явища Гіббса наведено в роботі авторів [1]. Вважалося, що лінії розриву наближуваної функції відомі і запропоновано будувати такий розривний сплайн, щоб різниця між наближуваною функцією і цим сплайном була неперервною або диференційовною функцією. Ці функції наближуються методом скінченних сум Фур'є з використанням проєкцій [2].

Побудова розривних сплайнів і реалізація методу наведена в роботах [3–5]. Лініями розриву були системи концентричних кіл, еліпсів з одним центром, квадратів з одним центром.

У даній статті для демонстрації методу розглянуто випадок, коли лініями розриву є система границь прямокутників, вкладених один в одній. Пропонується метод побудови розривного сплайна так, щоб різниця між наближуваною функцією і цим сплайном була неперервною. Для відновлення цієї функції використовується метод скінчених сум Фур'є. Це дозволяє наближувати розривну функцію з більш високою точністю без явища Гіббса при заданій кількості проєкцій. У даній роботі викладено метод побудови такого сплайна та метод знаходження проєкцій для вказаної неперервної функції. Зазначимо, що при побудові таких розривних сплайнів істотно використовуються оператори сплайн-інтерляції [6].

Відмітимо, що у роботах [7–9] для зменшення впливу явища Гіббса на точність наближення розривної функції сумами Фур'є використовувався метод домноження коефіцієнтів Фур'є на спеціально підібрані експоненціальні множники. Але при цьому явище Гіббса не зникало повністю.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Вважаємо, що область, в якій задана розривна функція  $f(x, y)$ , належить квадрату  $D = [0, 1]^2$ . Розіб'ємо цю область на  $M + 1$  підобластей  $D_k$ ,  $k = \overline{1, M + 1}$ . Границі цих областей  $\Gamma_k$ ,  $k = \overline{1, M + 1}$ , є лініями розриву функції  $f(x, y)$ . Ці лінії розриву є границями прямокутників.

$$D_l = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} 0.5 - t_{l,1} \leq x \leq 0.5 + t_{l,1}, \\ 0.5 - t_{l,2} \leq y \leq 0.5 + t_{l,2} \end{array} \right\},$$

$$D_k = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} 0.5 - t_{k,1} \leq x \leq 0.5 + t_{k,1}, \\ 0.5 - t_{k,2} \leq y \leq 0.5 + t_{k,2} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ (x, y) : \begin{array}{l} 0.5 - t_{k-1,1} \leq x \leq 0.5 + t_{k-1,1}, \\ 0.5 - t_{k-1,2} \leq y \leq 0.5 + t_{k-1,2} \end{array} \right\}, k = \overline{2, M},$$

$$D_{M+1} = D \setminus \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} 0.5 - t_{M,1} \leq x \leq 0.5 + t_{M,1}, \\ 0.5 - t_{M,2} \leq y \leq 0.5 + t_{M,2} \end{array} \right\},$$

$$0 < t_{1,1} < t_{2,1} < \dots < t_{M,1} < t_{M+1,1} = 0.5;$$

$$0 < t_{1,2} < t_{2,2} < \dots < t_{M,2} < t_{M+1,2} = 0.5.$$

$$x_{k,1} = 0.5 - t_{k,1}, x_{k,2} = 0.5 + t_{k,1}, k = \overline{1, M}, x_{M+1,1} = 0, x_{M+1,2} = 1;$$

$$y_{l,1} = 0.5 - t_{l,2}, y_{l,2} = 0.5 + t_{l,2}, l = \overline{1, M}, y_{M+1,1} = 0, y_{M+1,2} = 1.$$

$$f(x, y) = f_k(x, y), (x, y) \in \overline{D_k}, k = \overline{1, M + 1}.$$

Тестова розривна функція  $f(x, y)$  задається відомими виразами в кожній області, на які розбивається квадрат  $D$ , тобто

$$f(x, y) = f_k(x, y), (x, y) \in \overline{D_k}, k = \overline{1, M + 1}.$$

Введемо до розгляду функцію

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y).$$

Далі будемо будувати розривний сплайн  $Sp(x, y)$  таким чином, щоб функція  $\varphi(x, y)$  була неперервною.

## III. ПОБУДОВА РОЗРИВНОГО СПЛАЙНА У ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ

Задача полягає у побудові розривного сплайна  $Sp(x, y)$ , який має такі властивості:

- 1) лінії розриву функцій  $f(x, y)$  та  $Sp(x, y)$  одні й ті ж;
- 2) односторонні границі (а отже, і стрибки) на лініях розриву функцій  $f(x, y)$  та  $Sp(x, y)$  одні й ті ж;

Розривний сплайн  $Sp(x, y)$  подамо у вигляді:

$$Sp(x, y) = \psi_k(x, y), (x, y) \in \overline{D_k}, k = \overline{1, M + 1}.$$

Тут функції  $\psi_k(x, y), (x, y) \in \overline{D_k}, k = \overline{1, M + 1}$  задаються наступним чином:

$$\psi_1(x, y) = O_1 f_1(x, y) + O_2 f_1(x, y) - O_1 O_2 f_1(x, y),$$

$$O_1 f_1(x, y) = \frac{x - x_{1,2}}{x_{1,1} - x_{1,2}} f_1(x_{1,1}, y) + \frac{x - x_{1,1}}{x_{1,2} - x_{1,1}} f_1(x_{1,2}, y),$$

$$O_2 f_1(x, y) = \frac{y - y_{1,2}}{y_{1,1} - y_{1,2}} f_1(x, y_{1,1}) + \frac{y - y_{1,1}}{y_{1,2} - y_{1,1}} f_1(x, y_{1,2}),$$

$$O_1 O_2 f_1(x, y) = \frac{x - x_{1,2}}{x_{1,1} - x_{1,2}} O_2 f_1(x_{1,1}, y) + \frac{x - x_{1,1}}{x_{1,2} - x_{1,1}} O_2 f_1(x_{1,2}, y);$$

$$\psi_k(x, y) = O_{1,k} f_k(x, y) + O_{2,k} f_k(x, y) - O_{1,k} O_{2,k} f_k(x, y),$$

$$k = \overline{2, M+1},$$

$$O_{1,k} f_k(x, y) = \frac{x - x_{k-1,1}}{x_{k,1} - x_{k-1,1}} f_k(x_{k,1}, y) +$$

$$+ \frac{x - x_{k,1}}{x_{k-1,1} - x_{k,1}} f_k(x_{k-1,1}, y), x_{k,1} \leq x \leq x_{k-1,1},$$

$$O_{1,k} f_k(x, y) = 0, x_{k-1,1} < x < x_{k-1,2},$$

$$O_{1,k} f_k(x, y) = \frac{x - x_{k,2}}{x_{k-1,2} - x_{k,2}} f_k(x_{k-1,2}, y) +$$

$$+ \frac{x - x_{k-1,2}}{x_{k,2} - x_{k-1,2}} f_k(x_{k,2}, y), x_{k-1,2} \leq x \leq x_{k,2}, k = \overline{2, M+1};$$

$$O_{2,k} f_k(x, y) = \frac{y - y_{k-1,1}}{y_{k,1} - y_{k-1,1}} f_k(x, y_{k,1}) +$$

$$+ \frac{y - y_{k,1}}{y_{k-1,1} - y_{k,1}} f_k(x, y_{k-1,1}), y_{k,1} \leq y \leq y_{k-1,1},$$

$$O_{2,k} f_k(x, y) = 0, y_{k-1,1} < y < y_{k-1,2},$$

$$O_{2,k} f_k(x, y) = \frac{y - y_{k,2}}{y_{k-1,2} - y_{k,2}} f_k(x, y_{k-1,2}) +$$

$$+ \frac{y - y_{k-1,2}}{y_{k,2} - y_{k-1,2}} f_k(x, y_{k-1,2}), y_{k-1,2} \leq y \leq y_{k,2}, k = \overline{2, M+1};$$

$$O_{1,k} O_{2,k} f_k(x, y) = O_{1,k} (O_{2,k} f_k(x, y)).$$

Отже, розривний сплайн побудовано.

Далі подамо функцію  $\varphi(x, y)$  у вигляді:

$$\varphi(x, y) = \varphi_k(x, y), \varphi_k(x, y) = f_k(x, y) - \psi_k(x, y),$$

$$(x, y) \in \overline{D_k}, k = \overline{1, M+1}.$$

Наведемо пояснення щодо побудови введених вище функцій.

Для функції:

$$\psi_1(x, y) = O_1 f_1(x, y) + O_2 f_1(x, y) - O_1 O_2 f_1(x, y).$$

Оператор  $O_1$  задає інтерлінацію функції  $f_1(x, y)$  між двома паралельними вертикальними прямими (тобто функція  $O_1 f_1(x, y)$  співпадає з функцією  $f_1(x, y)$  на двох прямих  $x = x_{1,2}, x = x_{1,1}, 0 \leq y \leq 1$ ); оператор  $O_2$  задає інтерлінацію функції  $f_1(x, y)$  між двома паралельними горизонтальними прямими (тобто функція  $O_2 f_1(x, y)$  співпадає з функцією  $f_1(x, y)$  на двох прямих  $y = y_{1,2}, y = y_{1,1}, 0 \leq x \leq 1$ ); оператор  $O_1 O_2$  є оператором

інтерполяції функції  $f_1(x, y)$  у чотирьох вершинах квадрата  $D_1$ . Можна перевірити, що на границі прямокутника  $D_1$  різниця функцій  $\psi_1(x, y) - f_1(x, y) = 0$ , тобто  $\varphi_1(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma_1$ . Аналогічні міркування можна провести для функцій:

$$\psi_k(x, y) = O_{1,k} f_k(x, y) + O_{2,k} f_k(x, y) -$$

$$- O_{1,k} O_{2,k} f_k(x, y), k = \overline{2, M+1}.$$

Взагалі, справедлива така теорема.

**Теорема.** Функція  $\varphi(x, y)$  має такі властивості:

$$\varphi_1(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma_1, \varphi_k(x, y) = 0,$$

$$(x, y) \in \Gamma_{k-1}, (x, y) \in \Gamma_k, k = \overline{2, M+1},$$

$$\varphi(x, y) \in C(\overline{D}), \text{ якщо } f_k(x, y) \in C(\overline{D_k}).$$

#### IV. ПОБУДОВА СПЛАЙНА ДЛЯ ВИПАДКУ НАЯВНОСТІ ДВОХ ЛІНІЙ РОЗРИВУ

Наводимо формули для побудови розривного сплайна для випадку  $M = 2$  (двох ліній розриву), які впливають з загального вигляду.

Вважаємо лінії розриву функції  $f(x, y)$  відомими. Функція  $f(x, y)$  має вигляд:

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), w_1(x, y) \geq 0, \\ f_2(x, y), w_1(x, y) < 0 \wedge w_2(x, y) \geq 0, \\ f_3(x, y), w_2(x, y) < 0 \wedge w_3(x, y) \geq 0, \end{cases}$$

де  $f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)$  – задані функції для побудови розривної функції  $f(x, y)$ ;  $w_1(x, y), w_2(x, y), w_3(x, y)$  – функції, що побудовані за допомогою операції R-кон'юнкції. Операція R-кон'юнкції описується наступним чином:

$$p_1 \wedge_\alpha p_2 = \frac{1}{2} \left( p_1 + p_2 - \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2\alpha p_1 p_2} \right),$$

де  $p_1, p_2$  – деякі функції. У роботі використана наступна формула зі значенням параметра  $\alpha = 1$ :

$$p_1 \wedge_1 p_2 = \frac{1}{2} \left( p_1 + p_2 - |p_1 - p_2| \right).$$

Побудуємо розривну сплайн-функцію  $Sp(x, y)$ , яка має на вказаних лініях такі ж розриви першого роду як і наближувана функція.

Для побудови сплайна скористаємося наступними формулами:

$$Sp(x, y) = \begin{cases} \psi_1(x, y), w_1(x, y) \geq 0, \\ \psi_2(x, y), w_1(x, y) < 0 \wedge w_2(x, y) \geq 0, \\ \psi_3(x, y), w_2(x, y) < 0 \wedge w_3(x, y) \geq 0, \end{cases}$$

де

$$\psi_1(x, y) = O_1 f_1(x, y) + O_2 f_1(x, y) - O_1 O_2 f_1(x, y),$$

$$\psi_2(x, y) = O_{12} f_2(x, y) + O_{22} f_2(x, y) - O_{12} O_{22} f_2(x, y),$$

$$\psi_3(x, y) = O_{23} f_3(x, y) + O_{33} f_3(x, y) - O_{23} O_{33} f_3(x, y).$$

Далі для кожної з цих функцій наведено відповідні формули для їх конструювання.

$$\text{Для функції } \psi_1(x, y) = O_1 f_1(x, y) + O_2 f_1(x, y) - O_1 O_2 f_1(x, y):$$

$$O_1 f_1(x, y) = \frac{x - x_{12}}{x_{11} - x_{12}} \cdot f_1(x_{11}, y) + \frac{x - x_{11}}{x_{12} - x_{11}} \cdot f_1(x_{12}, y),$$

$$O_2 f_1(x, y) = \frac{y - y_{12}}{y_{11} - y_{12}} \cdot f_1(x, y_{11}) + \frac{y - y_{11}}{y_{12} - y_{11}} \cdot f_1(x, y_{12}),$$

$$O_1 O_2 f_1(x, y) = \frac{x - x_{12}}{x_{11} - x_{12}} \cdot O_2 f_1(x_{11}, y) + \frac{x - x_{11}}{x_{12} - x_{11}} \cdot O_2 f_1(x_{12}, y).$$

$$\text{Для функції } \psi_2(x, y) = O_{12} f_2(x, y) + O_{22} f_2(x, y) - O_{12} O_{22} f_2(x, y):$$

$$O_{12} f_2(x, y) =$$

$$\begin{cases} \frac{x - x_{11}}{x_{21} - x_{11}} \cdot f_2(x_{21}, y) + \frac{x - x_{21}}{x_{11} - x_{21}} \cdot f_2(x_{11}, y), & x_{21} \leq x \leq x_{11}, \\ 0, & x_{11} \leq x \leq x_{12}, \\ \frac{x - x_{22}}{x_{12} - x_{22}} \cdot f_2(x_{12}, y) + \frac{x - x_{12}}{x_{22} - x_{21}} \cdot f_2(x_{22}, y), & x_{12} \leq x \leq x_{22}, \end{cases}$$

$$O_{22} f_2(x, y) =$$

$$\begin{cases} \frac{y - y_{11}}{y_{21} - y_{11}} \cdot f_2(x, y_{21}) + \frac{y - y_{21}}{y_{11} - y_{21}} \cdot f_2(x, y_{11}), & y_{21} \leq y \leq y_{11}, \\ 0, & y_{11} \leq y \leq y_{12}, \\ \frac{y - y_{22}}{y_{12} - y_{22}} \cdot f_2(x, y_{12}) + \frac{y - y_{12}}{y_{22} - y_{21}} \cdot f_2(x, y_{22}), & y_{12} \leq y \leq y_{22}, \end{cases}$$

$$O_{12} O_{22} f_2(x, y) =$$

$$\begin{cases} \frac{x - x_{11}}{x_{21} - x_{11}} \cdot O_{22} f_2(x_{21}, y) + \frac{x - x_{21}}{x_{11} - x_{21}} \cdot O_{22} f_2(x_{11}, y), & x_{21} \leq x \leq x_{11}, \\ 0, & x_{11} \leq x \leq x_{12}, \\ \frac{x - x_{22}}{x_{12} - x_{22}} \cdot O_{22} f_2(x_{12}, y) + \frac{x - x_{12}}{x_{22} - x_{21}} \cdot O_{22} f_2(x_{22}, y), & x_{12} \leq x \leq x_{22}. \end{cases}$$

Для функції

$$\psi_3(x, y) = O_{23} f_3(x, y) + O_{33} f_3(x, y) - O_{23} O_{33} f_3(x, y):$$

$$O_{23} f_3(x, y) =$$

$$\begin{cases} \frac{x - x_{21}}{x_{31} - x_{21}} \cdot f_3(x_{31}, y) + \frac{x - x_{31}}{x_{21} - x_{31}} \cdot f_3(x_{21}, y), & x_{31} \leq x \leq x_{21}, \\ 0, & x_{21} \leq x \leq x_{22}, \\ \frac{x - x_{32}}{x_{22} - x_{32}} \cdot f_3(x_{22}, y) + \frac{x - x_{22}}{x_{32} - x_{22}} \cdot f_3(x_{32}, y), & x_{22} \leq x \leq x_{32}, \end{cases}$$

$$O_{33} f_3(x, y) =$$

$$\begin{cases} \frac{y - y_{21}}{y_{31} - y_{21}} \cdot f_3(x, y_{31}) + \frac{y - y_{31}}{y_{21} - y_{31}} \cdot f_3(x, y_{21}), & y_{31} \leq y \leq y_{21}, \\ 0, & y_{21} \leq y \leq y_{22}, \\ \frac{y - y_{32}}{y_{22} - y_{32}} \cdot f_3(x, y_{22}) + \frac{y - y_{22}}{y_{32} - y_{22}} \cdot f_3(x, y_{32}), & y_{22} \leq y \leq y_{32}, \end{cases}$$

$$O_{23} O_{33} f_3(x, y) =$$

$$\begin{cases} \frac{x - x_{21}}{x_{31} - x_{21}} \cdot O_{33} f_3(x_{31}, y) + \frac{x - x_{31}}{x_{21} - x_{31}} \cdot O_{33} f_3(x_{21}, y), & x_{31} \leq x \leq x_{21}, \\ 0, & x_{21} \leq x \leq x_{22}, \\ \frac{x - x_{32}}{x_{22} - x_{32}} \cdot O_{33} f_3(x_{22}, y) + \frac{x - x_{22}}{x_{32} - x_{22}} \cdot O_{33} f_3(x_{32}, y), & x_{22} \leq x \leq x_{32}. \end{cases}$$

Отже, побудовано розривний сплайн для випадку  $M = 2$ .

## V. АЛГОРИТМ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ

Враховуючи наведене, викладемо алгоритм реалізації методу за етапами:

1. Будуємо сплайн-функцію  $Sp(x, y)$ , яка має на вказаних лініях такі ж розриви першого роду, як і наближувана функція. При цьому враховуємо, що лініями розриву є система вкладених один в одній прямокутників.

2. Знаходимо функцію:

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y).$$

3. Відновлюємо функцію  $\varphi(x, y)$  за допомогою методу скінченних сум Фур'є, наведеного у роботі [2]. Враховуючи, що ця функція не має розривів, її можна наближувати з допомогою відповідних сум Фур'є без явища Гіббса. Отримуємо:

$$\tilde{\varphi}_N(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)},$$

де  $N$  – порядок суми Фур'є;

$$F_{k,l} = \iint_D \varphi(x,y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy.$$

4. Використовуємо для аналізу наближення функції  $f(x,y)$  суму побудованого вище сплайна та наближення функції  $\varphi(x,y)$  сумами Фур'є, тобто:

$$\tilde{f}(x,y) = Sp(x,y) + \tilde{\varphi}_N(x,y).$$

#### VI. ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ

У чисельному експерименті розглянуто приклади для однієї лінії розриву ( $M=1$ ) та двох ліній розриву ( $M=2$ ). Лініями розриву є границі прямокутників. Проекційні дані для функції  $f(x,y)$  вважаються заданими.

**Приклад 1.** Відновлення функції  $f(x,y)$ , що має одну лінію розриву ( $M=1$ ). Лінією розриву є границя прямокутника зі сторонами  $a_1, b_1$ ;  $a_1, b_1 < 1$ , з центром у точці  $(0.5; 0.5)$ .

$f_1(x,y)$ ,  $f_2(x,y)$  – задані функції для побудови розривної функції  $f(x,y)$ .

$$f_1(x,y) = k_1 \cdot e^{-((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)},$$

$$f_2(x,y) = k_2 \cdot \sin\left[(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2\right],$$

де  $k_1 = 10$ ,  $k_2 = 5$  – задані числа.

Функція  $f(x,y)$  має вигляд:

$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y), & w_1(x,y) \geq 0, \\ f_2(x,y), & w_1(x,y) < 0 \wedge w_2(x,y) \geq 0, \end{cases}$$

де використані функції  $w_1(x,y) = p_1(x) \wedge p_2(y)$ ,  $w_2(x,y) = p_3(x) \wedge p_4(y)$ , де  $w_1(x,y)$ ,  $w_2(x,y)$  – функції, що побудовані за допомогою операції R-кон'юнкції

$$p_1(x) = (x - x_{11}) \cdot (x_{12} - x) \geq 0,$$

$$p_2(y) = (y - y_{11}) \cdot (y_{12} - y) \geq 0,$$

$$p_3(x) = x \cdot (x_{22} - x) \geq 0, \quad p_4(y) = y \cdot (y_{22} - y) \geq 0.$$

TABLE I. Порівняння похибок при відновленні функції

Відновлення функції $f(x,y)$	Похибка			
	Абсолютна	Відносна	Середньо-кватратична	Середня абсолютна
З явищем Гіббса	5,528	0,553	0,581	0,228

Без явища Гіббса	0,035	$3,455 \cdot 10^{-3}$	$2,77 \cdot 10^{-3}$	$8,198 \cdot 10^{-4}$
------------------	-------	-----------------------	----------------------	-----------------------

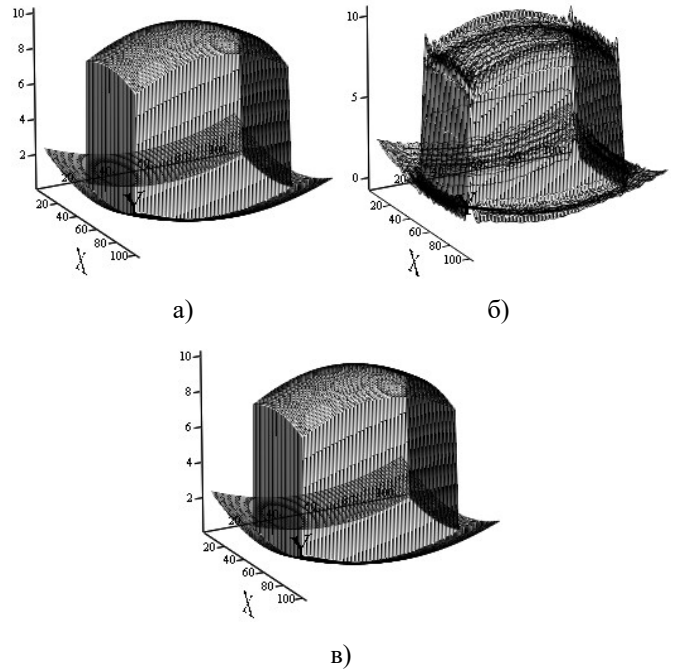


Рис. 1. Зображення функції: а) задана функція, б) відновлена функція з явищем Гіббса, в) відновлена функція без явища Гіббса

На рис. 1, б) спостерігаються осциляції, що відповідають наявності явища Гіббса.

**Приклад 2.** Відновлення функції  $f(x,y)$ , що має дві лінії розриву ( $M=2$ ). Лініями розриву є границі прямокутників зі сторонами  $a_1, b_1, a_2, b_2$ ;  $a_1 < a_2 < 1$ ,  $b_1 < b_2 < 1$  з центром у точці  $(0.5; 0.5)$ .  $f_1(x,y)$ ,  $f_2(x,y)$ ,  $f_3(x,y)$  – задані функції для побудови розривної функції  $f(x,y)$ .

$$f_1(x,y) = k_1 \cdot e^{-((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)},$$

$$f_2(x,y) = k_2 \cdot \cos\left[(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2\right],$$

$$f_3(x,y) = 1 + 2(w - k_3) + 3(w - k_3)^2 + 4(w - k_3)^3,$$

де  $w = \sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}$ ,  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = 10$ ,  $k_3 = 0.5$  – задані числа.

Функція  $f(x,y)$  має вигляд:

$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y), & w_1(x,y) \geq 0, \\ f_2(x,y), & w_1(x,y) < 0 \wedge w_2(x,y) \geq 0, \\ f_3(x,y), & w_2(x,y) < 0 \wedge w_3(x,y) \geq 0, \end{cases}$$

де використані наступні функції



$$w_1(x, y) = p_1(x) \wedge_1 p_2(y), w_2(x, y) = p_3(x) \wedge_1 p_4(y),$$

$$w_3(x, y) = p_5(x) \wedge_1 p_6(y),$$

де  $w_i(x, y)$  – функції, що побудовані за допомогою операції R-кон'юнкції:

$$p_1(x) = (x - x_{11}) \cdot (x_{12} - x) \geq 0,$$

$$p_2(y) = (y - y_{11}) \cdot (y_{12} - y) \geq 0,$$

$$p_3(x) = (x - x_{21}) \cdot (x_{22} - x) \geq 0,$$

$$p_4(y) = (y - y_{21}) \cdot (y_{22} - y) \geq 0,$$

$$p_5(x) = x \cdot (x_{32} - x) \geq 0,$$

$$p_6(y) = y \cdot (y_{32} - y) \geq 0.$$

TABLE II. Порівняння похибок при відновленні функції

Відновлення функції $f(x, y)$	Похибка			
	Абсолютна	Відносна	Середньо-квдратична	Середня абсолютна
З явищем Гіббса	6,251	0,625	0,78	0,36
Без явища Гіббса	0,008	$7,981 \cdot 10^{-4}$	$1,051 \cdot 10^{-3}$	$4,62 \cdot 10^{-4}$

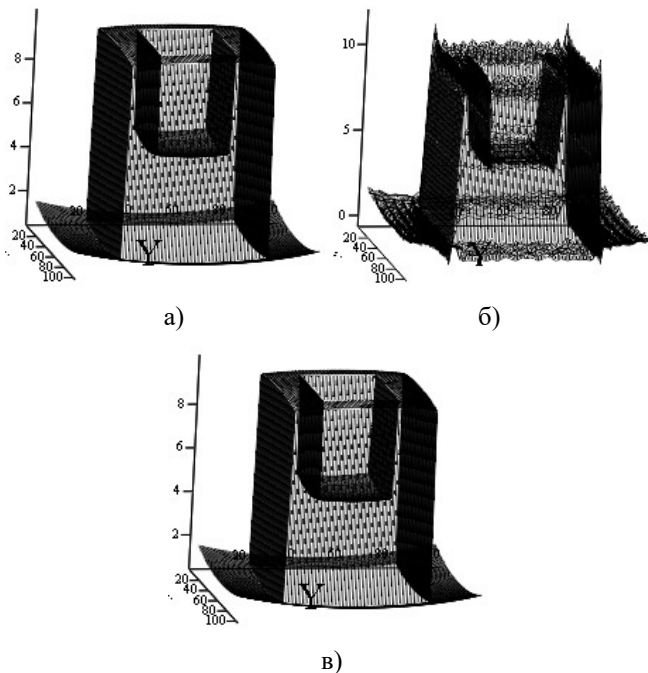


Рис. 2. Зображення функції: а) задана функція, б) відновлена функція з явищем Гіббса, в) відновлена функція без явища Гіббса

На рис. 2, б) спостерігаються осциляції, що відповідають наявності явища Гіббса.

Порівняння похибок, наведених у табл. 1, 2, а також зображень, наведених на рис. 1, 2 показує переваги запропонованого методу для наближеного відновлення розривних функцій без явища Гіббса.

## VII. ВИСНОВКИ

У запропонованому методі теоретично обґрунтовано і підтверджено обчислювальним експериментом можливість наближення розривних функцій двох змінних з використанням сплайнів та скінченних сум Фур'є без явища Гіббса для випадку, коли лінії розриву є системою границь прямокутників, вкладених один в одній. У цьому методі розривний сплайн  $Sp(x, y)$  будувався так, щоб різниця між наближуваною розривною функцією  $f(x, y)$  і цим сплайном була неперервною функцією. Це дозволяє підвищити точність наближення.

Запропонований метод є ефективним методом усунення явища Гіббса, що виникає при наближенні розривних функцій скінченними сумами Фур'є.

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] O. M. Lytvyn, O. G. Lytvyn, O. O. Lytvyn, V. I. Mezhuyev. The method of reconstructing discontinuous functions using projections data and finite Fourier sums. *Proc. IX International Scientific and Practical Conference «Information Control Systems & Technologies (ICST-2020)»* (24–26 September 2020, Odessa, Ukraine). Odessa, 2020. P. 661–673.
- [2] O. M. Lytvyn, «Periodic splines and a new method for solving the plane problem of X-ray computerized tomography», *System analysis, management and information technologies: Herald of Kharkiv State Polytechnic. un-th Collection of scientific works. Issue 125, Kharkiv: KhDPU, 2000, pp. 27–35. (in Ukraine).*
- [3] O. M. Lytvyn, O. G. Lytvyn, Analysis of the results of a computational experiment to restore the discontinuous functions of two variables using projections. I, *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 57, No. 5, pp. 98–107. Kyiv, 2021.
- [4] O. M. Lytvyn, O. G. Lytvyn, Analysis of the results of a computational experiment to restore the discontinuous functions of two variables using projections. II, *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 58, No. 1, pp. 95–106. Kyiv, 2022.
- [5] O. M. Lytvyn, O. G. Lytvyn, Analysis of the results of a computational experiment to restore the discontinuous functions of two variables using projections. III, *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 58, No. 3, pp. 61–71. Kyiv, 2022.
- [6] O. M. Lytvyn, «Interlineation of functions and some of its applications». Kharkiv: Osnova, pp. 544. (in Ukraine).
- [7] Sigal Gottlieb, Jae-Hun Jung and Saeja Kim, A Review of David Gottlieb's Work on the Resolution of the Gibbs Phenomenon, *Commun. Comput. Phys.* Vol. 9, No. 3, March 2011, pp. 497–519.
- [8] D. Gottlieb, C. W. Shu, «On the Gibbs Phenomenon and its Resolution» // *SIAM Review*. 1997. 39, No. 4. pp. 644–668.
- [9] D. Gottlieb, B. Gustafsson, P. Forsen. On the Direct Fourier Method for Computer Tomography // *IEEE Transactions On Medical Imaging*, V. 19, No. 3, March 2000, pp. 223–232.

# Розв'язування задачі тематичного моделювання наукових текстів шляхом розділення сумішей ймовірностних розподілів

Катерина Стецун  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний  
університет радіоелектроніки  
Харків, Україна  
kateryna.stetsun@nure.ua

Надія Гибкіна  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний  
університет радіоелектроніки  
Харків, Україна  
nadiia.gybkina@nure.ua

Максим Шпакович  
Національний інститут досліджень  
у сфері цифрових наук та  
технологій  
Бордо, Франція  
maksym.shpakovych@inria.fr

## Solving the problem of the thematic modeling of scientific text by separating mixtures of probability distributions

Kateryna Stetsun  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv national university of radio  
electronics  
Kharkiv, Ukraine  
kateryna.stetsun@nure.ua

Nadiia Gybkina  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv national university of radio  
electronics  
Kharkiv, Ukraine  
nadiia.gybkina@nure.ua

Maksym Shpakovych  
National Institute for Research  
in Digital Science  
and Technology  
Bordeaux, France  
maksym.shpakovych@inria.fr

**Анотація**—Метою математичного моделювання є визначення тем колекції документів, розподіл документів відповідно до виявленої тематичної кластерної структури, аналіз структурних складових виявлених тем. Даний підхід до моделювання колекції текстових документів дозволяє визначити, до якої з тем буде відноситися кожний із документів та виділити ключові слова за кожною темою.

**Abstract**—The purpose of thematic modeling is to determine the topics of a collection of documents, the distribution of documents according to the identified thematic cluster structure, and the analysis of the structural components of the identified topics. This approach determines the correspondence between documents and topics and highlights the keywords for each topic.

**Ключові слова**—тематична модель; EM-алгоритм; мішок слів; суміш розподілів; функція правдоподібності.

**Keywords**—topic modeling; EM-algorithm; bag of words; hidden variables; mixture of distributions; probability function.

### I. ВСТУП

Беручи до уваги динаміку зростання кількості інформаційних потоків, до яких відносяться насамперед і наукові тексти, написані учасниками наукової та освітньої спільноти, можна зробити висновок, що задачі пошуку інформації за заданою тематикою, аналіз та систематизація цієї інформації ставатимуть все більш популярними. Подібний аналіз дозволяє збирати дані про авторство тексту та дату публікації, знаходити найбільш релевантні певним

запитам тексти, відносити текст до теми, що найбільш точно описує його зміст, виділяти ключові слова за цією темою. До перспективних методів розв'язання подібних задач можна віднести методи статистичного аналізу; дані, отримані під час такого аналізу, найкраще піддаються науковим обґрунтуванням. Через це попит на алгоритми та програми, що допомагають розв'язувати задачу статистичного аналізу текстів, також зростає, але самі програми стають все складнішими та мають все більше вимог для реалізації. У роботі використовуються методи попередньої обробки тексту, методи векторного подання документів («Bag-of-Words»), EM-алгоритм.

### II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Тематичне моделювання використовується як інструмент для організації, пошуку та аналізу великих наборів текстової інформації. Воно представляє собою спосіб побудови моделі колекції текстів, яка дозволяє за сукупністю документів або сукупністю слів у документах, отримати набір тем, що характеризують зміст досліджуваних документів. Для цього модель має містити приховані змінні (що й керують семантикою досліджуваного документа), а мета моделювання полягає в тому, щоб розкрити ці приховані змінні, тобто теми, які формують зміст досліджуваного документа. Дослідження в даному випадку відбувається шляхом спостереження за тим, які слова з'являються поруч з іншими словами, в яких темах, та збору цієї інформації з використанням статистики ймовірностей [1].

Наведемо позначення, які використовуються у тематичному моделюванні. Нехай  $D$  – колекція текстових документів, а  $d$  – окремі документи цієї колекції. Позначимо через  $W$  множину унікальних термів (слів, словосполучень, термінів) колекції  $D$ , інакше кажучи, словник. В такому випадку  $w$  – окреме слово (терм) в словнику. Множину тем позначимо через  $T$ , а  $t$  – окремі теми з заданої множини. Терми  $w$  та документи  $d$  є спостережуваними змінними, а теми  $t$  – прихованими змінними [2].

У тематичному моделюванні використовується гіпотеза про те, що поява термів  $w$  у документі  $d$  залежить від його теми  $t$ , але не від документа  $d$ , тобто:

$$p(w|d,t) = p(w|t).$$

Ймовірнісна тематична модель описує кожен документ дискретним розподілом ймовірностей слів  $p(w|t)$ , а кожен документ – дискретним розподілом ймовірностей тем  $p(t|d)$  і передбачає, що розподіл термів у документі  $p(w|t)$  визначається розподілами термів за темами  $p(w|t)$  та тем за документами  $p(t|d)$ :

$$p(w|d) = \sum_{t \in T} p(w|t,d)p(t|d) = \sum_{t \in T} p(w|t)p(t|d). \quad (1)$$

Задача тематичного моделювання полягає в тому, щоб знайти такі розподіл термів за темами  $p(w|t)$  та розподіл множини тем  $p(t|d)$ , за яких тематична модель (1) якнайкраще наближає частотні оцінки ймовірностей  $\hat{p}(w|d)$ , обчислені за заданою колекцією документів  $D$ .

Отже, тематичне моделювання дозволяє визначати тематику документів колекції у вигляді розподілу  $p(t|d)$ , а також структуру кожної теми у вигляді розподілу слів  $p(w|t)$ .

Зауважимо, що для можливості застосування тематичного моделювання, як і інших математичних методів статистичної обробки і аналізу текстів, необхідно подавати дані у цифровому вигляді. Отже, досліджувану колекцію документів  $D$  необхідно перетворити до векторного вигляду, який би відображував особливості кожного окремого документа [3].

### III. ЕМ-АЛГОРИТМ

ЕМ-алгоритм (англ. Expectation-maximization algorithm) є ефективною ітераційною процедурою для максимізації правдоподібності за наявності загублених або прихованих даних. За допомогою даного методу будемо оцінювати параметри моделі, для яких вхідні дані є найбільш ймовірними.

Кожна ітерація ЕМ-алгоритму складається з двох кроків: Е-кроку та М-кроку. На Е-кроці будується функція математичного сподівання сумісного розподілу спостережуваних та прихованих випадкових величин відносно апостеріорного розподілу останніх (Е-крок від. англ. expectation). На М-кроці ця функція максимізується відносно параметрів розподілу  $p(w|t)$  та  $p(t|d)$  (М-крок від. англ. maximization).

### IV. АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НАУКОВИХ ТЕКСТІВ ЯК ЗАДАЧІ РОЗДІЛЕННЯ СУМІШЕЙ ЙМОВІРІСНИХ РОЗПОДІЛІВ

Ймовірнісна тематична модель, що використовується у даній задачі, передбачає подання кожного документу колекції моделлю Bag of Words у вигляді вектора, який має поліноміальний розподіл ймовірностей з параметрами, що визначають кількість слів у документі та ймовірності виникнення у документі кожного слова зі словника.

Вважатимемо, що загальний розподіл документів колекції є сумішшю  $K$  поліноміальних розподілів і кожен з цих розподілів відповідає окремій темі, з яких згенеровані документи колекції. За таких умов задача визначення тем зводиться до знаходження параметрів вказаної суміші розподілів. Розв'язання цієї задачі полягає у максимізації логарифмічної функції правдоподібності, для чого і запропоновано використання ЕМ-алгоритму.

Можна виділити чотири основні етапи алгоритму розв'язання задачі тематичного моделювання як задачі розділення сумішей ймовірнісних розподілів.

Етап 1. Збір текстових даних наукової спрямованості.

Етап 2. Попередня обробка даних:

- 1) розбиття текстів на слова;
- 2) видалення гіперпосилань, електронних адрес, дат, чисел, спеціальних символів тощо;
- 3) видалення стоп-слів;
- 4) стемінг, лематизація.

Етап 3. Перетворення даних до векторного виду:

- 1) визначення  $V$  – розміру словника унікальних слів;
- 2) формування словника унікальних слів за колекцією документів;
- 3) формування вектору «мішок слів» для кожного документу колекції.

Етап 4. Розв'язання задачі тематичного моделювання як задачі розділення суміші ймовірнісних розподілів:

- 1) визначення кількості тем  $K$  колекції;
- 2) реалізація ЕМ-алгоритму, кожна ітерація якого передбачає:
  - Е-крок: обчислення умовного математичного сподівання сумісного розподілу спостережуваних та прихованих випадкових величин відносно апостеріорного розподілу останніх;
  - М-крок: максимізація отриманої функції відносно параметрів розподілу  $p(w|t)$  та  $p(t|d)$ .

У результаті роботи цього алгоритму будуть знайдені найкращі значення параметрів, які визначають ймовірнісні розподіли тем колекції та унікальних слів за кожною з тем.

### V. ВИСНОВКИ

Результатом розв'язання задачі тематичного моделювання будуть ймовірності належності кожного документа до визначених алгоритмом тем та ключові слова за цими темами.

Перевагою розробленого алгоритму є простота його використання, що створює комфортні умови для досліджень.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Topic Modeling for The New York Times News Dataset. URL : <https://towardsdatascience.com/topic-modeling-for-the-new-york-times-news-dataset-1f643e15caac> (дата звернення: 26.05.2022).
- [2] Vorontsov K. V., Potapenko A. A. Additive regularization of topic models // Machine Learning, Speial Issue on Data Analysis and Intelligent Optimization. 2014. P. 303–323.
- [3] Vorontsov K. V., Potapenko A. A. Modifications of the EM algorithm for probabilistic thematic modeling // Machine Learning and Data Analysis. 2013. V. 1, No. 6. S. 657–686.
- [4] Borman S. The Expectation Mahimization Algorithm. A short tutorial // Conf. on Machine learning and Computer Science. 2006. P. 1–19.

# Theories of Everything and System Problems of Computing Science

Trokhimchuck Petro P.

Anatolii Svidzinskyi Department of Theoretical and Computer Physics

Lesya Ukrainka Volyn National University

Lutsk, Ukraine

Trokhimchuck.Petro@vnu.edu.ua, trope1650@gmail.com

**Abstract** — It was shown that the problem of creation the universal system of knowledge may be represented as universal theory of information and communication. It may be represented as variant theory of everything. Main peculiarities and properties of such theories are analyzed. The main requirements that they must satisfy are given. Polymetric analysis (theory of variable measure) as example of universal theory of information is represented. This method allows to resolve the S. Beer centurial problem in cybernetics (problem of information complexity), to create natural (operational) concept of foundation of mathematics, etc. Comparative analysis with other theories of information and communication, including modern computer science is made too.

**Keywords**— computer science, hybrid theory of systems, communications, informative calculations, open systems, theories of everything, complexity-simplicity.

## I. INTRODUCTION

The problem of creation universal theory of information and communication may be resolved in two ways [1 – 13]. First is inductive. It allows receiving some semi-heuristic rules and laws for the explanation of corresponding area of knowledge. Second is deductive, which is based on more general doctrine and principles and theories and have universal nature.

But main problem of computer science according A. Ershov is formalization of Canadian philosopher L. Hall phrase “Everything that comes from the head is reasonable” [1, 10, 11]. This phrase can be successfully attributed to the problem of creating a universal system of knowledge, which only with the development of computer science became as relevant as in the Pythagoras time [4, 11].

The main conditions of this metascience must be next [4]:

1. It must be open theory or theory with variable hierarchy.
2. This theory must be having minimal number of principles.
3. It must based on nature of mathematics (analysis, synthesis and formalization all possible knowledge).
4. We must create sign structure, which unite verbal and nonverbal knowledge (mathematical and other) in one system.
5. We must have system, which is expert system of existing system of knowledge and may be use for the creation new systems of knowledge.
6. Principle of continuity must be true for all science.

## II. POLYMETRICAL ANALYSIS AS VARIANT OF UNIVERSAL SYSTEM OF KNOWLEDGE

Theory, which is created on the basis 6 rules, which are presented in introduction, is Polymetric Analysis (PA) [3, 4].

Basic concept is formalization of triple minimum: philosophical (methodological), mathematical and concrete scientifically.

Now we represented basic axiomatic of PA according to [3, 4].

**Definition 1. Mathematical construction (constructive)** is called set all possible elements, operations and transformations for resolution corresponding problem. The basic functional elements of this construction are called constructive elements.

**Definition 2.** The mathematical constructive elements  $N_{x_{ij}}$  are called **the functional parameters**

$$N_{x_{ij}} = x_i \circ \bar{x}_j \quad (1)$$

where  $x_i, \bar{x}_j$  – the straight and opposite parameters, respectively;  $\circ$  – respective mathematical operation.

**Definition 3.** The mathematical constructive elements  $N_{\varphi_{ij}}$  are called the **functional numbers**

$$N_{\varphi_{ij}} = \varphi_i \circ \bar{\varphi}_j. \quad (2)$$

Where  $\varphi_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ ,  $\bar{\varphi}_j(x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \dots, N_{x_{ij}}, \dots)$  are the straight and opposite functions, respectively;  $\circ$  – respective mathematical operation.

**Remark 1.** Functions  $\varphi_i, \bar{\varphi}_j$  may be have different nature: mathematical, linguistic and other.

The theory of generalizing mathematical transformations is created for works on functional numbers [1, 2].

**Definition 4. Qualitative transformations** on functional numbers  $N_{\varphi_{ij}}$  (straight  $A_i$  and opposite  $\bar{A}_j$ ) are called the next transformations. The straight qualitative transformations are reduced the dimension  $N_{\varphi_{ij}}$  on  $i$  units for straight parameters, and the opposite qualitative transformations are reduced the dimension  $N_{\varphi_{ij}}$  on  $j$  units for opposite parameters.

**Definition 5. Quantitative (calculative) transformations** on functional numbers  $N_{\varphi_{ij}}$  (straight  $O_k$  and opposite  $\bar{O}_p$ ) are called the next transformations. The straight calculative transformations are reduced  $N_{\varphi_{ij}}$  or corresponding mathematical constructive element on  $k$  units its measure. The

opposite quantitative transformations are increased  $N_{\varphi_{ij}}$  or corresponding mathematical constructive element on  $l$  units its measure, i.e.

$$O_k \bar{O}_p N_{\varphi_{ij}} = N_{\varphi_{ij}} - k \oplus p. \quad (3)$$

**Definition 6.** **Left and right transformations** are called transformations which act on left or right part of functional number respectively.

**Definition 7.** The maximal possible number corresponding transformations is called **the rang of these transformations**

$$\text{rang } A_i \bar{A}_j N_{\varphi_{ij}} = \max(i, j); \quad (4)$$

$$\text{rang } O_k \bar{O}_p N_{\varphi_{ij}} = \max(k, p). \quad (5)$$

**Remark 2.** The indexes  $i, j, k, p$  are called **the steps of the corresponding transformations**.

These transformations may be having various natures. Roughly speaking it may be mathematical, linguistically and other transformations and its combinations.

For this case we have finite number of minimal types the generalizing transformations (only 15 [3, 4]).

Basic element of PA is the generalizing mathematical elements or its various presentations – informative knots [3, 4]. Generalizing mathematical element is the composition of functional numbers (generalizing quadratic forms, including complex numbers and functions) and generalizing mathematical transformations, which are acted on these functional numbers in whole or its elements [3]. Roughly speaking these elements are elements of functional matrixes.

This element  ${}^{stqo}_{nmab} M_{ijkp}$  may be represented in next form

$${}^{stqo}_{nmab} M_{ijkp} = A_i \bar{A}_j O_k \bar{O}_p A'_s \bar{A}'_t O'_q \bar{O}'_r A'_n \bar{A}'_m O'_a \bar{O}'_b N_{\varphi_{ij}}. \quad (6)$$

Where  $N_{\varphi_{ij}}$  – functional number;  $O_k, O'_q, O'_a, \bar{O}_p, \bar{O}'_r, \bar{O}'_b$ ,

$A_i, A'_s, A'_n, \bar{A}_j, \bar{A}'_t, \bar{A}'_m$  are quantitative and qualitative transformations, straight and opposite (inverse, with tilde), ( $r$ ) – right and ( $l$ ) – left.

Polyfunctional matrix, which is constructed on elements (6) is called **informative lattice**. For this case generalizing mathematical element was called knot of informative lattice [10]. Informative lattice is basic set of theory of informative calculations. This theory was constructed analogously to the analytical mechanics [10].

Basic elements of this theory are [10]:

1. **Informative computability**  $C$  is number of possible mathematical operations, which are required for the resolution of proper problem.

2. **Technical informative computability**  $C_t = C \sum_{i=1}^n t_i$

where  $t_i$  – realization time of proper computation.

3. **Generalizing technical informative computability**  $C_{io} = k_{ac} C_t$ , where  $k_{ac}$  – a coefficient of algorithmic complexity [10].

Basic principle of this theory is **the principle of optimal informative calculations** [10]: any algebraic, including constructive, informative problem has optimal resolution for minimum informative computability  $C$ , technical informative computability  $C_t$  or generalizing technical informative computability  $C_{io}$ .

The principle of optimal informative calculations is analogous to action and entropy (second law of thermodynamics) principles in physics. This fact is caused of formula (2). where  $S_g$  may be represented as dimensionless system function of information. Roughly speaking it may be informative calculations too.

The principle of optimal informative calculation is more general than **negentropic principle the theory of the information** and **Shannon theorem** [3, 4]. This principle is law of the open systems or systems with variable hierarchy. The negentropic principle and Shannon theorem are the principles of systems with constant hierarchy.

Idea of this principle of optimal informative calculation may be explained on the basis de Broglie formula (7) (equivalence of quantity of ordered and disorder information) [3, 4]. Therefore we can go from dimensional quantities (action and entropy) to undimensional quantity – number of proper quanta of information or after generalization to number of mathematical operations. Thus, theory of informative calculations may be represented as numerical generalization of classical theory of information and analytical mechanics according to computational point of view [3].

$$\frac{S_e}{k_B} = \frac{S_a}{\hbar}, \quad (7)$$

which was obtained from the analysis of thermodynamics point [3] a measure of disordered physical information (number of photons) equally structured information (where  $S_a$  – action;  $\hbar$  – Planck constant,  $S_e$  – entropy,  $k_B$  – Boltzmann constant).

Through (7) the ratio of the increase of entropy for nonequilibrium processes (open systems) can be expanded at the action, that is, in other words, the physics of open systems can be built and action functional.

Roughly speaking the formula (7) is the mathematical form of next law: quantities of ordered and disorder information is equaled in each closed system.

We can introduce of dimensionless quantity  $S_g$ , which was called generalizing measure [1, 10, 11].

$$\frac{S_e}{k_B} = \frac{S_a}{\hbar} = S_g, \quad (7a)$$

For this case basic optimal principles of physics and information theory may be represented in the next form

$$dS_g \geq 0. \quad (8)$$

A sign equal (=) in (8) is corresponded to case of closed systems, A sign greater-than (>) is corresponded to case of open systems,

In [1] was shown that Yu. Klimontovich “thermodynamically” theory of optimal systems may be expanded on ordering part of physics too:

$$dS_a \geq 0. \quad (9)$$

In this case we have for the equals sign, roughly speaking, the action principle, to mark the event more – physics of open systems.

But formula (8) allows to transit to other nonphysical systems. Quantity  $S_g$  may be represented number of proper mathematical operations, including transformations.

For classification the computations on informative lattices hybrid theory of systems was created [3, 4]. This theory allows to analyze proper system with point of view of its complexity,

The main principles of hybrid theory of systems are next: 1) **the criterion of reciprocity**; 2) **the criterion of simplicity**.

The criterion of reciprocity is the principle of the creation the corresponding mathematical constructive system (informative lattice). The criterion of simplicity is the principle the optimization of this creation.

The basic axiomatic of hybrid theory of systems is represented below.

*Definition 8.* The set of functional numbers and generalizing transformations together with principles reciprocity and simplicity (informative lattice) is called **the hybrid theory of systems** (in more narrow sense the criterion of the reciprocity and principle of optimal informative calculations).

**Criterion of the reciprocity** for corresponding systems is signed the conservation in these systems the next categories:

- 1) the completeness;
- 2) the equilibrium;
- 3) the equality of the number epistemological equivalent known and unknown notions.

**Criterion of the simplicity** for corresponding systems is signed the conservation in these systems the next categories:

- 1) the completeness;
- 2) the equilibrium;
- 3) the principle of the optimal calculative transformations.

Criterion of reciprocity is the principle of creation of proper informative lattice. Basic elements of principle reciprocity are various nuances of completeness. Criterion of the simplicity is the principle of the optimality of this creation.

For more full formalization the all famous regions of knowledge and science the **parameter of connectedness**  $\sigma_i$  was introduced. This parameter is meant the number of different bounds the one element of mathematical construction with other elements of this construction. For example, in classic mathematics  $\sigma_i = 1$ , in linguistics and semiotics  $\sigma_i > 1$ . The parameter of connectedness is the basic element for synthesis in one system of formalization the all famous regions of knowledge and science. It is one of the basic elements for creation the theory of functional logical automata too.

At help the criteria of reciprocity and simplicity and parameter of connectedness the basic famous parts of knowledge and science may be represent as next 10 types of hybrid systems [1, 10, 11]:

1. The system with conservation all positions the criteria of reciprocity and simplicity for all elements of mathematical construction ( $N_{\varphi_{ij}}$  and transformations) is called the *simple system*.

2. The system with conservation the criterion of simplicity only for  $N_{\varphi_{ij}}$  is called the *parametric simple system*.

*Remark.* Further in this classification reminder of criteria of reciprocity and simplicity is absented. It means that these criteria for next types of hybrid systems are true.

3. The system with conservation the criterion of simplicity only for general mathematical transformations is called *functional simple system*.

4. The system with nonconservation the principle of optimal informative calculation and with  $\sigma_i = 1$  is called the *semisimple system*.

5. The system with nonconservation the principle of optimal informative calculation only for  $N_{\varphi_{ij}}$  and with  $\sigma_i = 1$  is called the *parametric semisimple system*.

6. The system with nonconservation the principle of optimal informative calculation only for general mathematical transformations and with  $\sigma_i = 1$  is called the *functional semisimple system*.

7. The system with nonconservation the principle of optimal informative calculation and with  $\sigma_i \neq 1$  is called *complicated system*.

8. The system with nonconservation the principle of optimal informative calculation only for  $N_{\varphi_{ij}}$  and with  $\sigma_i \neq 1$  is called *parametric complicated system*.

9. The system with nonconservation the principle of optimal informative calculation only for general mathematical transformations and with  $\sigma_i \neq 1$  is called *functional complicated system*.

10. The system with nonconservation the criteriums of reciprocity and simplicity and with  $\sigma_i \neq 1$  is called *absolute complicated system*.

### III. SOME APPLICATIONS IN COMPUTER SCIENCE

Methods of PA and HTS were used for the resolutions the next problems, mainly systemic, of modern science:

1. Creation of universal theory of measure and measurements (polymetric theory of measure and measurements). This theory is based on two principles: principle asymmetry the measurement (principle of basic measurements) and principle of dimensional homogeneity (principle of derivative measurements). This theory included in measure the procedure of measurement, including the procedure of forecasting and estimation.

2. PA may be represented as natural (operational) concept of foundations of mathematics, which allows to unite in one system all possible information and knowledge: précised (mathematics), ordered (science) and disorder knowledge. Foundation of mathematics must be based on its nature: analysis, synthesis and formalization of any field of knowledge or activity [5]. This can be considered as one of the variants of the formalization of L. Hall's thesis and, therefore, may be used for the foundation of computer science too. Theories of foundation of mathematics may be represented as structural and natural. Structural concepts are based on structure of mathematics: logic (B. Russel and A. N. Whitehead concept) [5, 8, 9], geometry (D. Hilbert) [5], arithmetic (D. Hilbert and P. Bernays) [5]; or intuitionism (L. Brauer ana A. Heiting). A. N. Whitehead in his last book abandoned the logical concept of the foundations of mathematics in favor of the organismic one, which, unfortunately, he did not clearly formulate [9]. A polymetric analysis can be proposed as an implementation of this concept of A. N. Whitehead. B. Russell, within the

framework of the logical concept, developed the inductive theory of logical types [8], which roughly speaking is the formalization and application of the fourth rule of the conditions of inferences in I. Newton's physics [1]. In this theory, there is an arbitrarily large number of logical types (systems). In the hybrid theory of systems, the minimum number of system types is 10, while the number of their implementations can be arbitrarily large.

3. Methods of PA allow resolving S. Beer centurial problem in cybernetics [1, 2, 11]. According S. Beer: "Apparently, the complexity becomes the problem of the century, just as the ability to process natural materials has been a problem of life and death for our forefathers. Our tool must be computers, and their efficiency should be provided by science, able to handle large and complex systems of probabilistic nature. This science may be cybernetics – the science of management processes and communication. The basic thesis of cybernetics can be set forth as follows: there are natural laws behavior of the large multibonds systems of any character submits that – biological, technical, special and economic" [2]. But cybernetics is synthetic science [1, 4, 13] and therefore this problem in PA may be resolved with help of calculations. This problem has two aspects system and computational (5 and 6 Smale's problems [12]). System problem may be resolved with help hybrid theory of systems, computational – with help theory of information calculations [1, 10, 11].

4. Generalizing mathematical element (6) and informative lattice may be represented as formalizing expansion of computer processor. Therefore, PA may be represented as theoretical foundation of modern computer science with operational point of view too [11]. Modern cybernetics and computer science are hierarchical systems [4]. Hybrid theory of systems is represented systems with variable hierarchy. Therefore, this theory may be used for the resolution more number system problems of modern cybernetics and computer science as existing other hierarchical methods.

5. The next chapters of modern computer science: theory of functional logical automata, theory of multiadic games, etc, were created with help polymetric method [10]. These theories are included variable hierarchy of PA and HTS.

6. The general requirements that open systems must satisfy can be used to formalize other concepts, both more general and more specific.

7. PA and HTS may be represented as theories of universal analysis, synthesis and formalization of knowledge, including here evolution.

#### IV. CONCLUSIONS

1. Problem of creation universal theory of knowledge is discussed.

2. Six rules, which are necessary for the creation such theories, are analyzed.

3. Polymetric analysis (PA) as variant of universal theory of knowledge is represented.

4. Application PA as operational concept of foundation of mathematics and computer science is researched.

5. Main applications PA for the resolution and possible resolution some problems of modern cybernetics and computer science are observed and discussed.

#### ACKNOWLEDGMENT

Author wishes to thank N. Nepeyvoda, A. Ershov, Yu. Kulakov, A. Kifishin, N. Moiseev, A. Saliev, A. Cherezov, S. Illarionov, B. Mokin, Ya. Rudnycky, O. Ivahnenko, F. T. Grier, E. E. Harris, O. Stakhov, V. Luzhetskyy, O. Romanyuk, P. Kozlyuk, P. Danylchenko, L. Geyvandov, V. Tkalych, P. Kovalenko, A. Kuhtenko, A. Morozov, V. Chabanyuk, V. Melnyk, V. Danilov, O. Makarenko < V. Skorobagatko for discussions of main concepts and results and D. Shvalikovskyy, M. Shevchuk and L. Sørensen for help in the preparation this paper.

#### REFERENCES

- [1] P. Trokhimchuck, *Theories of Everything: Past, Present, Future*. Saarbrücken, Lambert Academic Publishing, 2021
- [2] S. Beer, "We and complexity of modern world," in *Cybernetics today: problems and propositions*. Moscow: Znaniye, 1976, pp. 7 – 32. (In Russian)
- [3] L. de Broglie, "Thermodynamics of isolated point (Hidden thermodynamics of particles)," in L. de Broglie, *Collected papers*, vol. 4. Moscow, Print-Atel'e, 2014, pp. 8 – 111. (In Russian)
- [4] A. I. Kuhtenko, *Cybernetics and Fundamental Science*. Kyiv: Naukova Dumka, 1987. (In Russian)
- [5] I. Ruzha, *Foundations of mathematics*. Kiyiv: Vyscha shkola, 1981. (In Russian)
- [6] C. Shannon, *Works on the theory of information and cybernetics*. – Moscow: IL, 1963. (In English)
- [7] L. Brillouin, *Science and Information Theory*. New York: Courier Corporation, 2004.
- [8] B. Russel, *Introduction to mathematical philosophy*. London: Museum street, 1948.
- [9] A. N. Whitehead, *Science and the modern World*. – N.-Y.: Pelican Mentor Books, 1948.
- [10] P. P. Trokhimchuck, *Polymetric Analysis. History, Concepts, Applications*. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2018.
- [11] P. P. Trokhimchuck, "S. Beer centurial problem in cybernetics and methods of its resolution," in *Advanced in computer science*, vol. 7. New Delhi, AkiNik Publications, 2020, pp. 87-118.
- [12] Smale's problems. / Wikipedia – the free encyclopedia. // [http:// en.wikipedia.org/wiki/ Smale's problems](http://en.wikipedia.org/wiki/Smale's_problems)
- [13] F. H. George, *Philosophical Foundations of Cybernetics. Cybernetics and System Series*. London: Abacus Press, 1979.



# An assessment of the quality of feature space in Data Mining problems and a methodology of scientific cognition

Maxim Polyakov  
Noosphere Ventures Inc.  
Menlo Park, USA  
m.v.poliakov@nuwm.edu.ua

Gennadiy Shevchenko  
Association Noosphere  
Dnipro, Ukraine  
nikk.gena@gmail.com

Volodymyr Bilozubenko  
University of Customs and  
Finance  
Dnipro, Ukraine  
bvs910@gmail.com

**Abstract**— It is a well-known fact that the issue of selecting the features when building a classification rule in addressing Data Mining and Big Data problems is one of the most critical. At the same time, this selection, as a rule, is made within the framework of quite well known general model of cognition, though it is not always realized. At the same time, the selection of the system of features to describe the objects directly affects the quality of the training sample. The active use of Data Mining and Big Data methods raises new questions of whether or not their capabilities are correctly understood and what can be improved in them in terms of scientific cognition. The goal of the research: within the framework of the methodology of scientific cognition, to suggest an assessment of the quality of training sample and the appropriate feature space. This will enable to enhance the effectiveness of using Data Mining and Big Data methods by experts in this field as well as by a wide range of professionals in various other areas, who require intellectual analysis of empirical data.

**Keywords**— *model of cognition, structure, Data Mining, Big Data, feature, feature space, training sample, quality, informativeness of features, methodology*

## I. INTRODUCTION

It is well known that the final product of any science is Knowledge. Its mining and processing are the prime focus of the current economic system called knowledge economy (KE). The gaining of knowledge corresponds to the well-known model “from living contemplation to abstraction, and from abstraction to practice”, where three components of this model are represented. Apparently, the initial steps towards addressing any problem should proceed from the first component. The importance of this stage, namely singling-out a more detailed structure of the process of cognition, was highlighted in the papers [1-3], etc. In terms of Data Mining (DM) and Big Data (BD) methods, this stage corresponds to the search for the feature space of the training sample (TS). And, vice-versa, in terms of the methods of cognition, a selection of the features of TS, in fact, represents the first stage of the general model of cognition.

Structuring is the beginning of any research; it is impossible without

the extraction of relevant features. Therefore, features should be singled out almost in any problem. This is especially relevant to DM and BD methods, which make up the backbone of sciences, determine the success of many companies and enable their innovative development towards the formation of KE.

An arsenal of the tools of DM and BD methods does not include the stage of singling out the features in the form of a certain toolbox – it is farmed out to subject specialist researchers, relying on their own experience and intuition. At the same time, this is one of the crucial stages, because the entire success of addressing DM and BD problems often depends on the right choice of features.

The major difficulty in addressing this problem is that there are no formal rules, allowing you a priori to specify in advance a set of the features, enabling to carry out classification with a given accuracy. At the same time, it is worth knowing the quality of TS, and, consequently, the features included in this TS while still in the process of its creation, preparation and data collection, as it will enable to manage this process to a certain extent. It means that it is the most crucial stage of preparing data, which is currently almost unable to be formalized and therefore doubly important.

## II. MAIN RESULT

Currently, in fact, the only way to assess the quality of TS, in a general case, is an assessment based on the accuracy of the decision rule (DR) found as a result of training, which, as a rule, is determined by the probability of the proper distinguishability of TSs by the classifier that was built – DR. However, such

an assessment requires training procedure, and, therefore, possible significant investment of time [4]. At the same time, it is worth knowing the quality of TS without conducting the training itself and deriving of DR as well as interpreting it, which includes specifying what are the limiting capabilities of this sample to distinguish objects. Additional analysis of TS should specify informative signs and make constructive recommendations for improving the basic quality of TS – its distinguishing capability.

It is worth noting that the paper [5] made an attempt to assess the quality of TS to build predictive neural network. However, the requirements to TS, imposed for this assessment, reduce the effect of its application and do not allow assessing the quality of TS for more general cases, which are much more common in practice.

We suggest bridging this gap and approaching the selection of features more consciously and from a formalized perspective. In particular, to formalize the first stage of the above-stated process, it is suggested using the Procedure 1, which converts the first step of this model to constructive scheme, enabling to receive information picture and problem

landscape. In case of DM, this scheme simultaneously demonstrates and formalizes the stage of preparing and fixing the feature space.

Below is its description.

*Procedure 1* – a generalized description of the problem landscape.

- Qualitative “contemplative” analysis of the problem as well as the factors, features and concepts which are present in it is carried out.
- Based on the analysis of the objective and goals of the research, problem landscape is described, i.e., all the factors and features which might affect or “surrounds” the problem.
- The features, which, in the researcher’s opinion, are decisive in affecting or determining the properties of this concept, are selected or highlighted in this landscape, and further they are substantiated or it is proved that they are like this.
- The selected *III* features are further represented and recorded in the following formal form:  $\langle III, II2, \dots, II3 \rangle$ .

In fact, the *Procedure 1* is a research tool, enabling the parties concerned to receive information picture and problem representation for the purpose of building the appropriate model of interest.

The next stage in addressing DM and BD problems is data collection based on the selected features of TS. The dependence of the quality of TS on the features collected at the previous stage is beyond any doubt. In our opinion, the fundamental researches by M. Kendall and A. Stewart in the field of nonparametric problems of statistics can be a basis for building an assessment of TS quality in the above sense<sup>1</sup>.

Based on this approach, we suggest the following way of calculating an assessment of the quality of TS, the advantage of which is the relative simplicity and “transparency” of calculations. This assessment is calculated directly using the data of TS and characterizes the distinguishing capability of TS.

The assessment has the following form:

$$V(x_{i1}, \dots, x_{ij}) = \frac{1}{k} \sum_{\Delta \in \Gamma} \max_Y \left( \frac{m_{\Delta Y}}{m_Y} \right) \quad (1),$$

where  $k$  – a number of classes,

$m_Y$  – a number of objects, belonging to the class  $Y$ ,

$\Delta = t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ij}$  ( $0 \leq t_{ij} \leq k_{ij} - 1$ ),  $j=1, \dots, \gamma$  – an arbitrary collection of feature values  $x_{i1}, \dots, x_{ij}$  ( $1 \leq \gamma \leq n$ ),

$m_{\Delta Y}$  – a number of sets of the sample of  $m$  class, for which the following relation is performed:  $x_{ij} = t_{ij}$  ( $j=1, \dots, \gamma$ ),  $t_{ij}$  – value of the features  $x_{ij}$  in the set  $\Delta$ ,  $\Gamma$  – many sets of feature values  $x_{i1}, \dots, x_{ij}$ .

It can be shown that  $1/k \leq V(x_{i1}, \dots, x_{ij}) \leq 1$ . This assessment takes limit value equal to 1 with full distinguishability of classes, which was proved in the paper [7]. Thus, the formula (1), when  $\gamma = n$ , can serve as an assessment of the quality of

TS, i.e., if  $V(x_{i1}, \dots, x_{in}) = 1$ , it means that the classes of TS are completely distinguishable. This approach to quality assessment of TS enables to optimize the stages of information processing: if after calculation according to the formula (1) with  $\gamma = n$  an assessment takes value 1 (or close to 1), then further classification processing of data can be performed, which will certainly result in DR with maximum recognizing capability possible for this sample, being close to full recognition (at least, when using the full set of features). Otherwise, it is required to involve additional features or abandon the existing feature and replace them by the other ones (probably, to perform it all in a certain cycle).

At the same time, it is also possible to assess the informativeness (relevance, quality)  $P(x_i)$  of an individual feature, involving for this purpose the formula (1) in the following way:

$$P(x_i) = V(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

The less value is taken by the value  $P(x_i)$ , the more contribution to an assessment of the quality  $V(x_1, \dots, x_n)$  of the entire set of features is made by the feature  $x_i$ , i.e., the more meaningful, informative and important this feature  $x_i$  can be considered. Having arranged the features by ascending  $P(x_i)$  values, it is possible to get their relative importance for the problem of recognition in the context of a specific TS.

### III. CONCLUSION

Following the above procedures makes it possible to optimize the initial stages of preparing data when forming TS, to approach its creation and feature selection more consciously, which can considerably reduce time and other expenditure when researching the subject area using DM and BD methods and, most important, to enhance the effectiveness of addressing the set objectives.

The above approach can be successfully applied to address a number of DM problems: 1) an assessment of the informativeness of discrete features, 2) an assessment of the quality of training and examination samples, 3) the search for the most typical objects of TS, 4) the search for the informative groups of discrete features (not only by formula (1), but also in the sense of (2)). As an example, we can mention data processing and analysis services on the portal <https://www.sciencehunter.net/Services>.

Moreover, the procedures developed, in our opinion, enable to distribute them as a certain general approach to the description and preliminary formalization of the subject area from a wide range of phenomena, including the humanities, i.e., as an approach to the formalization and structuring of the first stage of the general model of cognition.

### REFERENCES

- [1] A.F. Losev, *Audacity of the Spirit*. M.: Publishing house of political literature, 1988.
- [2] M. Wertheimer, *Productive Thinking*. Springer Nature Switzerland AG, 2020. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-36063-4>
- [3] V.A. Smirnov, “Levels of knowledge and stages in the process of cognition,” In *Problems of the Logic of Scientific Cognition*. M.: the USSR Academy of Science, the Institute of Philosophy, 1964.
- [4] E.V. Dyukova, N.V. Peskov, “Search for informative fragments in descriptions of objects in discrete recognition procedures,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, vol. 42, No.5, pp.741-753, 2002.

<sup>1</sup> Thus, in the paper [6], the authors suggested an assessment of the relationship between two categorized variables, which, as they

demonstrated, is the best for certain problems, in particular, to predict for a known variable the categorized values of another one.

- [5] D.N. Oleshko, V.A. Krisilov, A.A. Blazhko, "Building a qualitative training sample for predictive neural network models," *Artificial intelligence*, vol. 3, pp. 567- 573, 2004.
- [6] M.G. Kendall, A. Stewart, *The Advanced Theory of Statistics*. M.: Nauka, 1973.
- [7] Y.A. Vasilenko, G.Y. Shevchenko, "Analytical method of finding tests," *Avtomatika*, 1979.

# Deep learning for determination of the ion beam impact on a space debris object

Mykhaylo Redka

Department of system analysis and control problems  
Institute of Technical Mechanics NASU and SSAU  
Dnipro, Ukraine  
mix5236@ukr.net

Serhii Khoroshylov

Department of system analysis and control problems  
Institute of Technical mechanics NASU and SSAU  
Dnipro, Ukraine  
skh@ukr.net

## Застосування глибокого навчання для визначення сили впливу факелу іонного двигуна на об'єкт космічного сміття

Михайло Редька

Відділ системного аналізу та проблем керування  
Інститут технічної механіки НАНУ та ДКАУ  
Дніпро, Україна  
mix5236@ukr.net

Сергій Хорошилов

Відділ системного аналізу та проблем керування  
Інститут технічної механіки НАНУ та ДКАУ  
Дніпро, Україна  
skh@ukr.net

*Abstract*—Ion-beam shepherd method for space debris removal requires techniques to determine the force impulse transmitted to a space debris object (SDO). Conventional approaches are based on the integration of elementary forces over the surface of the object. However, practical implementations of such methods can lead to heavy algorithms, which cannot be used for some space missions as-is, considering the fact that the onboard hardware is usually very limited in resources. Efforts to simplify such algorithms has led to some results, however, currently known methods still require significant computational resources. We use artificial neural networks (ANN) of different architectures to determine the force transferred to a SDO and measure benefits of this approach. We also provide end-to-end solution with convolution neural network (CNN) that performs regression using only the image of the cylindrical SDO. All neural networks were tested on the set of eighteen computational cases in order to compare the relative and absolute errors, and also to track the consumed time for each completed case. Our findings indicate that deep neural networks can solve the task quicker than the original approach on the same hardware, while having insignificant relative errors. The complete end-to-end solution, despite having a lower accuracy, can be also used for determination of the force impact without prior knowledge about the orientation of the SDO.

*Анотація*—Метод безконтактного видалення космічного сміття «пастух із іонним променем» потребує спосіб визначення сили, що передається до об'єкта космічного сміття (ОКС). Традиційні способи базуються на інтегруванні елементарних сил по площині ОКС. Однак,

застосування таких методів для використання на борту космічного апарату (КА) не завжди можливе через те, що на КА зазвичай накладають жорсткі вимоги до апаратного забезпечення. Відомо про спроби спростити алгоритми визначення сили для передачі ОКС, але навіть отримані результати вимагають значних обчислювальних ресурсів. У роботі запропоновано метод, що використовує штучні нейронні мережі (ШНМ) різних архітектур для визначення сили, що передається до ОКС. Визначено переваги використання такого методу для вирішення задачі. Крім цього, запропоновано метод визначення сили за допомогою згорткових нейронних мереж (ЗНМ), що використовує тільки зображення ОКС. Усі ШНМ протестовано на наборі із вісімнадцяти розрахункових випадків на точність та швидкість визначення сили у порівнянні із традиційним методом. Результати тестування вказують на те, що ШНМ, маючи незначні відносні помилки, дозволяють визначити силу швидше за традиційний метод на однаковому обладнанні. Метод визначення сили, що використовує ЗНМ, не зважаючи на меншу точність визначення сили, може бути використаний для визначення сили без попередньої інформації про орієнтацію ОКС.

*Keywords*—space debris removal, deep learning, force determination, feed-forward neural networks, convolution neural networks.

*Ключові слова*—видалення космічного сміття, глибоке навчання, метод визначення сили, нейронні мережі прямого поширення, згорткові нейронні мережі.

## I. INTRODUCTION

Current state of the near-Earth space is the common concern of the global space community. In a result of human space activity for over more than 40 years, the area became junked with debris consisting of objects such as fragments of launch vehicle stages, non-functioning spacecrafts and their fragments, disabled satellites, etc, which make further space activities more and more complicated [1]. Due to this, the problem of space debris removal is getting increasing attention inside the scientific and space industry. A number of methods of space debris removal were introduced up to this day. One of the most recent techniques of non-intrusive space debris removal is the ion-beam shepherd concept [2]. The main idea is to effectively use the momentum from ion plume of a thruster to transmit the force impulse to the SDO for its deceleration. Such technique gained popularity due to number of advantages, such as: removal efficiency, low level of risk, reusability, technological readiness. One of the key tasks of this method is the determination of the force to be passed from the actor unit to the SDO. Number of publications has addressed this problem. The theoretical principles of modeling an ion beam plume and calculating the transmitted force are proposed in [3]. The authors of this work used the integration of elementary forces over the surface of the object. However, the authors of the work [4] stated that efficiency of such an algorithm is far from desired, and in practice, the implementation of such method to be used onboard during space mission can be difficult. Instead, their work demonstrated another, more straight-forward approach to determine the force using photo camera and image processing. The authors simplified the method by calculating central projections of the plume for both cylindrical and spherical SDO. However, because of recentness of the proposed method, currently only accuracy validation is known to be performed [5]. The possibility of analytical description of the force was considered by the authors of [6], however, such expressions were obtained only for the SDO of a spherical shape. On the other hand, advances in mathematical modeling of the last decades have shown great progress of artificial neural networks (ANN), which proved to be the universal approximators. Number of works [7, 8] proved that single feed-forward multilayer neural network can approximate any continuous function of multiple variables with any given precision. Also, modern advances in computer industry has led to appearance of so-called ASIC devices and neural network co-processors, which are optimized to perform only operations that are needed for neural network's inference; not only as fast, but also as efficient as possible [15]. That being said, the practical implementation of determination of the force using artificial neural networks is the task that provides interest not only from accuracy and performance point of view, but is also interesting from perspective of implementation, because such method can possibly be used regardless of the dimensions and form of the SDO of choice.

## II. METHODS

### A. Input data

The following ion thruster parameters were used during all calculations. Initial ion thruster radius: 0.0805 m; ion mass (xenon):  $2.18 \cdot 10^{-25}$  kg; initial plasma density:  $4.13 \cdot 10^{15}$  m<sup>3</sup>; initial axial velocity of ions: 71580 m/s; divergence angle: 7 deg; initial electron temperature 0.001 eV.

The upper stage of the Cyclone-3 launch vehicle is considered as the SDO, which was approximated by a cylinder with a height of 2.6 m and a base diameter of 2.2 m.

### B. Multi-layer perceptron

An artificial neural network (ANN) is a system of interconnected artificial neurons. A multilayer neural network is an ANN consisting of input, output and hidden layers of neurons located between them. A multi-layer perceptron (MLP) is the multi-layer neural network with one or more hidden layers in which each neuron of hidden layer is connected to every neuron of the previous layer [9]. It was proved in that MLP with at least one hidden layer can be used to approximate any continuous function of a set of variables; the only condition is the nonlinearity of the activation function in hidden layers [7, 8]. In order to approximate the function, a neural network needs to be trained. The learning goal is to minimize errors at the ANN output. Currently, the most commonly used learning algorithms are improved versions of stochastic gradient descent (SGD) such as root mean squared propagation (RMSprop) and adaptive moment estimation (Adam) methods. In this work, the Adam optimizer was used to train MLP models. In order to solve the task, input parameters for the function of force determination from [3] were mapped into the input neurons of our MLP models [16]. Therefore, there are 6 input neurons, their descriptions are the following:  $x, y, z$  are the relative distance from ion thruster to SDO (in meters);  $\psi, \varphi, \theta$  are the Euler angles used to determine the orientation of the SDO object (in radians). The outputs of the network are the force projections on three axes ( $x, y, z$ ). The mean squared error (MSE) was used as a loss function for training and validation. Three different MLP configurations were considered. They differ in the number of hidden layers, as well as the number of neurons in the hidden layers. Configurations are summarized in the Table 1.

TABLE I.

Name	Architecture		
	Neurons configuration	Hidden layers	Activation function
MLP1	6×512×256×128×64×3	4	ReLU
MLP2	6×1024×512×256×128×3	4	ReLU
MLP3	6×1024×512×256×128×64×3	5	ReLU

Fig. 1. MLP configurations

The ReLU function was used as the non-linear activation function for neurons of hidden layers for all MLP models, which transforms the input signal in the way described in (1).

$$R(x) = \max(0, x) \quad (1)$$

Training, validation and testing of MLP models, as well as data preprocessing were performed using Python programming language of version 3.9. Keras, Scikit-learn, Numpy and Scipy libraries have been used for this task.

### C. Convolution neural networks

Convolution neural networks (CNN) are the subset of artificial neural networks. These networks utilize advantages of using mathematical operation of convolution, which allows to find complex patterns even with increased volumes of input data, such as images [10]. The work by Yan LeCun et al [11] first showed how back-propagation technique can be

successfully used to train this kind of network. Since then, multiple convolution network architectures have been developed, specifically to solve problems of image classification, object detection, sound and pattern recognition. Such networks can be effectively used for both classification

and regression problems [10]. In this work, custom convolution neural network architecture shown on the Fig. 2 was used for a regression task in order to demonstrate end-to-end solution for the problem for the SDO of cylindrical form, using only image data from the on-board camera.

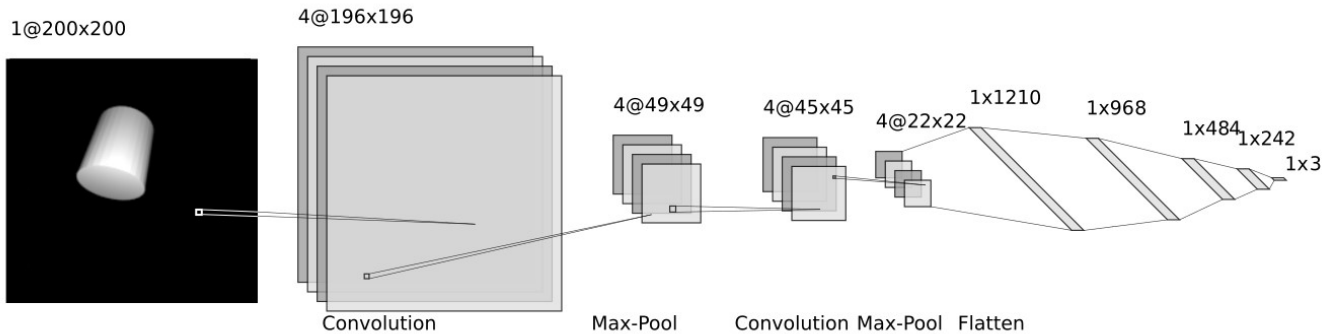


FIG. 2. Convolution neural network architecture used in end-to-end solution that uses 1-channel greyscale image of the cylindrical SDO as an input

We did not use popular pre-trained CNN architectures (such as LeNet, AlexNet, GoogLeNet, etc) with further training with transfer-learning technique [12] because these networks were initially developed for multiclass classification, and the architecture of such networks needs to be manually changed and fine-tuned to achieve the results for regression, which can be time-consuming and challenging task. Three different configurations with proposed architecture have been considered. Configuration CNN1 is a single CNN model that used the dataset consisting from 10000 images of SDO during training. The CNN2 is an ensemble network. It consists of 4 CNN models; each particular model used its own dataset with the size of 10000 images during training. Each model used its own dataset because each model is bound to its specific area using distance coordinates to the SDO; used ranges are described in the Fig. 3. The classifier was also used in order to determine the correct model using the image of the SDO. To train the classifier, the dataset from CNN1 has been used, with the only difference in modified output, which was changed from three-value to four-value output in order to perform multi-class classification and map each classifier output to specific model. The CNN3 is a single CNN model too; however it was trained on a compiled dataset that consists of all images used to train CNN2; the total depth is 40000 images.

TABLE II.

Model name	Parameter ranges					
	$x$	$y$	$z$	$\psi$	$\phi$	$\theta$
Q1	[-1, 0]	[0, 1]	[5, 9]	[-1.57, 1.57]	[-1.57, 1.57]	[-1.57, 1.57]
Q2	[0, 1]	[0, 1]	[5, 9]	[-1.57, 1.57]	[-1.57, 1.57]	[-1.57, 1.57]
Q3	[0, 1]	[-1, 0]	[5, 9]	[-1.57, 1.57]	[-1.57, 1.57]	[-1.57, 1.57]
Q4	[-1, 0]	[-1, 0]	[5, 9]	[-1.57, 1.57]	[-1.57, 1.57]	[-1.57, 1.57]

FIG. 3. Parameter ranges of each ensemble model; each model used for specific area over  $x$  and  $y$  axes

Training, validation and testing of CNN models were performed using Python 3.9 programming language and PyTorch free and open-source machine learning framework.

#### D. Datasets

The function for determination of the force of an ion thruster plume from [2] has been taken as a source to provide ground-truth force projections in order to train regression models.

To train MLP models, we have generated a dataset that consists of 100000 lines of data, formatted in the comma-separated value (CSV) format. Values for input parameters were randomly generated in corresponded ranges for each input parameter using normal distribution. Range of variation of input parameters are the following: for parameters  $x$  and  $y$  the range is [-1.0 ... 1.0]; for parameter  $z$  - [5.0 ... 9.0]; for parameters  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  the range is [1.507 ... 1.507].

For CNN models, the dataset inputs are the images of the SDO, and outputs are corresponding force projections. To generate the dataset for CNN training, we have generated input values the same way as for the MLP models; however we used these parameters to generate the images of the SDO. The rendering was achieved using Blender free and open-source software: we have rendered 3-channel RGB images of the cylindrical SDO of grey color (#8A8A8A in RGB representation) with full black background (#000000 in RGB representation). The focal length of the camera lens for rendering of images of the SDO was 25 mm. No pre-processing of the images (such as contour extraction or gamma/contrast correction) was performed, except from converting 3-channel RGB image into 1-channel greyscale before passing the image into model input. An example of the cylindrical image of the SDO is shown at the input of the model on the Fig. 3.

All datasets were split for training and validation with 80% and 20% ratio, respectively. For MLP models, the dataset inputs and outputs were normalized to obtain values in a range of [-1.0 ... 1.0]. For CNN models, only outputs were normalized. The output values were also saved into separate file in a CSV format and used as the ground truth to train CNN models.

#### E. Training and validation methods

MLP models were trained using desktop PC with 10th generation Intel CPU with 8 cores and 16 threads. CNN models were trained on a desktop with Nvidia GPU with

Ampere architecture, utilizing higher memory bandwidth [13]. The Xavier method was used in order to initialize weights before training for hidden layers of both MLP and CNN models. The learning rate for MLP training was chosen as 0.0001. The mini-batch size and the number of training epochs were selected as 256 and 100, respectively. Adam optimizer was used with the following parameters: gradient damping factor is 0.9; attenuation coefficient of the squared gradient is 0.999; small constant is  $7.000 \cdot 10^{-7}$ . For CNN models, the learning rate parameter was 0.001, the mini-batch size was 256. We used 25 training epochs to train each CNN model.

#### F. Accuracy and performance metrics

We have considered total of 18 computation cases that differ in the values of the position and orientation of the SDO relative to the ion thruster, shown in the Fig. 4. The parameters marked as a variable took the values within the considered ranges with a fixed step equal to 0.001. The values of the first 6 cases considered as nominal.

The components of the normalized error vector are defined as follows:

$$\Delta F^k = F_R^k - F_P^k, \quad k=x, y, z, \quad (2)$$

where  $F_R$  is the normalized reference force vector;  $F_P$  is the force vector predicted by the model.

TABLE III.

Case index	Center of mass coordinates			Euler angles		
	$x, m$	$y, m$	$z, m$	$\psi, rad$	$\phi, rad$	$\theta, rad$
1	*	0	7	0	0	0
2	0	*	7	0	0	0
3	0	0	*	0	0	0
4	0	0	7	*	0	0
5	0	0	7	0	*	0
6	0	0	7	0	0	*
7	*	1	9	1.507	1.507	1.507
8	1	*	9	1.507	1.507	1.507
9	1	1	*	1.507	1.507	1.507
10	1	1	9	*	1.507	1.507
11	1	1	9	1.507	*	1.507
12	1	1	9	1.507	1.507	*
13	*	1	9	-1.507	-1.507	-1.507
14	1	*	9	-1.507	-1.507	-1.507
15	1	1	*	-1.507	-1.507	-1.507
16	1	1	9	*	-1.507	-1.507
17	1	1	9	-1.507	*	-1.507
18	1	1	9	-1.507	-1.507	*

FIG. 4. Coordinates of center of mass and orientation parameters of SDO wrapped into 18 test cases used to validate accuracy of trained models. Variable parameter is marked as asterisk (\*)

Execution time was considered as the primary performance metric. In order to track it, we have wrapped

neural network inference into Python code that measures execution time in milliseconds for each computational case during testing. The traditional solution was used as a standalone Python package with a callable function; the time was measured the same way as for the neural networks. All time measuring was performed on a same PC with the CPU, described in the “Training and validation methods” chapter.

### III. RESULTS AND DISCUSSION

#### A. Training results

During training of weights, following results has been obtained. Training of MLP models after 25 epochs were enough to yield accuracy rate higher than 99% for each model. Validation accuracy was a bit lower; however it can be seen that no tendency to over-training was shown. Fig. 5 shows training and validation loss graph for MLP3 model as an example.

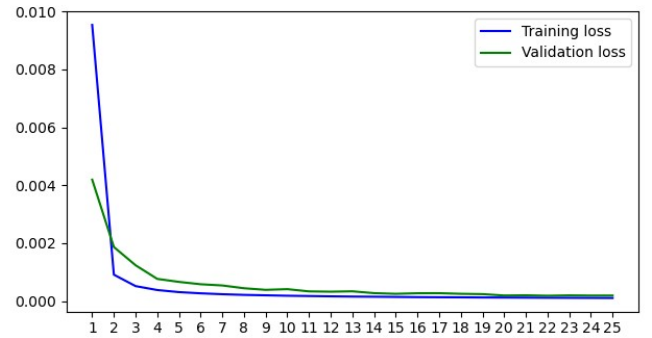


FIG. 5. Training and validation loss of MLP3 model

As mentioned earlier, CNN models were trained with a batch size of 256. Each model with a custom CNN architecture has shown no less than 97% accuracy rate after training with 25 epochs. Fig. 6 shows training and validation loss of the CNN3 model as an example.

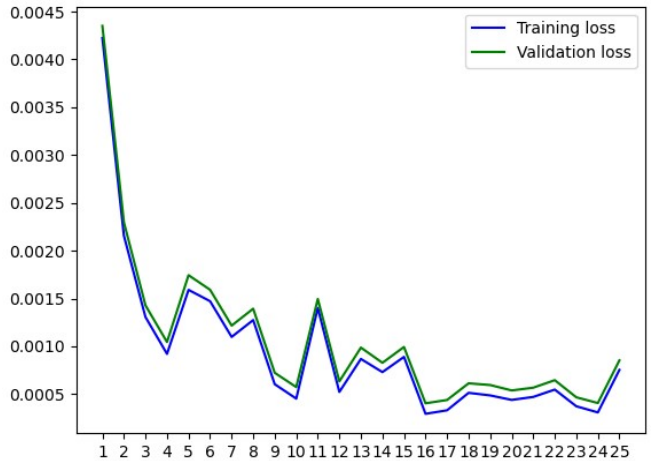


FIG. 6. Training and validation loss during training of CNN3 model

The validation accuracy has shown no signs of over-training as well.

#### B. Testing results

During the testing phase on 18 computational cases described in the previous section, following results has been obtained. Fig. 7, 8 and 9 present examples of plots of errors relative to traditional method for computational case 3 for each trained and validated MLP model. Computational case 3 is considered as nominal for the approximated model. The

ordinate axis shows the values of the normalized error for each of the outputs of the neural network. The variable parameter is displayed along the abscissa-axis.

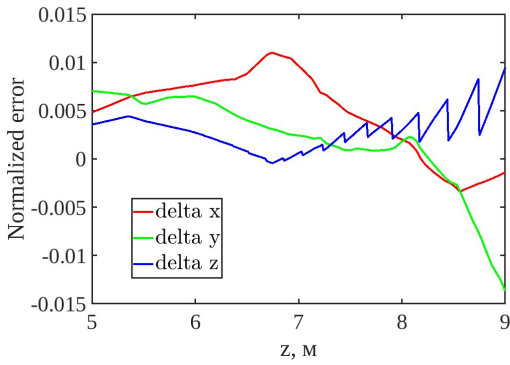


Fig. 7. Normalized errors of MLP1 for case 3

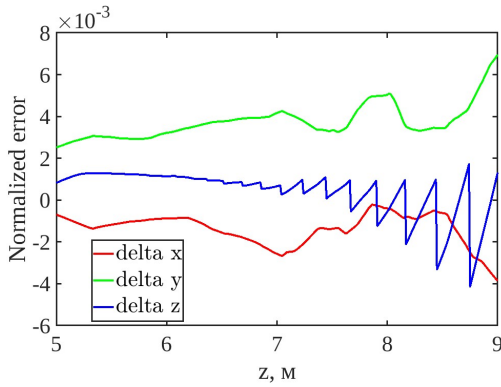


Fig. 8. Normalized errors of MLP2 for case 3

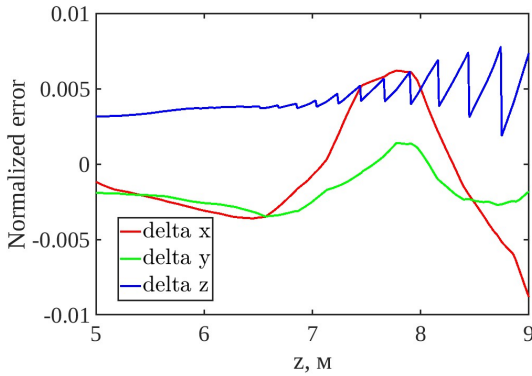


Fig. 9. Normalized errors of MLP3 for case 3

The graphs show that the model MLP2 had slightly more accuracy during computing the case 3 than the other models. MLP1 and MLP3 gathered similar results, with MLP3 being more accurate during computing the result.

Fig. 10 contains data with relative maximum errors registered across all computational cases for all (MLP and CNN) models. We have collected errors for each of three outputs (force projections for each axis), and the maximum error out of three outputs was used to fill the table. As can be seen, MLP models yielded best results for cases 1-6, which are considered as nominal for the approximated function. On the contrary, these cases were problematic for some of the models of CNN architecture. The case 17 showed the highest registered errors for MLP1, MLP2 and MLP3 models across all cases, with error values of 18.694% ( $-1.190 \cdot 10^{-4}$  N),

14.599% ( $-9.300 \cdot 10^{-5}$  N) and 11.570% ( $-7.400 \cdot 10^{-5}$  N) respectively.

TABLE IV.

Case index	Registered max relative error (%)					
	MLP1	MLP2	MLP3	CNN1	CNN2	CNN3
1	2.720	2.043	2.524	18.751	11.195	7.686
2	3.873	3.094	2.076	18.855	9.607	9.558
3	1.367	0.695	0.882	3.01	3.738	4.132
4	1.088	0.428	0.427	2.863	1.555	4.131
5	1.064	1.162	0.921	3.846	3.525	5.486
6	1.105	0.871	0.619	3.999	3.869	4.411
7	7.329	5.111	7.018	15.26	9.372	11.259
8	8.432	4.642	4.692	13.976	16.879	7.085
9	9.931	6.198	6.253	27.192	9.677	15.321
10	7.532	3.283	1.589	4.277	2.865	3.785
11	14.991	12.792	8.296	14.005	13.022	10.268
12	12.307	6.079	5.699	4.277	2.865	3.785
13	7.915	6.891	5.956	15.26	9.372	11.259
14	7.646	7.862	10.025	13.944	16.889	7.085
15	7.909	6.886	5.139	27.492	9.677	15.323
16	6.752	5.637	2.709	4.271	2.843	3.782
17	18.694	14.599	11.570	14.235	12.99	10.255
18	6.752	5.588	5.850	4.283	2.865	3.785
Avg	7.078	5.215	4.569	11.655	7.934	7.689

Fig. 10. Maximum relative errors registered for outputs of each computational case during testing of each ANN.

Max error for CNN1 model was registered for computational case 15 with relative error of 27.492% and absolute error of  $1.750 \cdot 10^{-4}$  N. For CNN2 it was computational case 14 with relative error of 16.889% and absolute error of  $1.070 \cdot 10^{-4}$ . For CNN3 model, the case with maximum registered error was the case 15 with maximum relative error of 15.323% and the absolute error of  $9.760 \cdot 10^{-5}$  N. As can be borrowed from the result, in order to get the best results, it is important to train CNN models using big amounts of data for training.

### C. Performance results

Computation time that was needed to complete each computational case using MLP, CNN and traditional method presented in the Fig. 11.

TABLE V.

Case index	Time consumed for method (s)						
	Traditional	MLP 1	MLP 2	MLP 3	CNN 1	CNN 2	CNN 3
1	17.66	6.35	6.31	6.29	7.34	7.06	6.33
2	17.51	6.08	6.49	6.09	5.59	5.95	4.64
3	38.01	12.58	12.31	12.48	8.43	12.97	13.35
4	27.44	9.64	10.53	10.04	10.43	9.15	10.51



Case index	Time consumed for method (s)						
	Traditional	MLP 1	MLP 2	MLP 3	CNN 1	CNN 2	CNN 3
5	28.02	9.79	9.77	9.61	9.81	9.23	9.81
6	28.01	9.52	9.57	9.63	8.66	8.62	9.25
7	11.84	6.05	6.22	6.10	5.82	5.69	5.34
8	11.51	6.19	6.14	6.17	6.05	6.25	6.84
9	26.56	12.13	12.15	12.54	11.22	12.59	13.86
10	15.86	9.59	9.72	9.65	8.97	7.57	7.79
11	20.32	9.69	9.81	9.65	6.02	10.33	7.35
12	15.77	9.64	9.57	9.73	10.20	7.21	9.50
13	11.83	6.27	6.39	6.11	5.41	6.01	4.51
14	11.51	6.35	6.39	6.33	7.40	7.42	6.59
15	26.32	12.22	12.31	12.53	11.25	12.23	12.89
16	15.94	9.66	10.79	14.44	8.19	10.17	8.41
17	19.72	11.05	11.54	11.19	10.22	7.64	9.46
18	16.09	11.04	11.24	11.01	11.81	6.93	9.23
Avg	19.99	9.10	9.29	9.42	8.49	8.50	8.65

Fig. 11. Time consumed by each method (traditional and using ANN) in order to complete each computational case (in seconds)

As can be seen in the table, every trained ANN model was quicker to solve cases than the traditional method. Particularly, the cases 2 and 3 show that traditional method was almost 3 times slower than our slowest models (MLP2 and CNN3) for this case. Moreover, the average time of computation for ANNs was at least 2 times less than the traditional approach. This results show that both MLP and CNN models provide alternative method of determining of the force that is generally faster than the traditional approach.

#### IV. CONCLUSION

The possibility of using methods of deep learning to determine the force impact of the ion thruster plume on the SDO was shown. The proposed MLP models provide the accuracy of the force impact determination which is sufficient to solve the considered class of problems. CNN models are less accurate, however can be also used for the tasks without prior knowledge about orientation of the SDO object. At the same time, ANN models make it possible to obtain the results generally faster in comparison with the methods used

previously. This fact makes them promising to use both for on spacecraft boards and in mathematical modeling of missions of contactless space debris removal.

#### REFERENCES

- [1] J.-C. Liou *et al*, "Stability of the future LEO environment – an IAADC comparison study", in 6th European Conference on Space Debris, Darmstadt, 2013. [Online] Available: <https://conference.sdo.esoc.esa.int/proceedings/sdc6/paper/199>
- [2] C. Bombardelli, J. Peláez, "Ion Beam Shepherd for Contactless Space Debris Removal", *JGCD*, vol. 34, no. 3, pp. 916 – 920, 2011.
- [3] F. Cichocki, M. Merino, E. Ahedo, "Collisionless Plasma thruster plume expansion model", *Plasma Sources Science and Technology*, vol. 24, no.3, pp. 83 – 95, 2015.
- [4] A. Alpatov, F. Cichocki, A. Fokov, S. Khoroshylov, M. Merino, A. Zakrzhevskii, "Algorithm for Determination of Force Transmitted by Plume of Ion Thruster to Orbital Object Using Photo Camera", presented at 66th International Astronautical Congress, Jerusalem, Israel, pp. 1-9.
- [5] A. A. Fokov, S. V. Khoroshylov "Validation of simplified method for calculation of transmitted force from plume of electric thruster to orbital object", *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya*, no. 2, pp. 55-66, 2016.
- [6] C. Bombardelli, H. Urrutxua, M. Merino, E. Ahedo, J. Peláez, "Relative dynamics and control of an ion beam shepherd satellite", *Spaceflight mechanics*, vol. 143, pp. 2145 –2158, 2012.
- [7] G. Cybenko, "Approximation by superpositions of a sigmoidal function", *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 2, no. 4, pp. 303–314, 1989.
- [8] K. Hornik, "Approximation capabilities of multilayer feedforward networks", *Neural Networks*, vol. 4, no. 2, pp. 251–257, 1991.
- [9] S. Haykin, *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*, Englewood Cliffs, NJ. Prentice Hall. 1998.
- [10] R. Venkatesan, B. Li, *Convolutional Neural Networks in Visual Computing: A Concise Guide*, NW Boca Raton, FL. CRC Press. 2017.
- [11] Y. LeCun *et al*, "Backpropagation Applied to Handwritten Zip Code Recognition", *AT&T Bell Laboratories*, Vol. 1 (4), pp. 541-551. December, 1989.
- [12] F. Zhuang *et al*, "A Comprehensive Survey on Transfer Learning", *Proceedings of the IEEE*, 109, pp. 43–76, 2021.
- [13] D. Steinkraus, P. Simard, I. Buck, "Using GPUs for Machine Learning Algorithms", in 12th International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR 2005), pp. 1115–1119, doi:10.1109/ICDAR.2005.251
- [14] Khoroshylov S. V., Redka M. O. "Deep learning for space guidance, navigation, and control", *Space Science and Technology*, 27, № 6 (133). pp. 38–52, 2021.
- [15] M. O. Redka, S. V. Khoroshylov "Determination of the force impact of an ion thruster plume on an orbital object via deep learning", *Space Science and Technology*, 28, № 5 (138). pp. 15–26, 2022.

# Database Structure for Medical Data Protection Based on Blockchain

Yurii Baryshev  
Department of Information Protection  
Vinnytsia National Technical University  
Vinnytsia, Ukraine  
yuriy.baryshev@vntu.edu.ua

Vladyslava Lanova  
Department of Information Protection  
Vinnytsia National Technical University  
Vinnytsia, Ukraine  
lanovaia02y@gmail.com

## Структура бази даних для захисту медичних даних на основі блокчейну

Юрій Барішев  
Кафедра захисту інформації  
Вінницький національний технічний університет  
Вінниця, Україна  
yuriy.baryshev@vntu.edu.ua

Владислава Ланова  
Кафедра захисту інформації  
Вінницький національний технічний університет  
Вінниця, Україна  
lanovaia02y@gmail.com

**Abstract** — Medical data protection within electronic documents processing system is considered. The actuality of a blockchain technology usage for the task is argued. Family doctors medical practice was analyzed and the relational database was created. In order to protect sensitive data from forgery the part of entities' attributes was proposed to be stored in blockchain bearing in mind patient's unlinkability requirements. The hybrid structure which allows to link public blockchain and relation database was proposed. The perspectives of the further research were determined.

**Анотація** — Розглянуто захист медичних даних у системі обробки електронних документів. Аргументовано доцільність використання технології блокчейн для поставленої задачі. Проаналізовано медичну практику сімейних лікарів та створено реляційну базу даних. Щоб захистити конфіденційні дані від підробки, частину атрибутів сутностей було запропоновано зберігати в блокчейні, враховуючи вимогу знеособленості пацієнтів. Була запропонована гібридна структура, яка дозволяє зв'язати публічний блокчейн і реляційну базу даних. Визначено перспективи подальших досліджень.

**Keywords** — *cybersecurity, database, blockchain, data protection, personal data, unlinkability.*

**Ключові слова** — *кібербезпека, база даних, блокчейн, захист даних, персональні дані, знеособленість.*

### 1. INTRODUCTION

In medical practice medical malpractices and unfounded claims of patients are possible, that's why medical data processing should provide protection for both patients and medical workers. The important problem while providing such protection is related to the ability of documents forgery or their access restriction due to legal regulations those consider such information as personal data and/or medical secret [1-3]. The relevance of integrity protection of such data and, at the same time, compliance with the requirements for their unlinkability is to be analyzed from these angles [3].

Blockchain can ensure the confidentiality of patients' entries when making medical history [4]. The backbone of the medical system is an institute of family doctors, who are the basis of providing primary medical care and ensuring the interaction between patients and medical specialists [5]. Consequently, it is logical to solve the problem of medical data integrity protection starting from the institute of a family medicine. The goal of this study is to increase data integrity protection by the means of its unlinkable backuping in order to aid legal settlement of conflicts in the medical sphere. To achieve the goal of this study, one should solve the next tasks: data decomposition in the medical practice of family doctors; determination of crucial data protection mechanisms; development of smart contracts for saving data in a blockchain.

## 2. EXISTING WORK ANALYSIS

Advantages of automated document processing workflows are important for the medical sphere. Thus, the Estonian e-health project of a general patient data register launched in 2016 proved itself well in Europe [6]. Each person in Estonia who visited a doctor has an online e-Health record that can be tracked by all state's medical facilities. The usage of the blockchain technology in the system provides data integrity and mitigates internal threats to the data [6].

In Great Britain two years ago a blockchain project was started for safely storing of patients' personal data – Medicalchain [7]. Patients have the ability to grant access to their electronic health records to other users and revoke access by setting up a time-limited gateway, thereby improving their experience and guaranteeing data security [7].

Ukrainian government implemented a system of medical data electronic processing, but now it uses a centralized data storage, and therefore it is inferior from the integrity and observability points of view. At the same time above-mentioned blockchain based information systems aren't adapted to the respective rules and regulations established in Ukraine for the medical data processing routine.

## 3. DATA DECOMPOSITION

During the research, the medical data storage by means of the blockchain technology was analyzed. The focus of the research was set on family doctors' practice related data. Based on this analysis the major entities were determined. The further application of relation normalization in the context of relational databases allowed to yield the following entities and their attributes:

- a. patient medical card: d of the patient, full name of the patient, age, date of birth, address, phone number, congenital defects, information about previous diagnoses;
- b. illness and inherited diseases: name of the illness, sick relatives (without name);
- c. referral for the examination: id of referral, specialist, id of the patient, previous diagnosis; primary key is id of referral; information about a referral results of a referral: name of the referral name of the referral, reason of purpose, obtained indicators, result/interpretation;
- d. issuing a prescription: id of prescription, name of medicine, active substance, conditions for prescribing medicine, dosage, the full name of the patient, age; primary key is id of prescription.
- e. obtaining a sick leave: id of sick leave, full name of the patient, diagnosis, disease starting date, purpose of treatment, recovery date;
- f. vaccination card: id of vaccination card, name of the vaccination, vaccination prescription, type of vaccination/re-vaccination, age, date of vaccination, dosage, reaction, medical contradictions.

This relation database was further normalized to the fourth normal form in order to avoid anomalies. The database is supposed to be stored on a server within infrastructure of Ministry of Health Care of Ukraine.

## 4. DATA SENSITIVITY ANALYSIS

To define data, which should be stored in a public blockchain the analysis was performed for the each of the above-mentioned entities. The sensitivity and integrity protection for each of the attributes of the database were considered. For instance, result of the analysis for the entity "medical card of a patient" is presented in table 1.

TABLE I. ENTITY'S ANALYSIS SAMPLE

Attribute	Patient sensitive	Doctor protection	Store to blockchain
Full name of the patient	+	-	-
Age	-	-	+
Date of birth	+	-	-
Address	+	-	-
Phone number	+	-	-
Congenital defects	+	-	-
Information about previous diagnoses	-	+	+

The performed analysis allowed to create the hybrid information storage system architecture, which uses both the blockchain and the relation database.

## V. CONCLUSION

Conducted survey allowed to prove the importance of medical data processing using blockchain technology. The family doctors practice were analyzed and the respective database was designed. The further analyses of designed entities allowed to define attributes, which are crucial of storing within a public blockchain, and ones, which shouldn't be stored there. The perspective of further the research should be set on the respective smart contracts development.

## REFERENCES

- [1] "Official Legal Text,"General Data Protection Regulation (GDPR), 27-Sep-2022. [Online]. Available: <https://gdpr-info.eu/>. [Accessed: 09-Dec-2022].
- [2] Закон України, "Про захист персональних даних," [Online]. Available: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2297-17>. [Accessed: 09-Dec-2022].
- [3] Закон України, "Основи законодавства України про охорону здоров'я". [Online]. Available: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2801-12> [Accessed: 09-Dec-2022].
- [4] Blockchain technology applications in healthcare: an overview [Online]. Available:<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S266660302100021X#:~:text=A%20Blockchain%20network%20is%20used,ones%20in%20the%20medical%20field> [Accessed: 02-Dec-2022].
- [5] Blockchain's potential use cases for healthcare: hype or reality? [Online] Available: <https://www.healthcareitnews.com/news/blockchains-potential-use-cases-healthcare-hype-or-reality> [Accessed: 02-Dec-2022]
- [6] E-health Record – e-Estonia [Online]. Available: <https://e-estonia.com/solutions/healthcare/e-health-records/> [Accessed: 03-Dec-2022]
- [7] MedicalChain [Online]. Available: <https://medicalchain.com/en/>. [Accessed: 03-Dec-2022]

# Advanced Data Encryption Method based on the Monochrome Pixel Alphabet

Oleg Boychenko  
Research Department of  
Scientific-Research center  
Korolov Zhytomyr Military  
Institute  
Zhytomyr, Ukraine  
[bos\\_2006@ukr.net](mailto:bos_2006@ukr.net)

Oleksii Samchyshyn  
Information Protection and  
Cybersecurity Department  
Korolov Zhytomyr Military  
Institute  
Zhytomyr, Ukraine  
[samyj123@ukr.net](mailto:samyj123@ukr.net)

Anatolii Zhukov  
Information Protection and  
Cybersecurity Department  
Korolov Zhytomyr Military  
Institute  
Zhytomyr, Ukraine  
[anzhukov@ukr.net](mailto:anzhukov@ukr.net)

Ihor Humeniuk  
Information Protection and  
Cybersecurity Department  
Korolov Zhytomyr Military  
Institute  
Zhytomyr, Ukraine  
[ig\\_gum@ukr.net](mailto:ig_gum@ukr.net)

Oleksandr Lahodnyi  
Protection of the state secrets  
and information Department  
Korolov Zhytomyr Military  
Institute  
Zhytomyr, Ukraine  
[lov.82@ukr.net](mailto:lov.82@ukr.net)

Irina Kosheva  
Information Protection and  
Cybersecurity Department  
Korolov Zhytomyr Military  
Institute  
Zhytomyr, Ukraine  
[irina1410kosheva@gmail.com](mailto:irina1410kosheva@gmail.com)

**Abstract**—In order to ensure high stability of encrypted information when transmitting it through the channels of the information and Communication Systems Network and reduce the threat of unauthorized access to it, an improved method for encrypting / decrypting digital text information based on the Pixel alphabet of a monochrome image is proposed. The improvement of the method consists in changing the approach to solving the problem, namely, the encryption key is the numbers of blocks into which the monochrome image is divided, encryption and decryption is performed mathematically according to a certain formula, the result of which, together with the key sequence, is transmitted through open channels of the information and communication system. This approach provides an increase in the cryptographic stability of encrypted information by 15-20% compared to known encryption methods and algorithms.

**Keywords**—*encryption (decryption), cryptographic stability, information and communication system, Pixel Alphabet, information and cybersecurity.*

## I. INTRODUCTION

Currently, the issues of developing and implementing cryptographic methods of Information Protection are relevant for all branches of activity. Modernization of existing and development of new high-performance methods of data encryption (decryption) with high cryptographic stability is an important component in solving the issue of ensuring the appropriate level of information and cybersecurity of any organization, including critical infrastructure objects [1]. When solving this problem, it is extremely necessary to ensure high cryptographic stability of the developed and/or developed encryption algorithms.

However, despite the large number of existing services (software) and hardware that implement data encryption/decryption, there are successful unauthorized access to information resources of information and

communication systems (ICS) and cyber attacks on its network components, leading to leakage of important confidential information and violation of the main criteria of the model that regulates its cybersecurity policy [2]. So, based on these prerequisites, the purpose of this work is to improve the existing cryptographic encryption method [3] to provide the basic properties of information that will combine the features of steganographic and cryptographic tools.

## II. GENERAL IDEA OF THE PROPOSED METHOD

To achieve this goal, it is necessary to develop a Pixel alphabet of a monochrome image (static ranges of pixel brightness values of a monochrome image [0-255], which are assigned to each character of the Ukrainian and English alphabets, special symbols and numbers). A monochrome image is divided into an arbitrary (pre-determined) number of blocks of the same size. Each character of the original text message is converted to a dynamically random number from a range of Pixel Alphabet values, forming the corresponding sequence. The encryption key (corresponding block) is used to hide the message in a monochrome image. The actual encryption is performed using a mathematical formula, the components of which are the key (block number), the average value of its brightness, and a dynamically random number corresponding to the symbol. The resulting new sequence of values is passed along with the key to the addressee. Decoding is performed in reverse order.

## III. ALGORITHM OF THE PROPOSED METHOD

The developed method for encrypting/decrypting data based on the Pixel alphabet of a monochrome image consists of seven main stages.

At the stage of forming the Pixel alphabet of a monochrome image, each character (Ukrainian, English alphabets, numbers, and special characters) of the output message is assigned a certain static range of numerical values for the brightness of

pixels of a monochrome image, the boundaries of which are [000; 255]:

$$I_{cr} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}, \quad (1)$$

where:  $B_1, B_2, B_3, B_4$  – static range of numerical brightness values for the Ukrainian  $B_1 \in [000; 095]$  and English  $B_2 \in [096; 173]$  alphabets, numbers  $B_3 \in [174; 203]$  and special characters  $B_4 \in [204; 255]$  respectively.

An example of creating such an alphabet for numbers is given in table 1.

TABLE VI. PIXEL ALPHABET DIGIT ENCRYPTION

Symbol	0	1	...	8	9
Pixel alphabet	174–176	177–179	...	198–200	201–203

At the second stage, the digital bitmap image stored by the sender and addressee is divided into a pre-determined number of blocks of the same length (in fig. 2 image key.bmp is divided into 100 blocks). The average pixel brightness value is calculated for each resulting block. It is worth noting that the use of the RGB color model involves taking into account the values of three channels. In this case, the calculation results are in the range [000; 255].

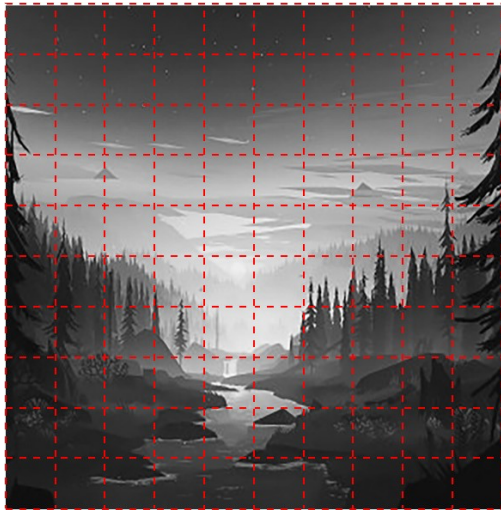


Fig. 1. Split the bitmap image into 100 blocks

In the next step, the message is converted to a sequence of numeric values based on the Pixel Alphabet. For example, for the message "cyber" this sequence will look like [102, 169, 100, 108, 149]. Next, a key is generated (stage 4), the length of which corresponds to the length of the message itself. (in this case – 5 elements). The key corresponds to the block numbers and is selected randomly by the sender, such as the type [1, 10, 5, 40, 20].

The fifth stage involves its own encryption, which is carried out according to the formula:

$$Cr = \{\overline{I_{b_i}} + I_{cr_i}\}, \quad (2)$$

where:  $I_{cr_i}$  – sequence of numeric values for each character;

$\overline{I_{b_i}}$  – average brightness values of the blocks;

The obtained sequence values, together with the corresponding block numbers (Key), are represented in hexadecimal notation and the ciphertext is calculated using the formula:

$$Code_{(16)} = \{Cr_{(16)} \oplus N_{(16)}\}, \quad (3)$$

At the stage of transmitting/receiving the ciphertext, the resulting sequence of values together with the key is transmitted to the addressee (table 2).

TABLE VII. CIPHERTEXT FORMAT

Key	1	A	5	28	14
Ciphertext	125	18D	118	116	147

The last step is to decrypt the ciphertext. This operation is performed in reverse order and consists of steps. We write them in detail.

Step 1. Calculate the numeric sequence of the Pixel alphabet of the encrypted message. To do this, use the formula:

$$Cr_{(16)} = \{Code_{(16)} \oplus N_{(16)}\}. \quad (4)$$

This sequence and Key  $N_{(16)}$  are then given in decimal.

Step 2. use the key to determine the block numbers for which the average pixel brightness value and the sequence of numeric values of each message character are calculated.

Step 3. in this lesson, the ciphertext is decrypted using the Pixel Alphabet.

## CONCLUSIONS

The results of verification of the improved method of data encryption / decryption based on the Pixel alphabet of a monochrome image and its experimental study indicate a significant increase in the cryptographic stability (probabilistic characteristics) of encrypted information by 15-20% compared to known encryption methods and algorithms. This, in turn, can significantly reduce the level of successful attack on the cipher and the threat of leakage of confidential information.

The proposed method should be used for the effective functioning of ICS networks when transmitting cryptographic encrypted text information in the presence of a potential threat of an attack on the cipher, threats of violation of its integrity, confidentiality and accessibility.

## REFERENCES

- [1] Hryshchuk R., Humeniuk I., Okhrimchuk V., "Method of identification of dynamic images in video surveillance systems of critical infrastructure," in Security of information, 2019. vol. 25, № 2. pp. 117–121. doi: <https://doi.org/10.18372/2225-5036.25.13842>.
- [2] Hryshchuk R., Danyk Yu., "Fundamentals of Cyber Security. Monograph", in Zhytomer: ZhNAEU, 2016. 636 p.
- [3] O. Boychenko, I. Humeniuk, K. Smetanin, O. Samchyshyn, "Method of encrypting/decrypting data based on the pixel alphabet of a monochrome image," 2021. Patent No. 147950, Filed Jan. 20th., 2021, Issued June 24th., 2021.

# Уточнений метод пошуку неможливих диференціалів із застосуванням до шифру Qalqan

Владислав Драга, Сергій Яковлєв, Ганна Южакова  
Навчально-науковий фізико-технічний інститут,  
Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”  
Київ, Україна  
vlad.dragal@gmail.com, yasv@rl.kiev.ua, yuzha31711@gmail.com

## Adjusted Method for Impossible Differential Search with Application to Qalqan Cipher

Vladyslav Draha, Serhii Yakovliev, Hanna Yuzhakova  
Institute of Physics and Technology  
National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”  
Kyiv, Ukraine  
vlad.dragal@gmail.com, yasv@rl.kiev.ua, yuzha31711@gmail.com

**Анотація**—Запропонований Лінг Сунем та ін.  $U^*$ -метод для аналізу неможливих диференціалів SP-подібних шифрів дозволяє перенести задачу моделювання проходження диференціалів через шифр у задачу програмування з обмеженнями. У даній роботі  $U^*$ -метод було адаптовано для слово-орієнтованих шифрів, які використовують модульне додавання. Уточнений методі застосовано до модифікації шифру Qalqan, для якої було знайдено чотирираундовий неможливий диференціал.

**Abstract**—Proposed by Ling Sun *et al.*  $U^*$ -method for impossible differential analysis of SP-like ciphers allows to transfer a problem of modeling the propagation of differentials through the cipher to a problem of programming with constraints. In this paper, we adapted the  $U^*$ -method to word-oriented SP-like ciphers with modular addition. We applied adjusted method to the modification of the Qalqan cipher and we found four-round impossible differential for this modification.

**Ключові слова**—задача виконання обмежень; неможливий диференціал; SP-подібний шифр; Qalqan.

**Keywords**—constraint satisfaction problem; impossible differential; SP-like cipher; Qalqan.

### I. ВСТУП

Однією із найважчих і дуже складних задач в криптографії є задача доведення гарантованої стійкості криптопримітиву до певного методу криптоаналізу. Усі сучасні шифри, які використовуються на практиці, можуть

мати певні приховані вразливості, які виявляються лише із розробкою та застосуванням нових методів та підходів до криптоаналізу.

Використання неможливих диференціалів для пошуку раундових ключів шифру є потужним методом для аналізу симетричних блокових шифрів, який дозволив уточнити оцінки стійкості багатьох шифрів. Головною проблемою даного методу є те, що для пошуку найдовших диференціальних розрізнявачів потрібно перебрати усі можливі вхідні слова, аби гарантувати, що знайдені розрізнявачі є найкращі із усіх можливих. Така задача є суто переборною, тому залишається невирішеною на сучасних обчислювальних пристроях за розумний час.

У даній роботі ми розглянемо один з новітніх підходів до аналізу неможливих диференціалів, який ґрунтується на так званому *програмуванні з обмеженнями* (constraint programming). Ми адаптуємо цей метод до певного класу недвійкових блокових шифрів та застосуємо для аналізу блокового шифру Qalqan, запропонованого у 2021 році.

### II. ЗАДАЧА ВИКОНАННЯ ОБМЕЖЕНЬ ТА $U^*$ -МЕТОД

Задача виконання обмежень (ЗВО, англ. constraint satisfaction problem, CSP) – це математична задача, в якій на набір змінних накладаються обмеження, які їм задовольняють. Більш формально ЗВО можна описати, як упорядковану трійку  $\langle X, D, C \rangle$ , де  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$  – це набір змінних;  $D = \{D(x_0), D(x_1), \dots, D(x_{n-1})\}$  – це область

значень яка складається з непорожніх множин;  $C = \{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\}$  – це множина обмежень. Розв’язком ЗВО називається присвоєння значень усім змінним в  $X$ , таким чином аби виконувалися усі обмеження з  $C$ .

Попри те, що задача виконання обмежень у загальному випадку є NP-повною, на даний час існують ефективні розв’язувачі таких задач над цілими та дійсними числами. У таких розв’язувачах зазвичай використовується метод пошуку в глибину із зворотним ходом, де на кожному кроці пошуку виконується присвоєння змінних із розповсюдженням обмежень. Такий підхід дозволяє на кожному кроці алгоритму видаляти ті значення, які гарантовано не зустрінуться в жодному із розв’язків.

Побудова диференціальних розпізнавачів є поширеною задачею криптоаналізу блокових шифрів. Пошук таких розпізнавачів є доволі складним і потребує багато часу і навичок криптоаналітика, тому є актуальною розробка нових ефективних методів, які дозволять досліджувати криптопримітиви у формалізованій спосіб та будуть простими у реалізації. Таким методом є  $U^*$ -метод, представлений у роботі [1]. Головна суть метода полягає у представленні раундової функції як ЗВО, в якій змінними виступатимуть певні патерни для слів різниць, а множина обмежень буде описувати формальне перетворення таких патернів під час проходження через раунди шифрування та/або їх складові.

Метод пошуку неможливих диференціалів ґрунтується на протиставленні знайдених патернів у найдовших ланцюжках диференціальних розрізнявачів між раундами шифрування і розшифрування. В  $U^*$ -методі використовується чотири основні типи патернів  $U^* = \{Z, N, N^*, U\}$ , де  $Z$  – нульовий патерн,  $N$  – ненульовий фіксований патерн,  $N^*$  – ненульовий нефіксований патерн,  $U$  – нефіксований патерн.

Аби стверджувати, що був знайдений неможливий диференціал, необхідно, щоб диференціали після шифрування і розшифрування належали до несумісних множин патернів; наприклад, патерни типу  $Z$  і  $N^*$  є несумісними, а патерн типу  $U$  є сумісним з усіма іншими патернами.

Такий підхід дозволяє прослідкувати розповсюдження диференціальних патернів через раундові функції криптопримітива, а оскільки  $U^*$ -метод не встановлює обмеження на вхідний шаблон, тоді на етапі пошуку розв’язувач ЗВО буде автоматично перебирати усі вхідні шаблони, і вичерпний пошук стає невіддільною рисою даної моделі.

### III. АНАЛІЗ БЛОКОВОГО ШИФРУ QALQAN

Блоковий SP-подібний шифр Qalqan був представлений у 2021 році як можливий кандидат на національного стандарту шифрування Республіки Казахстан [2]. Алгоритм використовує блок розміром 128 бітів, який розглядається як байтова матриця розмірами  $4 \times 4$ , та ключ змінної довжини (від 256 до 1024 бітів). Один раунд шифрування використовує три послідовних перетворення: додавання із раундовим ключем, нелінійне перетворення – заміна байтів, задана фіксованою перестановкою (S-блоком), та лінійне

перетворення, яке виконує серію додавань байтів стану. Більш точно, лінійне операція складається із двох підоперацій: «поглинання» та «розповсюдження», перша з яких додає до діагональних байтів стану усі байти відповідних рядків, а друга – додає діагональні байти до усіх байтів відповідних стовпчиків; схему лінійного перетворення наведено на рис. 1.

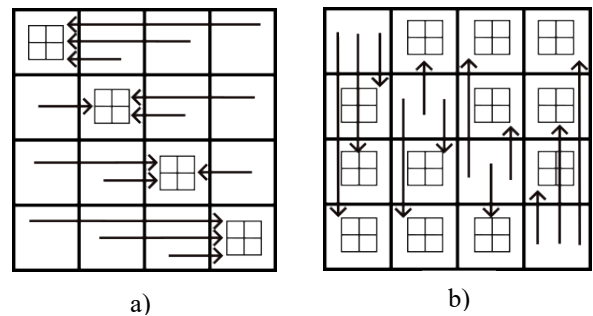


Рис. 1. Схема лінійного перетворення шифру Qalqan: а) операція «поглинання», б) операція «поширення».

Перше і останнє додавання із раундовими ключами під час шифрування відбувається за допомогою операції XOR, а всі інші здійснюються за допомогою додавання раундового ключа і вхідного слова як цілих чисел за модулем  $2^{128}$ . У даній роботі розглядається модифікація даного шифру, в якій усі операції ключового додавання до вхідного слова здійснювалися результатом побайтового додавання.

У роботі [1] автори представили формалізовані обмеження для традиційних перетворень у SP-подібних шифрах: побітове додавання слів (XOR), нелінійна заміна через S-блоки (фіксовані перестановки), Branch (копіювання одного підслова в декілька інших) та MDS (обмеження при множенні на MDS-матрицю). Оскільки в модифікованому шифрі Qalqan використовується операція побайтового додавання замість побітового, нами було знайдено обмеження для даної операції, аби моделювати проходження диференціального шаблону через раунд. Формалізований опис обмежень виконується мовою MiniZinc; у побудові ми намагались зберегти особливості синтаксису обмежень, наведених у [1].

$$MODADD(A_1, D_1, A_2, D_2, A_3, D_3) := \begin{cases} A_3 = 3 \wedge D_3 = -2, & \text{якщо } A_1 + A_2 > 2; \\ A_3 = 1 \wedge D_3 = D_1 + D_2, & \text{інакше якщо } A_1 + A_2 = 1; \\ A_3 = 0 \wedge D_3 = 0, & \text{інакше якщо } A_1 = A_2 = 0; \\ A_3 = 2 \wedge D_3 = -1, & \text{інакше якщо } D_1 + D_2 < 0; \\ A_3 = 0 \wedge D_3 = 0, & \text{інакше якщо } D_1 = -D_2; \\ A_3 = 1 \wedge D_3 = D_1 + D_2, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Такі обмеження дозволяють описати операцію «поширення», оскільки воно виконує серію попарних додавань байтів стану. Однак для операції «поглинання» обмеження необхідно уточнити: в програмуванні з обмеженнями усі обмеження для змінних мають накладатися водночас, а застосування декількох операцій

MODADD до однієї змінної може неправильно трактуватися розв'язувачем ЗВО. Для операції «поглинання» ми побудували обмеження, які враховують додавання усіх підслів у рядку матриці стану; вони описуються таким чином:

$$MULTIMODADD(A_1, D_1, A_2, D_2, A_3, D_3, A_4, D_4, A_5, D_5) := \begin{cases} A_5 = 3 \wedge D_5 = -2, & \text{якщо } A_1 + A_2 > 2 \text{ або } A_1 + A_3 > 2, \\ & \text{або } A_1 + A_4 > 2, \text{ або } A_2 + A_3 > 2, \\ & \text{або } A_2 + A_4 > 2, \text{ або } A_3 + A_4 > 2; \\ A_5 = 1 \wedge & \text{інакше якщо} \\ D_5 = D_1 + D_2 + D_3 + D_4, & A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1; \\ A_5 = 0 \wedge D_5 = 0, & \text{ін. якщо } A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0; \\ A_5 = 2 \wedge D_5 = -1, & \text{ін. якщо } D_1 + D_2 + D_3 + D_4 < 0; \\ A_5 = 0 \wedge D_5 = 0, & \text{ін. якщо } D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 0; \\ A_5 = 1 \wedge & \text{в інших випадках} \\ D_5 = D_1 + D_2 + D_3 + D_4, & \end{cases}$$

Для моделювання обмежень обернених операцій «поглинання» та «поширення» також потрібно описати системи MODSUB та MULTIMODSUB, але вони майже повністю співпадають із наведеними системами MODADD та MULTIMODADD.

За допомогою обмежень для S-блоків та отриманих обмежень MODADD (MODSUB) та MULTIMODADD (MULTIMODSUB) було змодельовано проходження диференціальних патернів через раундові функції для шифрування (розшифрування), завдяки чому вдалося знайти чотирираундовий неможливий диференціал для модифікованого шифру Qalqan. Даний чотирираундовий неможливий диференціал наведено на рис. 2; він отриманий при розгляді повного шифруючого перетворення у першому раунді. Найкращим випадком для побудови неможливого диференціалу, при якому мінімізується кількість патернів типу  $U$ , очікувано виявилось використання одного активного підслова на головній діагоналі вхідного диференціалу.

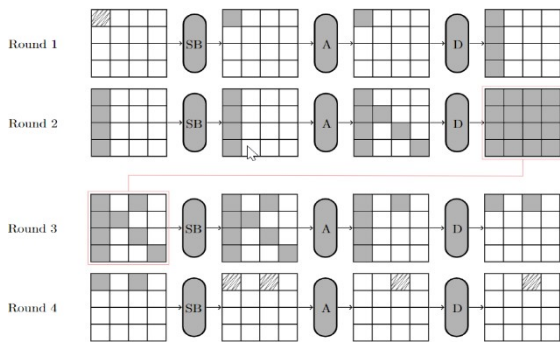


Рис. 2. Приклад неможливого чотирираундового диференціала (білий – патерн типу Z, штрихована лінія – патерн типу N, сірий – патерн типу  $N^*$ ).

Натомість якщо додатково модифікувати алгоритм шифрування шляхом пропуску нелінійного перетворення у першому раунді шифрування, то вдається продовжити неможливий диференціал ще на один раунд. Як можна бачити із рис. 3, для спеціально підібраних семи активних слів вхідної різниці в результаті лінійного перетворення шість патернів типу  $N$  перетворюються у патерни типу Z, в результаті чого на вхід другого раунда буде передано один патерн типу  $N$ , який відповідає вхідній різниці неможливого диференціалу на рис. 2.

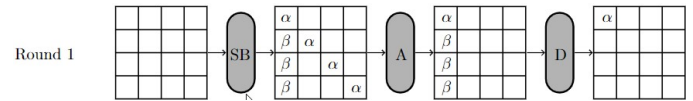


Рис. 3. Приклад проходження диференціального шаблону через перший раунд шифру Qalqan без урахування нелінійного перетворення в даному раунді; диференціали  $\alpha$  та  $\beta$  треба обирати так, щоб виконувалася рівність  $\alpha + \beta = 0 \pmod{256}$ .

Попри те, що  $U^*$ -метод виявився достатньо потужним і простим методом для дослідження SP-подібних шифрів він не потребує багато часу та обчислювальних ресурсів для знаходження неможливих диференціалів. Наші обчислення проводилися на комп'ютері з CPU AMD Ryzen 7 4700U 2 GHz, на якій вони не потребували більше 10 хвилин часу та 200 Мб оперативної пам'яті. Однак зауважимо, що зазвичай ЗВО-розв'язувачі зупиняються після знаходження першого розв'язку; пошук усіх можливих розв'язків (у нашому випадку – усіх неможливих диференціалів) може потребувати значно більше часу та обчислювальних ресурсів.

## ВИСНОВОК

У даній роботі був розглянутий  $U^*$ -метод пошуку неможливих диференціалів блокових шифрів на основі програмування з обмеженнями. Були побудовані обмеження для операцій побайтового додавання для двох та чотирьох змінних, що дозволяє застосовувати  $U^*$ -метод до шифрів, які використовують у будові додавання підслів за модулем. Завдяки побудованій системі формалізованих обмежень був знайдений чотирираундовий неможливий диференціал для модифікованого шифру Qalqan. Проведений аналіз може виступати аргументом за стійкість оригінального шифру Qalqan до аналізу неможливих диференціалів.

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] L. Sun, D. Gerault, W. Wang, M. Wang: "On the usage deterministic (related key) truncated differentials and multidimensional linear approximation for spn ciphers" in: *IACR Transaction on Symetric Cryptology* 2020(3), 262-267 (Sep 2020) Available: <https://doi.org/10.13154/tosc.v2020.i3.262-287>
- [2] L. Gorlov, R. Ibrayev, G. Ospanov, R. Itemirov, I. Kiyashko, "Algorithm shifrovaniya Qalqan / Qalqan Encryption Algorithm (in russian)," in *Proceeding of IV international Scientific Conference "Computer Science and Applied Mathematics"* (September 29-October 2, 2021, Almaty, the Republic of Kazakhstan), pp. 458-463, 2021. Available: <https://conf.iict.kz/6th-ispc-esam-en/>



# Інтервальна нечітка модель оцінювання рівня захищеності комп'ютерної системи

Наталія Кондратенко  
кафедра захисту інформації  
Вінницький національний технічний університет  
Вінниця, Україна  
kondrn2014@gmail.com

Аліна Остапенко-Боженова  
Тістед, Данія  
ostapenko-bozhenova\_a\_v@vntu.edu.ua

## Interval fuzzy model for computer system protection level assessment

Nataliia Kondratenko  
Vinnitsa National Technical University  
Vinnitsa, Ukraine  
kondrn2014@gmail.com

Alina Ostapenko-Bozhenova  
Thisted, Denmark  
ostapenko-bozhenova\_a\_v@vntu.edu.ua

**Анотація**— у роботі розглянуто використання інтервальної нечіткої моделі для оцінювання рівня захищеності комп'ютерної системи.

**Abstract**— this paper considers the use of an interval fuzzy model for assessing the level of security of a computer system.

**Ключові слова**—комп'ютерна система; рівень захищеності; нечіткі моделі; нечітка логіка

**Keywords**— fuzzy model; computer system; security level; fuzzy logic

### I. ВСТУП

Сучасні комп'ютерні системи є сукупністю різноманітних приладів, телекомунікаційних технологій, програмного забезпечення та засобів контролю та діагностики. Визначення рівня безпеки інформації в комп'ютерній системі - це задача, для розв'язання якої не завжди можливо використання традиційних математичних методів, оскільки ці методи не дозволяють обробляти нечислову та нечітку інформацію.

Поширеною є думка [1], що поняття захищеної комп'ютерної системи, рівень безпеки інформації, що притаманний при її ефективній роботі, відносять до якісних характеристик системи. Як наслідок, фахівці в галузі захисту інформації, вважають задачу визначення рівня безпеки інформації в комп'ютерній системі, низько структурованою. Розв'язок такої задачі базується на знаннях експертів та вимагає побудови громіздких процедур інтелектуального аналізу даних. Для розв'язання

такого типу задач використовують методи нечітких множин та нечіткої логіки [2].

### II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Відомо [2, 3], що знання, які отримують від експертів, містять різні види невизначеностей. Тобто, значення слів, які використовуються в антецедентах та консеквентах правил або висловлень від експертів можуть бути неоднозначними, тобто слова можуть означати різні речі для різних людей. А також, консеквенти висловлень можуть мати розкид значень, особливо, коли знання отримуються від групи експертів, відповіді яких не є узгодженими та інші невизначеності, обумовлені шумами вхідних даних. Виходячи з цього, важливим є пошук методів, що дають можливість подання та обробки недовизначених або майже суперечливих вхідних даних. Найбільш пристосованими для обробки таких даних є методи теорії нечітких множин. Для подальшого розгляду візьмемо, як базову, нечітку модель з бальною шкалою, для оцінювання рівня захищеності комп'ютерної системи, яка будується на основі нечітких множин типу-1 [1].

Розглянемо побудову інтервальної нечіткої моделі для оцінювання рівня захищеності комп'ютерної системи на основі знань експертів. Допоміжні кроки побудови інтервальної нечіткої моделі є такими. По-перше - складається експертний запит, компоненти якого попередньо ранжуються та обчислюється коефіцієнт важливості для кожної компоненти запиту (наприклад за шкалою Сааті [1]). Також експерти будують нечіткі

еталони, які відображають лінгвістичну змінну «рівень безпеки». Ці еталони використовують для порівняння з нечіткими числами. Наприклад, терм-множина лінгвістичної змінної «рівень безпеки», може мати п'ять нечітких термів:

$$T = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$$

з відповідними назвами «Низький» (Н), «Нижче середнього» (НС), «Середній» (С), «Вище середнього» (ВС), «Високий» (В). Позначимо число еталонів  $L = 5$ , шкала для всіх  $0 - 4$ . Прийемо еталони для вказаних термів на таких нечітких множинах:

$$\begin{aligned} N &= \{1/0, 0,5/1, 0,2/2, 0,1/3, 0,06/4\}; \\ NS &= \{0,5/0, 1/1, 0,5/2, 0,2/3, 0,1/4\}; \\ C &= \{0,1/0, 0,2/1, 0,5/2, 1/3, 0,5/4\}; \\ VS &= \{1/0, 0,5/1, 0,2/2, 0,1/3, 0,06/4\}; \\ V &= \{0,06/0, 0,1/1, 0,2/2, 0,5/3, 1/4\}. \end{aligned}$$

По-друге - відбувається оцінювання користувачами стану системи відповідно запиту. Вочевидь, процес оцінювання залежить від багатьох суб'єктивних факторів, які вносять невизначеність у вхідні дані та можуть суттєво вплинути на результати обчислень. З метою врахування цих невизначеностей будемо інтервальну нечітку модель з бальною шкалою.

### III. Розв'язання задачі

Нехай користувач відповідає на попередньо задані ранжовані запитання (компоненти запиту) за складеною експертом  $N$ -бальною шкалою. Для проведення розрахунків вводиться діапазон шкали  $[X_j^-, X_j^+]$ , ( $j = 1 \dots n$ ), який може варіюватися в залежності від складності загрози. Кожне фіксоване значення  $X_j^* \in [X_j^-, X_j^+]$  відображається на множину еталонних нечітких чисел  $U_j^* = [0, L - 1]$ , де  $L$  - кількість еталонів за співвідношенням:

$$U_j^* = (L - 1) \frac{X_j^* - X_j^-}{X_j^+ - X_j^-}$$

Далі відбувається розрахунок функції належності  $\mu_i^j(U_j^*)$ , де  $i=1 \dots L$  за співвідношенням [1]:

$$\mu_i^j(U_j^*) = \left[ \frac{1}{1 + (U_j^* - i + 1)^2} \right]^{PN_j \times n}$$

Значення  $PN_j$  відповідає коефіцієнту важливості, де  $j$  змінюється від одиниці до  $n$ . Значення рівня захисту в системі буде визначатися за допомогою логічного виразу [1, 2]:

де  $i = 1, L$  - номер терму з терм-множини  $T$ ;  $j = 1, n$  - номер компоненти експертного запиту.

Відповідно поставленої задачі, обробка результатів опитування відбувається в інтервальній формі: відповіді користувачів на задану компоненту запиту подаються у вигляді інтервалу  $[M_x - \sigma, M_x + \sigma]$ , де  $M_x$  та  $\sigma$  - відповідно математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення отриманих відповідей. Зважаючи на це, величини  $U_j^*$ ,  $\mu_i^j(U_j^*)$  та  $\mu_s(X_j^*)$  є інтервалами, і математичні операції з ними виконуються за правилами інтервальної математики. Приклад оцінювання користувачами стану системи (результати опитування на основі інтервальної нечіткої моделі з бальною шкалою).

TABLE I. ТАБЛИЦЯ 1. Відповіді користувачів

Номер (j)	1	2	3	4	5	...	10	M	σ	M-σ	M+σ
1	1	3	1	1	2	...	2	1.5	0.43	1.07	1.93
2	2	4	4	3	2	...	4	3.5	0.54	2.96	4.04
3	2	3	4	2	2	...	2	2	0.51	1.49	2.51
4	4	3	4	4	2	...	4	3.6	0.40	3.20	4.00

Отримані значення ( $U_j^*$  та  $\mu_i^j(U_j^*)$ ) наведено в табл. 2.

TABLE II. ТАБЛИЦЯ 2. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ ФУНКЦІЙ НАЛЕЖНОСТІ

Номер (j)	$U_j^*$ (j=1,4)	$\mu_1^j(U_j^*)$	$\mu_2^j(U_j^*)$	$\mu_3^j(U_j^*)$	$\mu_4^j(U_j^*)$	$\mu_5^j(U_j^*)$
1	1.43	2.57	0.03	0.15	0.22	0.41
2	2.37	3.23	0.04	0.08	0.10	0.25
3	0.59	1.01	0.59	0.80	0.89	1.00
4	3.20	4.00	0.48	0.53	0.55	0.63

В результаті всіх обчислень маємо показник рівня захищеності комп'ютерної системи:

$$\mu_s(X_j^*) = [0, 44; 0, 60].$$

Це значення відповідає  $\mu_3$ , тому для прийняття рішення вибирається нечіткий терм  $T_3$ - «середній», що і визначає рівень захищеності в розглянутому прикладі

### ВИСНОВКИ

Показано побудову інтервальної нечіткої моделі для оцінювання рівня захищеності комп'ютерної системи на основі знань експертів. Наведено приклад розрахунків основних параметрів інтервальної нечіткої моделі в умовах невизначеності вхідних даних.

### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Корченко А.Г. Построение систем защиты информации на нечетких множествах. - Киев, «МК-Пресс», 2006. - 316с.
- [2] Liang, Q. Interval Type-2 fuzzy logic systems: theory and design [Text] / Q. Liang, J. M. Mendel // IEEE Trans. on Fuzzy Syst. - 2000. -V. 8. - P. 535-550.
- [3] Кондратенко, Н. Р. Дослідження адекватності інтервальних нечітких моделей типу-2 в задачах ідентифікації складних об'єктів [Текст] / Н. Р. Кондратенко, О. О. Снігур // Системні дослідження та інформаційні технології. - 2019. - № 4. - С. 94-104

# Алгоритм шифрування зі зменшенням довжини ключа для систем управління БПЛА

Максим Огурцов  
Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
maksymogurtsov@gmail.com

## Encryption algorithm with reduced key length for UAV control systems

Maksym Ogurtsov  
V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
maksymogurtsov@gmail.com

*Анотація*— В даній роботі описані проблеми наявних на сьогоднішній день криптографічних алгоритмів, виконаний стислий аналіз існуючих симетричних алгоритмів шифрування, застосованих для захисту каналів зв'язку безпілотних авіаційних комплексів. Розглянуто особливості керування роями БПЛА для їх урахування при захисті каналів керування. На основі отриманих результатів розроблений алгоритм шифрування зі зменшенням довжини ключа (вимагається передача 256 бітів ключа замість 512) для каналів зв'язку, систем управління та передачі даних безпілотних авіаційних комплексів та систем захисту інформації в інформаційно-телекомунікаційних системах та виконано його аналіз задля визначення переваг та недоліків в порівнянні з існуючими алгоритмами. До переваг відноситься те, що жодна інформація не передається в мережі у відкритому вигляді; пропонується алгоритм вимагає передачі удвічі меншого за розміром сеансового ключа. Застосування триключового алгоритму в якості надбудови над достатньо надійним симетричним криптографічним алгоритмом (як обраний алгоритм DSTU 7624:2014) не призведе до зменшення його криптостійкості.

*Abstract*— This work describes the problems of the cryptographic algorithms available today. The concise analysis of the existing symmetric encryption algorithms applicable to the protection of the communication channels of unmanned aircraft systems is performed. The features of UAV swarm control are considered to take them into account when protecting UAV control channels. Based on the obtained results, the encryption algorithm with a reduced key length (256 bits key length is required to be transferred instead of 512 bits) was developed for communication channels, control and data transmission systems of unmanned aircraft complexes, and information protection systems in information and telecommunication systems. Its

analysis was performed to determine its advantages and shortcomings compared to existing algorithms. The advantages include the fact that no information is transmitted over the network in an open form; the proposed algorithm requires the transmission of the reduced size session key. The use of a three-keys algorithm as a superstructure over a sufficiently reliable symmetric cryptographic algorithm (as the selected algorithm – DSTU 7624:2014) will not lead to its cryptographic strength decrease.

*Ключові слова*— криптографія, криптографічний аналіз, шифрування, БПЛА, ключ шифрування

*Keywords*— cryptography, cryptographic analysis, encryption, UAV, encryption key

### I. ВСТУП

Актуальність захисту каналів зв'язку, систем управління та передачі даних безпілотних авіаційних комплексів (БпАК – складаються з одного чи декількох безпілотних літальних апаратів та засобів керування ними) в інформаційно-телекомунікаційних системах на сьогоднішній день є досить очевидною – в умовах постійних бойових дій, що виконуються збройними силами Російської Федерації відсутність такого захисту призведе до багатократного зростання втрат як БпАК, так і їх операторів, та потенційно може призводити до знищення систем управління, що застосовуються Збройними силами України, включаючи знищення командних центрів. Також це може призвести до витoku критично важливої інформації до ворога і як наслідок – до погіршення загальної ситуації на фронті.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Метою даної роботи є аналіз існуючих симетричних алгоритмів шифрування, застосованих для захисту каналів зв'язку БпАК. Та на основі результатів цього аналізу розробити алгоритм шифрування зі зменшенням довжини ключа для каналів зв'язку, систем управління та передачі даних БпАК та систем захисту інформації (СЗІ) в інформаційно-телекомунікаційних системах та виконати його аналіз задля визначення переваг та недоліків в порівнянні з існуючими алгоритмами.

### III. АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ СИМЕТРИЧНИХ АЛГОРИТМІВ ШИФРУВАННЯ, ЗАСТОСОВНИХ ДЛЯ ЗАХИСТУ КАНАЛІВ ЗВ'ЯЗКУ БпАК

Багато дослідників з різних країн проводили аналіз та порівняння існуючих симетричних алгоритмів шифрування за різними критеріями та характеристиками [1]-[6]. Але зміни в отриманих за останні роки результатах таких аналізів є порівняно невеликими – дослідники частіше за усе порівнюють популярні на сьогоднішній день алгоритми з такими, що використовувались раніше, на кшталт DES, 3DES і т.д. [4], [7]. Але такі алгоритми є застарілими, вразливими до сучасних засобів криптоаналізу (наприклад, лінійний [8] чи диференціальний криптоаналіз [9]). Тому в цій роботі вони не розглядатимуться.

Потокові (або поточні) алгоритми також розглядатись не будуть – у зв'язку з більшою складністю визначення нижньої межі гарантованої захищеності, що ними забезпечуються, та наявності відомих вразливостей навіть для найпопулярніших з них, наприклад, для RC6 [10].

Але слід розглянути криптографічні алгоритми відповідно до українського державного стандарту симетричного шифрування та такі, що застосовуються країнами-агресорами (Російська Федерація та Республіка Білорусь). Це дозволить визначити актуальність застосування вітчизняного державного стандарту та потенційні ризики цього.

Обрані для аналізу алгоритми подано у таблиці 1.

TABLE I. ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБРАНИХ АЛГОРИТМІВ СИМЕТРИЧНОГО ШИФРУВАННЯ

Алгоритм	Довжина ключа, біт	Довжина блоку, біт
AES	128-256	128
BelT	256	128
Kuznechik	256	128
ДСТУ ГОСТ 28147:2009	256	64
ДСТУ 7624:2014	128-512	128-512

Розглянемо їх детальніше.

#### A. Advanced Encryption Standard (AES)

AES – державний стандарт шифрування США [11] після проведення відповідного конкурсу Національного інституту стандартизації США NIST. Довжина ключа – 128/192/256 біт (в оригінальному алгоритмі, поданому на конкурс, був також присутній варіант з довжиною ключа 512 біт). Для алгоритму існують теоретичні атаки зі складністю, меншою, ніж складність атаки повним перебором [12] – зокрема – на основі лінійного криптоаналізу [13]. Але слід зазначити, що складність їх

виконання все ще перевищує можливості сучасних комп'ютерів, включаючи суперкомп'ютери та квантові комп'ютери.

#### B. BelT

BelT (СТБ 34.101.31-2007 «Інформаційні технології та безпека. Криптографічні алгоритми шифрування і контролю цілісності») – державний стандарт симетричного шифрування, що використовується в республіці Білорусь [14]. Для нього відомі вразливості та успішні атаки, що використовують ці вразливості [15], [16]. Таким чином, не можна визнати його надійним для використання в сучасних СЗІ.

#### C. Kuznechik

Коник (Kuznyechik, Kuznechik, Grasshopper) – стандарт симетричного шифрування в Російській Федерації з 2015 року (ГОСТ Р 34.12-2015 «Інформаційна технологія. Криптографічний захист інформації. Блокові шифри») [17]. Для цього алгоритму також виявлений ряд вразливостей [16], крім того, слід враховувати, що російські розробники алгоритму впровадили у ньому приховані вразливості для швидкого його зламування, які, наразі, загальновідомі [18]. Тому використовувати його не рекомендується.

#### D. ДСТУ ГОСТ 28147-89

ДСТУ ГОСТ 28147-89 – попередник алгоритму ДСТУ 7624:2014, оснований на радянському стандарті ГОСТ 28147-89 [19]. Для нього відомі практично застосовні атаки з меншою складністю, ніж атака повним перебором [20]. Також він поступається продуктивністю алгоритмам ДСТУ 7624:2014 та AES.

#### E. ДСТУ 7624:2014

ДСТУ 7624:2014. «Інформаційні технології. Криптографічний захист інформації. Алгоритм симетричного блокового перетворення» – алгоритм, розроблений в Україні та прийнятий в якості державного стандарту [21]. Серед варіантів допустимої довжини ключа є 512 біт, що перевищує аналогічні значення будь-яких інших світових стандартів симетричного шифрування.

ДСТУ 7624:2014 затверджений в якості державного стандарту за результатами проведення міжнародних і відкритого національного конкурсів симетричних криптографічних алгоритмів, який проводився спеціалістами з криптографічного аналізу Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, відділом Коваленко І.М. [22]. У порівнянні з вищеописаним алгоритмом AES, ДСТУ 7624:2014 забезпечує вищий рівень криптографічної стійкості [23] (в тому числі – за рахунок використання ключів шифрування довжиною 512 біт) і достатню швидкість (зокрема – в апаратній реалізації). На сьогоднішній день відомих атак або вразливостей немає.

Таким чином, за результатами проведеного аналізу, в якості симетричного криптографічного алгоритму для захисту безпроводних каналів зв'язку БПЛА рекомендується використовувати алгоритм ДСТУ 7624:2014 – оскільки він забезпечує найвищий рівень захисту та відсутність відомих практично застосованих вразливостей при достатньому рівні швидкодії.

#### IV. РОЗРОБКА АЛГОРИТМІВ ШИФРУВАННЯ ЗІ ЗМЕНШЕННЯМ ДОВЖИНИ КЛЮЧА ДЛЯ КАНАЛІВ ЗВ'ЯЗКУ, СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ ТА ПЕРЕДАЧІ ДАНИХ БпАК

Як зазначалося раніше, питання захисту інформації для каналів зв'язку БпАК на сьогоднішній день набуло особливої актуальності. На сьогоднішній день в більшості випадків керування БПЛА в БпАК здійснюється за схемою «точка-точка», алгоритми криптографічного захисту команд керування у випадку забезпечення зв'язку в мережах БПЛА та з урахуванням особливостей, притаманних таким мережам, пророблені недостатньо [24], [25], [26]. Відомі також випадки успішного перехоплення керування БПЛА у випадку недостатнього захисту команд керування [27]-[28].

Таким чином, як було визначено і описано вище, розробка та дослідження нових засобів захисту каналів передачі даних в мережах БПЛА є актуальною науковою задачею.

В даному розділі поданий розроблений новий триключовий криптографічний алгоритм керування ключами, що враховуватиме особливості функціонування безпроводних каналів зв'язку в мережах БПЛА та вимог до захисту інформації в них.

Роботу пропонуваного алгоритму розглянемо при застосуванні в якості алгоритму нижчого рівня затвердженого у державному стандарті України ДСТУ 7624:2014 криптографічного алгоритму «Калина» з розміром ключа 512 біт [29], який було обрано для застосування після проведення порівняльного аналізу симетричних криптографічних алгоритмів в попередньому підрозділі. Його було обрано як єдиний державний криптографічний стандарт у світі, що підтримує довжину ключа 512 біт. Але будемо зважати на можливість застосування також інших криптографічних алгоритмів, в тому числі – асиметричних.

На сьогоднішній день існує велика кількість робіт, присвячених забезпеченню захищеної комунікації між БПЛА та операторами [24], [25], [26], [27], [28] але вони недостатньо враховують особливості групового керування БпАК.

##### A. Особливості керування роями БПЛА

Розглянемо особливості керування роями БПЛА для їх урахування при захисті каналів керування:

- Основною відмінністю керування роями БПЛА (порівняно з керуванням окремим БПЛА, чи декількома БПЛА, коли кожен з них керується окремим оператором) є те, що практично в усіх випадках рой БПЛА виконує одну задачу і елементи рою мають постійно взаємодіяти між собою.
- Оператор не керує кожним елементом рою окремо, він віддає команди рою в цілому, що не є можливим у випадку порушень зв'язку між елементами рою.

##### B. Алгоритм керування ключами

Розглянемо роботу алгоритму, що пропонується. В мережі БПЛА (одноранговій або ієрархічній) у кожного вузла є свій унікальний довготривалий індивідуальний ключ  $K_i$ ,  $i=1\dots n$ , де  $n$  – кількість вузлів у мережі БПЛА, кожен ключ має довжину 256 біт. Їх роздає центр керування

ключами. Інші вузли мережі не мають цього довготривалого ключа. Також кожен вузол отримує випадковим чином згенерований 512-бітовий ідентифікатор сеансових ключів  $ID_i$ , що міститиме 256 нулів та 256 одиниць у випадковому порядку. Він визначатиме, які з бітів фінального сеансового ключа мають визначатись довготривалим згенерованим ключем  $K_i$ , а які – сеансовим ключем (описаний далі). Також в мережі є загальний ключ  $Y$  довжиною 512 біт, відомий всім вузлам.

Розроблене сімейство алгоритмів передбачає два режими передачі даних – ширококомовний (повідомлення призначене для всіх вузлів мережі) і адресне повідомлення (повідомлення призначене для одного вузла мережі).

*Широкомовне повідомлення.* Широкомовне повідомлення  $M_s$  складається з двох частин. Перша частина – сеансовий ключ  $S$  (генерується випадковим чином), довжиною 512 біт, зашифрований загальним ключем  $Y$ . Друга частина – власне, повідомлення (корисна інформація)  $U$ , зашифроване сеансовим ключем  $S$ . Цей режим є подібним до звичайного використання сеансових ключів, не містить новизни і не вимагає більш детального розгляду.

*Адресне повідомлення.* Адресне повідомлення  $M_a$  також складається з двох частин. Як і для ширококомовного повідомлення, перший блок тут – випадковим чином згенерований сеансовий ключ  $S_a$  розміром 256 біт, зашифрований загальним ключем  $Y$ . Друга половина – повідомлення (корисна інформація)  $U$ , зашифроване ключем  $Q$ , що наполовину складається з сеансового ключа  $S_a$ , а на другу половину є унікальним довготривалим закритим ключем  $K_i$  цього вузла  $i$ . Таким чином, для того, щоб розшифрувати повідомлення  $M_a$ , треба знати і загальний ключ мережі  $Y$  (щоб розшифрувати сеансовий ключ  $S$ ) і унікальний закритий ключ даного вузла  $K_i$ . Тому адресне повідомлення між двома вузлами можливе лише у випадку, коли вони знають як довготривали згенеровані ключі так і ідентифікатори сеансових ключів один одного.

##### C. Триключовий алгоритм передачі адресного повідомлення

Тепер детально опишемо триключовий алгоритм передачі адресного повідомлення:

- Вузол-передавач генерує сеансовий ключ  $S_a$  розміром 256 біт.
- Вузол-передавач шифрує сеансовий ключ  $S_a$  загальним довготерміновим ключем  $Y$  з використанням алгоритма ДСТУ 7624:2014.
- Вузол-передавач шифрує корисні дані  $U$  для передачі вузлу-отримувачу  $i$  ключем  $Q$  розміром 512 біт, що містить сеансовий ключ  $S_a$  та індивідуальний ключ вузла-отримувача  $K_i$  розміром 256 біт. Ключ  $Q$  формується з ключів  $S_a$  та  $K_i$  у порядку, визначеному ідентифікатором сеансових ключів  $ID_i$ . В результаті повідомлення має такий вигляд:

$$\{S_a\}Y, \{U\}(\{S_a, K_i\}ID_i) \quad (1)$$

- Вузол-отримувач  $i$ , отримавши повідомлення (1), розшифрує сеансовий ключ  $S_a$  загальним довготерміновим ключем  $Y$ .

- Вузол-отримувач  $i$  розшифровує корисні дані  $U$ , використовуючи отриманий на четвертому кроці сеансовий ключ  $S_a$  та свій індивідуальний ключ  $K_i$ , формуючи з них ключ  $Q$  у порядку, визначеному ідентифікатором сеансових ключів  $ID_i$ .
- Для подальшої передачі повторюються третій та п'ятий кроки.
- Для зворотної передачі алгоритм повторюється, починаючи з першого кроку, але вузол-отримувач і вузол-передавач міняються місцями.

Таким чином, в алгоритмі використовується довготерміновий ключ  $Y$ , сеансовий ключ  $S_a$  – та індивідуальний ключ  $K_i$ . Саме тому алгоритм отримав назву триключового.

Загальний ключ  $Y$  рекомендується замінювати не менш часто ніж один раз на місяць (для задач, що потребують надвисокого рівня криптографічного захисту, цей термін може бути зменшений). Довготермінові ключі  $K_i$  та їх ідентифікатори рекомендується змінювати не менш часто, ніж один раз на рік.

#### D. Варіанти застосування

Можливі два варіанти застосування розробленого алгоритму – із використанням симетричного (як і пропонується в даній роботі) чи асиметричного криптографічного алгоритмів. Використання асиметричного алгоритму рекомендується, коли необхідно забезпечити обмін повідомленнями між усіма вузлами великої мережі. Якщо при цьому застосовувати симетричний алгоритм, то для відправки повідомлень кожен вузол мусить мати збереженими довготривалі закриті ключі усіх вузлів та відповідні ідентифікатори – або буде постійно використовувати відправку ширококомовних повідомлень. Тому в цьому випадку краще, щоб кожен вузол зберігав лише свій закритий ключ. Тоді, якщо відбудеться компрометація цього вузла, закриті ключі інших вузлів не будуть скомпрометовані.

Однак слід мати на увазі, що використання асиметричних криптографічних алгоритмів є повільнішим за використання симетричних, що може бути принциповим при встановленні захищеного зв'язку між об'єктами, що рухаються на великій швидкості та в середовищі, що динамічно змінюється. Крім того, асиметричні алгоритми також потребують більше обчислювальних ресурсів та пам'яті на об'єкті, оскільки, як мінімум, ключі для асиметричних криптографічних алгоритмів є в кілька разів довшими за ключі шифрування симетричних алгоритмів відповідного рівня захищеності. Хоча, з іншого боку, для таких великих ключів перевага того, що передавати на початку слід лише половину ключа, стає більш значною.

Якщо ж мережа передбачає лише обмін інформацією кожного з вузлів лише з центральним вузлом (наприклад, у випадку керування оператором групою БПЛА, не зв'язаних між собою), то рекомендується застосування саме симетричного алгоритму – усі довготривалі закриті ключі в цьому випадку знатиме лише оператор. Також симетричний алгоритм є застосовним у випадку малої кількості вузлів у мережі, що є поширеним випадком при виконанні завдання малим роєм БПЛА.

#### V. АНАЛІЗ ПЕРЕВАГ ТА НЕДОЛІКІВ РОЗРОБЛЕНОГО АЛГОРИТМУ

*Переваги* розробленого сімейства алгоритмів:

- Інформація в мережі ніколи не передається у відкритому вигляді.
- У порівнянні з іншими алгоритмами, що використовують сеансові ключі, запропонований алгоритм вимагає передачі удвічі меншого за розміром сеансового ключа (при забезпеченні такого ж рівня захищеності до засобів криптографічного аналізу), що зменшує часові втрати до початку сеансу зв'язку. Це дуже важливо саме для роїв БПЛА, оскільки ситуація при русі рою БПЛА може змінюватись дуже стрімко і вимагати відповідної реакції в реальному часі, тому швидкість початку передачі має критичне значення.
- Оскільки довготривалим ключем  $Y$  шифрується тільки ключі, що відповідають вимогам до випадкової послідовності, відсутні додаткові вразливості, засновані на використанні частотних й інших властивостей відкритого тексту. Їх можна застосовувати лише для спроб підібрати сеансовий ключ, що для військового застосування не принесе особливої користі супротивнику, оскільки розшифрування з часом застарілих даних розвідки та команд керування не дасть йому жодних переваг.
- Оскільки вимоги до сучасних криптографічних алгоритмів передбачають, що при зміні навіть одного біту ключа результат шифрування незмінного блоку відкритих даних повинен бути повністю іншим, то використання при кожному сеансі зв'язку іншої 1/2 частини ключа  $Q$  (сеансового ключа  $S$ ) забезпечить надійний захист від спроб підібрати як довготривалу половину ключа  $K_i$ , так і ключ  $Q$  в цілому. Таким чином, можна стверджувати, що застосування триключового алгоритму в якості надбудови над достатньо надійним симетричним криптографічним алгоритмом (як, наприклад, обраний алгоритм ДСТУ 7624:2014) не призведе до зменшення його криптостійкості.
- Така схема захищає від атак типу «людина посередині», оскільки для отримання будь-яких даних слід знати довготривалий ключ  $Y$ .

Єдиним недоліком запропонованої схеми при використанні симетричного алгоритму є випадок компрометації одного з вузлів мережі. В цьому випадку зломисник дізнається довготривалий індивідуальний ключ кожного іншого вузла  $K_i$ , їх ідентифікатори та загальний ключ  $Y$ , і зможе розшифровувати усі повідомлення в мережі. Але бце є класичною проблемою симетричних криптографічних алгоритмів. Для позбавлення цього недоліку можливо змінити схему таким чином, щоб кожен вузол мав лише свій індивідуальний ключ з ідентифікатором та не знав ключів інших вузлів. Тоді відсилку індивідуального повідомлення можливо було б організувати лише через центральний вузол (керівний БПЛА чи центр керування), що мав би дані усіх вузлів. Але це вимагало б попереднього обміну з центром керування, що ускладнює та сповільнює процедуру встановлення захищеного зв'язку, що зводить нанівець переваги

запропонованого алгоритму. Гарним варіантом для забезпечення такої процедури є використання протоколу Kerberos [30].

## VI. ВИСНОВКИ

На основі затвердженого в Україні ДСТУ 7624:2014 криптографічного алгоритму «Калина» з розміром ключа 512 біт розроблено триключовий криптографічний алгоритм для захисту безпроводних каналів зв'язку в роях БПЛА, що враховує особливості ройового керування, проаналізовано його переваги та недоліки. Визначено, що за рахунок необхідності передачі сеансового ключа вдвічі меншої довжини при забезпеченні сеансу захищеного зв'язку без зменшення рівня захищеності відбудеться відповідне пришвидшення передачі корисних даних, що є дуже важливим для об'єктів в середовищі, що динамічно змінюється (до яких відносяться і БпАК).

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] J. H. Kong, L.-M. Ang, and K. P. Seng, "A comprehensive survey of modern symmetric cryptographic solutions for resource constrained environments," *Journal of Network and Computer Applications*, vol. 49, pp. 15–50, 2015.
- [2] A. Boldyreva and H. Shacham, *Advances in Cryptology - Crypto 2018 38th Annual International Cryptology Conference*, Santa Barbara, CA, USA, August 19-23, 2018, Proceedings, part I. Cham: Springer International Publishing, 2018.
- [3] M. S. de Alencar, "Network security," *Cryptography and Network Security*, pp. 159–187, 2022.
- [4] M. Ubaidullah and Q. Makki, "A review on symmetric key encryption techniques in cryptography," *International Journal of Computer Applications*, vol. 147, no. 10, pp. 43–48, 2016.
- [5] S. Majhi and P. Mitra, "Lightweight cryptographic techniques in 5G software-defined internet of things networking," *Lightweight Cryptographic Techniques and Cybersecurity Approaches*, 2022.
- [6] M. Galis, T. Unkašević, Z. Banjac, and M. Milosavljević, "Protocols for symmetric secret key establishment: Modern approach," *Vojnotehnicki glasnik*, vol. 70, no. 3, pp. 604–635, 2022.
- [7] F. Maqsood, M. Ahmed, M. Mumtaz, and M. Ali, "Cryptography: A comparative analysis for modern techniques," *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, vol. 8, no. 6, 2017.
- [8] A. N. Alekseychuk, "Узагальнений диференціально-лінійний криптоаналіз блокових шифрів," *Radiotekhnika*, vol. 204, pp. 5–15, 2021.
- [9] P. Ю. Елисеєв, М. Ю. Родинко, and П. В. Олейников, "Дифференциальный криптоанализ блочного ARX-шифра «Кипарис-256»," *Прикладная радиоэлектроника*, vol. 18, pp. 3–4, 2018.
- [10] R. E. Paje, A. M. Sison, and R. P. Medina, "Multidimensional key RC6 algorithm," Proceedings of the 3rd International Conference on Cryptography, Security and Privacy - ICCSP '19, 2019.
- [11] N. Sklaos and O. Koufopavlou, "Architectures and VLSI implementations of the AES-proposal rijndael," *IEEE Transactions on Computers*, vol. 51, no. 12, pp. 1454–1459, 2002.
- [12] L. Scripcariu, F. Diaconu, P. D. Matasaru, and L. Gafencu, "AES vulnerabilities study," *2018 10th International Conference on Electronics, Computers and Artificial Intelligence (ECAI)*, 2018.
- [13] S. Campbell, M. Grinchenko, and W. Smith, "Linear Cryptanalysis of simplified AES under change of S-box," *Cryptologia*, vol. 37, no. 2, pp. 120–138, 2013.
- [14] А. М. Мельников, "Специализированный процессор шифрования стандарта СТБ 34.11. 31-2007," in 52-я Научная конференция, 2016, pp. 15–15.
- [15] В. М. Рудницький, О. Г. Мельник, and П. П. Мельник, "Технологія опису лінійних і нелінійних криптографічних перетворень," *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, no. 3, pp. 31–37, 2019.
- [16] "M. A. Sobolev, "Comparative analysis of Russian GOST R 34.12-2015 encryption standard and American Encryption Standard AES," *Politechnical student journal*, no. 69, 2022.
- [17] RFC8891: GOST R 34.12-2015: Block cipher "magma". Internet Engineering Task Force, 2020.
- [18] L. Perrin, "Partitions in the S-box of Streebog and Kuznyechik," *IACR Transactions on Symmetric Cryptology*, pp. 302–329, 2019.
- [19] A. A. Bruen and M. A. Forcinito, *Cryptography, information theory, and error-correction: A handbook for the 21st Century*. Hoboken, N.J: John Wiley & Sons, 2005.
- [20] J. Kelsey, B. Schneier, and D. Wagner, "Key-schedule cryptanalysis of idea, G-DES, GOST, safer, and triple-des," *Advances in Cryptology — CRYPTO '96*, pp. 237–251, 1996.
- [21] Р. Олійников, І. Горбенко, О. Казимиров, В. Руженцев, and Ю. Горбенко, "Принципи побудови і основні властивості нового національного стандарту блокового шифрування України," *Захист інформації*, vol. 17, no. 2, pp. 142–157, 2015.
- [22] H. A. Kholidy, "Towards a scalable symmetric key cryptographic scheme: Performance Evaluation and Security Analysis," *2019 2nd International Conference on Computer Applications & Information Security (ICCAIS)*, 2019.
- [23] R. Oliynykov, I. Gorbenko, V. Dolgov, and V. Ruzhentsev, "Results of ukrainian national public cryptographic competition," *Tatra Mountains Mathematical Publications*, vol. 47, no. 1, pp. 99–113, 2010.
- [24] H.-M. Wang, X. Zhang, and J.-C. Jiang, "UAV-involved wireless physical-layer secure communications: Overview and research directions," *IEEE Wireless Communications*, vol. 26, no. 5, pp. 32–39, 2019.
- [25] V. Y. Korolyov, M. I. Ogurtsov, and A. I. Kochubynskyi, "Identification of technical objects in the special networks according to the principle of 'Friend or foe,'" *Control Systems and Computers*, no. 4 (294), pp. 3–12, 2021.
- [26] C. Xu, K. Zhang, Y. Jiang, S. Niu, T. Yang, and H. Song, "Communication aware UAV SWARM surveillance based on hierarchical architecture," *Drones*, vol. 5, no. 2, p. 33, 2021.
- [27] M. Abughalwa, L. Samara, M. O. Hasna, and R. Hamila, "Full-duplex jamming and interception analysis of UAV-based Intrusion Links," *IEEE Communications Letters*, vol. 24, no. 5, pp. 1105–1109, 2020.
- [28] M. Ritchie, F. Fioranelli, and H. Borrión, "Micro UAV crime prevention: Can we help princess Leia?," *Crime Prevention in the 21st Century*, pp. 359–376, 2016.
- [29] Інформаційні технології. Криптографічний захист інформації. Алгоритм симетричного блокового перетворення // ДСТУ 7624:2014. . К.: Держспоживстандарт України, 2015.
- [30] C. Adams, "Kerberos authentication protocol," *Encyclopedia of Cryptography and Security*, pp. 323–323.

# Методика оцінювання стійкості SP-мереж до узагальненого лінійного криптоаналізу

Анастасія Тафтай, Сергій Яковлєв, Ганна Южакова  
Навчально-науковий фізико-технічний інститут,  
Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”  
Київ, Україна  
anastasia.taftay@gmail.com, yasv@rl.kiev.ua, yuzha31711@gmail.com

## Security Evaluation Technique for SP-networks against Generalized Linear Cryptanalysis

Anastasiia Taftai, Serhii Yakovliev, Hanna Yuzhakova  
Institute of Physics and Technology  
National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”  
Kyiv, Ukraine  
anastasia.taftay@gmail.com, yasv@rl.kiev.ua, yuzha31711@gmail.com

**Анотація**—У даній роботі було узагальнено метод Келіхера для побудови оцінок максимального значення узагальненого середнього лінійного потенціалу для недвійкових SP-мереж, орієнтованих на модульне додавання. Вперше одержано оцінки стійкості недвійкових версій шифру Midori64 до узагальненого лінійного криптоаналізу.

**Abstract**—We generalized Keliher's technique for computing bounds on maximum expected (generalized) linear potential for non-binary SP-networks based on modular addition. We present first security evaluation of non-binary versions of Midori64 against generalized linear cryptanalysis.

**Ключові слова**—узагальнений лінійний криптоаналіз, MELP, недвійкові шифри, шифр Midori

**Keywords**—generalized linear cryptanalysis, MELP, non-binary ciphers, Midori cipher

### I. ВСТУП

Формальна теорія лінійного криптоаналізу розвинута лише для блокових шифрів, які є двійковими, тобто оперують бітовими рядками та операцією побітового додавання. Для таких шифрів існують методи побудови аналітичних оцінок складності проведення лінійного криптоаналізу, які дозволяють не тільки гарантувати стійкість до даного виду атак, але й, скажімо, обирати такі складові елементи шифру, які будуть підвищувати стійкість. Але для недвійкових шифрів, зокрема, для шифрів, які використовують додавання за модулем, класична теорія лінійного криптоаналізу не застосовна.

Існує декілька напрямків можливих узагальнень лінійного криптоаналізу. У [2] пропонується замість лінійних апроксимацій використовувати довільні збалансовані відображення. У [3] розглядають білінійні апроксимації блокових шифрів. Для шифрів з модульним додаванням у ключовому суматорі у [4] було запропоновано використовувати спеціальні параметри S-блоків, що дозволило побудувати обґрунтовані оцінки практичної стійкості до класичного лінійного криптоаналізу. Зовсім інший підхід пропонують Т. Байнере та ін. [5] для шифрів, які побудовані з орієнтацією на деяку абелеву групу з операцією «додавання», яка не є побітовим додаванням. Для цього дослідники узагальнили поняття лінійної апроксимації та лінійного потенціалу для довільної абелевої групи. Серед сучасних шифрів найбільш поширеною альтернативою побітовому додаванню виступає додавання за модулем  $2^n$ , оскільки така операція зазвичай доступна на рівні інструкцій процесора.

У даній роботі розглядаються запропоновані Л. Келіхером [6] методи побудови верхніх та нижніх оцінок для максимуму лінійного потенціалу SP-мереж – головного параметру стійкості до лінійного криптоаналізу. Ці методи узагальнено для недвійкових шифрів, які використовують додавання за модулем у своїй будові. Для ілюстрації узагальнений метод застосовано до недвійкових версій шифру Midori [1], для яких вперше одержано оцінки стійкості до узагальненого лінійного криптоаналізу.



## II. ЛІНІЙНИЙ КРИПТОАНАЛІЗ

Лінійний криптоаналіз вивчає статистичні залежності між бітами відкритого тексту, шифротексту та ключами, якими були вони зашифровані. Ці залежності використовуються для припущення значень бітів ключа, коли у зловмисника наявно багато наборів відкритих текстів з відповідними їм шифротекстами, тобто при атаці з використанням відкритого тексту. Ідея атаки полягає в побудові лінійної апроксимації шифру, тобто знаходження «ефективного» виразу для даного шифру  $ax = by$ , де  $x, y$  – відкритий текст та шифротекст,  $a, b$  – їхні маски відповідно, а в якості операції множення використовується скалярний добуток двійкових векторів. Для оцінювання стійкості до такої атаки використовують так звані лінійні потенціали апроксимацій.

Лінійним потенціалом функції  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$  для значень  $a, b \in \{0, 1\}^n$  називається величина

$$LP^f(a, b) = (2 \Pr_x \{ax = bf(x)\} - 1)^2$$

На практиці для двійкових шифрів це значення обчислюється таким чином:

$$LP^f(a, b) = \left( \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0, 1\}^n} (-1)^{ax \oplus bf(x)} \right)^2$$

Для недвійкових шифрів, орієнтованих на додавання за модулем  $2^n$ , значення лінійного потенціалу, запропоноване у [5], виглядає так:

$$LP^f(a, b) = \left( \frac{1}{2^n} \left| \sum_{x=0}^{2^n-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{2^n}(ax - bf(x))\right) \right| \right)^2,$$

де використовується звичайне множення за модулем, а доданки формуються на основі групи комплексних коренів степеня  $2^n$  з одиниці. Цей узагальнений лінійний потенціал зберігає усі основні алгебраїчні властивості звичайного лінійного потенціалу (який в певному сенсі є частковим випадком узагальненого при  $n = 1$ ), що дозволяє використати існуючі методи для оцінок значень потенціалів у блокових шифрах.

Для параметризованих ключами функцій виду  $f_k: \{0, 1\}^n \times K \rightarrow \{0, 1\}^n$  середнім лінійним потенціалом називається усереднення лінійних потенціалів за значеннями ключів:

$$ELP^{f_k}(a, b) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} LP^{f_k}(a, b).$$

Максимальний середній лінійний потенціал – це величина

$$MELP(f_k) = \max_{a, b \neq 0} ELP^{f_k}(a, b).$$

Ця величина характеризує стійкість до (узагальненого) лінійного криптоаналізу: верхня межа цього значення обернено пропорційна нижній границі складності проведення відповідної атаки.

## III. МЕТОДИКА ОЦІНЮВАННЯ СТІЙКОСТІ ДВОРАУНДОВОЇ SP-МЕРЕЖІ ДО УЗАГАЛЬНЕНОГО ЛІНІЙНОГО КРИПТОАНАЛІЗУ

У даному розділі наведемо методику обчислення нижньої границі значення  $MELP$  для двораундової SP-мережі, адаптовану з алгоритму Келіхера [6] для двійкових шифрів до SP-мереж, у яких лінійне перетворення побудовано на основі додавання слів.

Нехай  $n = NM$ , і вхідні  $n$ -бітові блоки розбиваються на підблоки (слова) довжини  $N$ . Слово-орієнтована SP-мережа – блоковий шифр, у якому один раунд шифрування складається із додавання із раундовим ключем, нелінійної заміни слів за допомогою  $N$ -бітових S-блоків та лінійного перетворення  $L$ , яке зазвичай задається матрицею над полем  $GF(2^N)$  для двійкових шифрів або над кільцем лишків за модулем  $2^N$  для шифрів, орієнтованих на модульне додавання. Для спрощення ми будемо вважати, що додавання із раундовим ключем також виконується на рівні окремих підслів за допомогою тієї ж операції, відносно якої побудоване лінійне перетворення шифру.

Нехай  $a, b \in \{0, 1\}^n$  – вхідні та вихідні маски, відповідно, для першого та другого раунду. Нехай  $f = wt(\gamma_a)$ ,  $l = wt(\gamma_b)$ , де  $\gamma_a$  –  $M$ -бітовий вектор, у якому  $i$ -та координата дорівнює одиниці, якщо  $i$ -тий S-блок першого раунду активний, (тобто відповідна йому частина вхідної маски  $a$  не дорівнює нулю),  $\gamma_b$  – аналогічний вектор для S-блоків другого раунду та вихідної маски  $b$ . Величини  $\gamma_a, \gamma_b$  будемо називати шаблонами активних S-блоків першого та другого раундів відповідно.

(Лінійним) Індексом розгалуження лінійного перетворення  $L$  називається величина

$$V = \min \{ wt(\gamma_x) + wt(\gamma_y) \mid y \in \{0, 1\}^n \setminus \{0\}, x = L^T y \}.$$

Неформально індекс розгалуження позначає мінімальну можливу кількість активних S-блоків на двох раундах даного шифру.

Пронумеруємо активні S-блоки, а також введемо позначення для входів і виходів на різних етапах двох раундів, як показано на рис. 1 на прикладі одного шаблону.

У введених позначеннях значення узагальненого середнього лінійного потенціалу двораундової SP-мережі буде обчислюватись таким чином:

$$ELP(a, b) = \sum_{w=1}^W \prod_{i=1}^f LP^{S_i^1}(a_i, \chi_{w,i}) LP^{S_i^2}(v_{w,i}, b_i),$$

де  $W$  – кількість способів, якими лінійне перетворення шифру може переводити вхідний шаблон активних S-блоків  $\gamma_a$  у вихідний шаблон  $\gamma_b$ . Зручно об'єднати значення масок у вектор

$$V_w = \langle \chi_{w,1}, \dots, \chi_{w,f}, v_{w,1}, \dots, v_{w,l} \rangle.$$

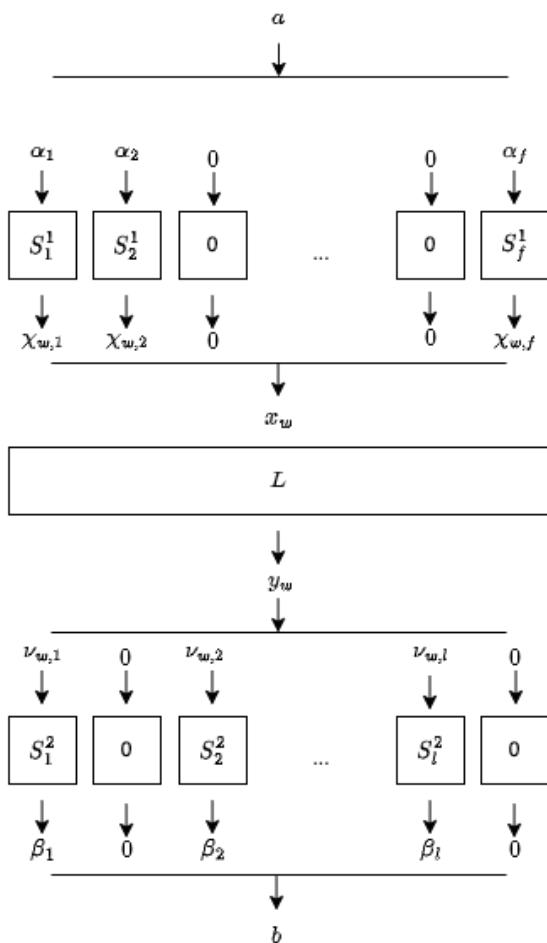


Рис. 1. Позначення для двох раундів шифру на прикладі одного шаблону

Введемо масив  $B\text{-list}$  як список масивів  $(V_w)_{w=1, \dots, W}$ , які сформовані вибором таких  $a, b$  що  $wt(\gamma_a) + wt(\gamma_b) = B$ ; кожен елемент (внутрішній масив)  $Z_s$  даного списку відповідає певній парі шаблонів активних S-блоків  $s = (\gamma_a, \gamma_b)$ , які нумеруються довільним наперед визначеним чином. Зауважимо, що розміри списків для недвійкових SP-мереж не перевищують значення  $2^N(2^N - 1)$ , де  $N$  – розмір S-блоку у бітах. Хоча ця кількість більше, ніж у випадку двійкового шифру (де розміри внутрішніх масивів не перевищують  $2^{N-1}$ ), вона залишається прийнятною навіть для повного перебору.

Для кожного вектору  $z = (z_1, \dots, z_{B1}) \in Z_s$  кожна координата є або вихідною маскою деякого S-блоку на першому раунді, або вхідною маскою деякого S-блоку на другому раунді. У першому випадку позначимо

$$LP^*(a_i, z_i) = LP^{S_i^1}(a_i, z_i),$$

у другому, відповідно,

$$LP^*(a_i, z_i) = LP^{S_i^2}(z_i, a_i).$$

Для  $Z \in B\text{-list}$  введемо позначення

$$\sigma(Z) = \max_{a_1, \dots, a_B \in \{0,1\}^N \setminus \{0\}} \sum_{z \in Z} LP^*(a_i, z_i).$$

Тоді значення MELP двораундової SP-мережі з індексом розгалуження  $B$  обмежено знизу величиною

$$MELP \geq \max_{Z \in B\text{-list}} \sigma(Z).$$

З іншого боку, відомо [7], що значення MELP не перевищує величини  $Q$ , яка обчислюється через усі S-блоки шифру таким чином:

$$Q = \max\{QA(S_i), QB(S_i)\}, \text{ де}$$

$$QA(S_i) = \max_{a \neq 0} \sum_b (\text{ord}(b) - 1) (LP^{S_i}(a, b))^B,$$

$$QB(S_i) = \max_{b \neq 0} \sum_a (\text{ord}(a) - 1) (LP^{S_i}(a, b))^B$$

Таким чином, за допомогою введених величин  $\sigma(Z)$  та  $Q$  ми можемо оцінити значення MELP для довільної слово-орієнтованої недвійкової двохраундової SP-мережі.

#### IV. ШИФР MIDORI64 І ЙОГО СТІЙКІСТЬ ДО УЗАГАЛЬНЕНОГО ЛІНІЙНОГО КРИПТОАНАЛІЗУ

Сімейство шифрів Midori [1] складається з двох малоресурсних блокових шифрів: Midori64 та Midori128. Кожен з них приймає ключ довжиною 128 бітів, але відрізняється довжина блоку – 64 та 128 бітів відповідно; різниця досягається за рахунок різного розміру S-блоку (4 та 8 бітів). Шифр за структурою є SP-мережею і використовує масив розміру  $4 \times 4$ . Midori має три варіанти лінійного перетворення, які задаються матрицями  $M_A$ ,  $M_B$ , та  $M_C$ , з яких перші дві мають більш складну форму та індекс розгалуження  $B = 5$ , а третя матриця, суттєво більш проста, описує двійкове перетворення із індексом розгалуження 4.

Перші дві матриці можна розглядати як недвійкові перетворення над кільцем лишків за модулем 16 (або 256 для Midori128), що дозволяє перетворити шифр Midori64 у недвійковий. Для таких версій Midori актуальним є саме узагальнений лінійний криптоаналіз. При цьому треба зауважити, що індекс розгалуження даних матриць над кільцем лишків також знизиться до значення  $B = 4$ .

Застосувавши викладену у попередньому розділі методику, було отримано оцінки для верхньої та нижньої границі узагальненого середнього лінійного потенціалу двораундових недвійкових версій шифру Midori64, які наведені в таблиці 1.

TABLE I. ВЕРХНІ І НИЖНІ ГРАНИЦІ MELP ДЛЯ ШИФРУ MIDORI64

Лінійне перетворення	Нижня границя	Верхня границя
$M_A$	0.02498233	0.11392356
$M_B$	0.02140561	0.11392356

Для гарантованої оцінки стійкості зазвичай обирають верхню границю, оскільки вона визначає нижню межу для складності проведення атаки. Однак можна побачити, що значення границь відрізняються на порядок. Потенційно це може означати, що точне значення MELP може бути суттєво менше за верхню границю, а відповідні оцінки стійкості до узагальненого лінійного криптоаналізу – значно покращені.

Також треба зауважити, що для двійкової версії Midori64 із перетворенням  $M_C$ , яка й була прийнята як основна версія даного шифру, наведена методика дає однакову верхню та нижню границю для MELP: 0.0625 (таким чином, це буде точне значення даної величини). Бачимо, що це значення значно менше за значення, наведені у табл. 1, тобто двійкова версія Midori64 менш уразлива до класичного лінійного криптоаналізу, аніж недвійкові – до узагальненого. Це можна пояснити, в першу чергу, відмінностями у структурі класичних та узагальнених лінійних апроксимацій та особливостями базової алгебраїчної структури: при наявності елементів, порядки яких більше 2 (що неможливо у двійкових шифрах) аналітик може відслідковувати більше проміжних даних. Також зауважимо, що якщо б недвійкові варіанти матриць  $M_A$  та  $M_B$  мали оригінальний індекс розгалуження  $B = 5$ , то оцінки MELP лежали б в діапазоні 0.008-0.03, тобто були б на порядок меншими за наведені у табл. 1 та щонайменше вдвічі менші за MELP для двійкової версії шифру. Це зайвий раз підкреслює важливість індексу розгалуження для гарантування стійкості до усіх видів лінійних атак.

## V. ВИСНОВКИ

У даній роботі було уточнено методику обчислення оцінок величини MELP, яка характеризує стійкість до узагальненого лінійного криптоаналізу, для двораундових SP-мереж, орієнтованих на модульне додавання. Запропоновану методику було застосовано до недвійкових варіантів шифру Midori64, для яких вперше одержано оцінки стійкості до узагальненого лінійного криптоаналізу.

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Subhadeep Banik, Andrey Bogdanov, Takatori Isobe *et al.* “Midori: A Block Cipher for Low Energy (Extended Version)”, 2015. Available: <https://eprint.iacr.org/2015/1142.pdf>
- [2] C. Harpes, G.G. Kramer, J.L. Massey. “A Generalization of Linear Cryptanalysis and the Applicability of Matsui’s Piling-up Lemma”, in: “*Advances in Cryptology*” – EUROCRYPT’95, Proceedings. – Springer Verlag, 1995. – pp. 24–38.
- [3] Courtois N.T. “Feistel schemes and bi-linear cryptanalysis”, in: “*Advances in Cryptology*” – CRYPTO’04, Proceedings. – Springer Verlag, 2004. – pp. 23–40.
- [4] А. Алексейчук, Л. Ковальчук “Верхние границы максимальных значений средних вероятностей дифференциальных и линейных характеристик шифра Фейстеля, содержащего сумматор по модулю  $2^n$ .”, *Прикладная радиоэлектроника*. – 2005. – т.5, No1. – С. 74-82.
- [5] Baignères T., Stern J., Vaudenay S. “Linear Cryptanalysis of Non Binary Ciphers”. Available: <https://www.di.ens.fr/~stern/data/St122.pdf>
- [6] Liam Keliher. “Refined Analysis of Bounds Related to Linear and Differential Cryptanalysis for the AES” Available: [https://link.springer.com/chapter/10.1007/11506447\\_5](https://link.springer.com/chapter/10.1007/11506447_5)
- [7] Serhii Yakovliev. “Provable Security of Block Ciphers against Generalized Linear Cryptanalysis”, in: Proceedings of International Conference “*Modern Stochastics: Theory And Applications V*” (Kyiv, Ukraine; June 1-4, 2021). – pp. 40-41.

# Порівняльний Аналіз Модифікацій Криптосистеми AJPS-1 Шляхом Зміни Модуля

Дарія Ядуха

кафедра математичних методів захисту інформації  
Навчально-науковий фізико-технічний інститут  
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
Київ, Україна  
dariya.yadukha@gmail.com

## Comparative Analysis of the AJPS-1 Modifications by Changing the Modulus

Dariya Yadukha

Department of Mathematical Methods of Information Security  
Institute of Physics and Technology  
National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”  
Kyiv, Ukraine  
dariya.yadukha@gmail.com

**Анотація**—З 2017 року триває конкурс постквантових криптопримітивів під егідою NIST, одним з учасником першого раунду якого є криптосистема AJPS. У роботі розглядаються побудовані модифікації AJPS для шифрування одного біту шляхом зміни чисел Мерсенна, які використовуються у криптосистемі як модуль, на числа інших класів, зокрема узагальнених чисел Мерсенна і чисел Кренделла, та виконується порівняльний аналіз побудованих модифікацій та оригінальної криптосистеми AJPS-1.

**Abstract**—Since 2017, the post-quantum crypto primitives competition has been ongoing by NIST. One of the participants of the first round of the competition is the AJPS cryptosystem. The paper presents constructed modifications of the bit-by-bit AJPS cryptosystem by changing Mersenne numbers, which are used in the cryptosystem as a modulus, to numbers of other classes, in particular generalized Mersenne numbers and Crandall numbers, and the paper presents results of the comparative analysis of constructed modifications and the original AJPS cryptosystem.

**Ключові слова**—криптосистема AJPS; постквантові криптопримітиви; числа Мерсенна; узагальнені числа Мерсенна; числа Кренделла; вага Геммінга

**Keywords**—the AJPS cryptosystem; post-quantum (quantum-resistant) crypto primitives; Mersenne numbers; generalized Mersenne numbers; Crandall numbers; Hamming weight

### I. ВСТУП

Наприкінці 2017 року Національний інститут стандартів і технологій США (NIST) розпочав конкурс постквантових асиметричних криптопримітивів, які б реалізовували схему

шифрування або механізм інкапсуляції ключів (група PKE/KEM), або схему цифрового підпису (група Signature), або і те, і інше (група Signature & PKE/KEM) [1]. Згідно з календарним планом конкурсу, до 2024 року будуть опубліковані перші версії стандартів постквантової криптографії [2]. Одним з учасником першого раунду конкурсу є механізм інкапсуляції ключів Mersenne-756839, що побудований на основі криптосистеми AJPS [3].

Криптосистема AJPS використовує арифметику за модулем числа Мерсенна, яка може бути ефективно реалізована шляхом використання алгоритмів швидкого обчислення трудомістких операцій за модулем числа Мерсенна [4, 5]. Схема шифрування AJPS має дві версії – для шифрування одного біту повідомлення (AJPS-1) та для шифрування блоку бітів повідомлення (AJPS-2).

### II. ОПИС КРИПТОСИСТЕМИ AJPS-1

Криптосистема AJPS-1 дозволяє зашифрувати один біт повідомлення  $b \in \{0,1\}$ . При побудові криптосистеми задається параметр захищеності  $\lambda$ .

Відкритими параметрами криптосистеми є:

- число Мерсенна  $M_n = 2^n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;
- параметр захищеності  $\lambda$ ;
- число  $h \in \mathbb{N}$ , яке задовольняє умовам  $C_n^h \geq 2^\lambda$  та  $4h^2 < n \leq 16h^2$ .

Відповідно до цих вимог, розробниками AJPS-1 рекомендовано використовувати значення  $n$  та  $h$ , що наведені у таблиці I [3].

TABLE II. РЕКОМЕНДОВАНІ ЗНАЧЕННЯ ВІДКРИТИХ ПАРАМЕТРІВ

$n$	$H$	$\lambda$
1279	17	120
2203	23	174
3217	28	221
4253	32	260
9689	49	432

Оскільки повну систему лишків з найменшими невід’ємними числами за модулем числа Мерсенна можна розглядати як  $n$ -бітові рядки з множини  $\{0,1\}^n \setminus \{1\}^n$ , будемо отожднювати позначення числа за модулем числа Мерсенна та двійкове представлення цього числа. Будемо позначати  $Ham(x)$  вагу Геммінга числа  $x$  (кількість одиниць в двійковому записі числа  $x$ ). Також позначимо множину чисел, які за модулем числа Мерсенна  $M_n$  мають вагу Геммінга  $h$ , як  $HM_{n,h}$ :

$$HM_{n,h} = \{x : Ham(x \bmod M_n) = h\}.$$

Розглянемо основні алгоритми криптосистеми AJPS-1: алгоритми створення ключів, шифрування та розшифрування [3].

- Алгоритм створення ключів **Gen**:
  1. Числа  $F$  та  $G$  обираються випадково та незалежно з множини  $HM_{n,h}$ .
  2. Особистим ключем є число  $G$ , а відкритим ключем – число  $H$ :

$$H = F \cdot G^{-1} \bmod M_n.$$

Значення  $F$  є секретним параметром криптосистеми.

- Алгоритм шифрування **Enc**:
  1. Незалежно та рівноймовірно з множини  $HM_{n,h}$  обираються два числа  $A$  та  $B$ , які є сеансовими особистими ключами та, відповідно, секретними параметрами криптосистеми.
  2. Шифротекст  $C$  обчислюється за формулою

$$C = (-1)^b (A \cdot H + B) \bmod M_n.$$

- Алгоритм розшифрування **Dec**:
  1. Обчислюється значення  $d$ :
  2. Біт  $b$  визначається за співвідношенням:

$$d = Ham(C \cdot G \bmod M_n).$$

$$b = \begin{cases} 0, & \text{якщо } d \leq 2h^2 \\ 1, & \text{якщо } d \geq n - 2h^2 \\ \perp, & \text{інакше (помилка розшифрування)} \end{cases}.$$

Коректність розшифрування криптосистеми ґрунтується на співвідношеннях, наведених у лемі 1.

**Лема 1.** [3] Для довільних чисел  $A, B \in \{0,1\}^n$  та числа Мерсенна  $M_n = 2^n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  виконується:

1.  $Ham(A + B \bmod M_n) \leq Ham(A) + Ham(B)$ ;
2.  $Ham(A \cdot B \bmod M_n) \leq Ham(A) \cdot Ham(B)$ ;
3. Якщо  $A \neq 0^n$ , то  $Ham(-A \bmod M_n) = n - Ham(A)$ .

### III. ПОБУДОВА МОДИФІКАЦІЙ КРИПТОСИСТЕМИ AJPS-1 ШЛЯХОМ ЗМІНИ МОДУЛЯ

Арифметика за модулем числа Мерсенна, яка використовується в AJPS-1, має багато переваг для застосування у криптографії завдяки існуванню ефективних алгоритмів обчислення трудомістких операцій. Такі алгоритми часто узагальнюються на випадок більших класів чисел, зокрема узагальнених чисел Мерсенна виду  $GM_{n,m} = 2^n - 2^m - 1$ , де  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n > m$ , та чисел Кренделла виду  $CR_{n,c} = 2^n - c$ , де  $n, c \in \mathbb{N}$ ,  $\log_2 c \leq \frac{n}{2}$  [4, 5, 6].

Для побудови модифікацій криптосистеми AJPS-1 з використанням арифметики за модулем узагальненого числа Мерсенна або числа Кренделла перш за все необхідно сформулювати співвідношення для ваги Геммінга, аналогічні тим, що описані у лемі 1. Такі співвідношення описані далі.

У теоремі 1 описано співвідношення для обчислення ваги Геммінга суми та добутку чисел за модулем параметризованого узагальненого числа Мерсенна  $GM_{n,m,k}$ . Змінюючи значення параметра  $k$ , можемо отримати співвідношення як для узагальнених чисел Мерсенна  $GM_{n,m}$ , так і для чисел Кренделла  $CR_{n,c}$  [7].

**Теорема 1.** Нехай  $GM_{n,m,k}$  – узагальнене число Мерсенна виду  $GM_{n,m,k} = 2^n - 2^m - 1 - k$ , де  $n, m, k \in \mathbb{N}$ ,  $n > m$ ,  $k < 2^n - 2^m - 1$ , та  $A, B < GM_{n,m,k}$ . Тоді виконується:

1.  $Ham(A + B \bmod GM_{n,m,k}) \leq Ham(A) + Ham(B) + k$ ;
2.  $Ham(A \cdot B \bmod GM_{n,m,k}) \leq (k + 1) \cdot Ham(A) \cdot Ham(B) + (m + k - 1) \cdot \min(Ham(A), Ham(B))$ .

У теоремі 2 та 3 описано співвідношення для оцінки ваги Геммінга оберненого відносно операції додавання за модулем  $GM_{n,m}$  та  $CR_{n,c}$  відповідно [8].

**Теорема 2.** Для узагальненого числа Мерсенна  $GM_{n,m}$  та числа  $A = a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0$ , де  $a_i \in \{0,1\}$ ,  $i = 0, n-1$ , такого, що  $A \neq 0^n$  та  $A < GM_{n,m}$ , виконується:

1. Якщо біт  $a_m = 0$ , то виконується рівність:

$$Ham(-A \bmod GM_{n,m}) = n - 1 - Ham(A).$$

2. У випадку  $a_m = 1$  потрібно представити число  $A$  у вигляді  $A = h_1 || h_2 || h_3$ , де  $h_1, h_2, h_3$  – двійкові рядки такі, що:

- a) довжина двійкового рядка  $h_3$  дорівнює  $m$ , тобто  $h_3$  складається з молодших  $m$  бітів числа  $A$ ;
- b)  $h_2 = a_s \dots a_{m+1} a_m$ , де  $s = \min\{a_i = 0 \mid a_j = 1, m \leq j < i\}$ ,

тобто  $h_2$  містить біти починаючи з  $a_m$  та до першого нуля, який зустрінеться після  $a_m$ , включно;

- c)  $h_1 = a_{n-1} a_{n-2} \dots a_{s+1}$ , де  $s$  – індекс з минулого пункту. Позначимо  $|h_1| = p$ , тобто  $h_1$  містить  $p$  бітів.

Тоді співвідношення має вигляд:

$$Ham(-A \bmod GM_{n,m}) =$$

$$= p - \text{Ham}(h_1) + \text{Ham}(h_2) + m - \text{Ham}(h_3).$$

**Теорема 3.** Для числа Кренделла  $CR_{n,c} = r_{n-1}r_{n-2}\dots r_0$ , де  $r_i \in \{0,1\}$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , та числа  $A = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0$ ,  $a_j \in \{0,1\}$ ,  $j = \overline{0, n-1}$ , виконується:

1) Якщо число  $a_{\lfloor \log_2 c \rfloor} \dots a_1 a_0$  менше числа  $r_{\lfloor \log_2 c \rfloor} \dots r_0$ , то:

$n - \lfloor \log_2 c \rfloor - 1 - \text{Ham}(h_1) \leq \text{Ham}(-A \bmod CR_{n,c}) \leq n - \text{Ham}(h_1)$   
де  $A = h_1 \parallel h_2$ , причому  $h_2$  – молодші  $\lfloor \log_2 c \rfloor + 1$  бітів числа  $A$ .

2) Якщо ж  $a_{\lfloor \log_2 c \rfloor} \dots a_1 a_0$  більше числа  $r_{\lfloor \log_2 c \rfloor} \dots r_0$ , то:

$$\begin{aligned} \left| \tilde{h}_1 \right| - \text{Ham}(\tilde{h}_1) + \text{Ham}(\tilde{h}_2) &\leq \text{Ham}(-A \bmod CR_{n,c}) \leq \\ &\leq n - \left| \tilde{h}_2 \right| - \text{Ham}(\tilde{h}_1) + \text{Ham}(\tilde{h}_2), \end{aligned}$$

де  $A = \tilde{h}_1 \parallel \tilde{h}_2 \parallel \tilde{h}_3$ , причому  $\tilde{h}_3$  містить молодші  $\lfloor \log_2 c \rfloor + 1$  бітів  $A$ ;  $\tilde{h}_2$  містить біти числа  $A$ , починаючи з  $\lfloor \log_2 c \rfloor + 1$  біту та до першого нуля, який зустрінеться після  $a_{\lfloor \log_2 c \rfloor + 1}$ ;  $\tilde{h}_1$  – старші біти, що залишились.

**A. Модифікація AJPS-1 з використанням узагальнених чисел Мерсенна**

- Алгоритми генерації публічних параметрів криптосистеми та створення ключів **Gen** аналогічні процедурам криптосистеми AJPS-1 за виключенням того, що відбувається заміна значення модуля  $M_n$  на  $GM_{n,m}$ .

- Алгоритм шифрування **Enc**:

1. Незалежно і рівноймовірно обираються два числа  $A, B$  з множини

$$HG_{n,m,h} = \{x < GM_{n,m} : \text{Ham}(x \bmod GM_{n,m}) = h\}.$$

2. Для коректної роботи криптосистеми потрібно, щоб виконувались такі умови:

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{Ham}(A + B \bmod GM_{n,m}) &\geq \\ &\geq |\text{Ham}(A) - \text{Ham}(B)|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \text{Ham}(A \cdot B \bmod GM_{n,m}) &\geq \\ &\geq |\text{Ham}(A) - \text{Ham}(B)|. \end{aligned}$$

Експериментально встановлено, що при достатньо великих значеннях числа  $n$ , ймовірність того, що випадково обрані числа з множини  $HG_{n,m,h}$  задовольняють кожній з цих умов дорівнює 0,988, отже, необхідні умови для коректної роботи системи не значно обмежують вибір параметрів.

3. Біт  $b$  зашифровується таким чином:

$$C = A \cdot H + (-1)^b \cdot B \bmod GM_{n,m}.$$

- Алгоритм розшифрування **Dec**:

1. Обчислюється  $d = \text{Ham}(C \cdot G \bmod GM_{n,m})$ .
2. Відповідно до значення  $d$  визначається значення  $b$ :

$$b = \begin{cases} 0, & \text{якщо } d \leq 2h^2 + 2h + m(m-1); \\ 1, & \text{якщо виконується умова 1}; \\ \perp, & \text{інакше (помилка розшифрування)}, \end{cases}$$

де умові 1 відповідає виконання співвідношень:

$$d \geq \begin{cases} n - 2h - 1, & g_m = 0; \\ |h_1| - \text{Ham}(h_1) + \text{Ham}(h_2) + m - \text{Ham}(h_3) - h, & g_m = 1. \end{cases}$$

Причому  $G = g_{n-1} \dots g_0$ ,  $G = h_1 \parallel h_2 \parallel h_3$ , де

$$\begin{cases} h_3 = g_{m-1}g_{m-2} \dots g_0 \\ h_2 = g_l g_{l-1} \dots g_m, \quad l = \min_i \{g_i = 0 \mid g_j = 1, m \leq j < i\}. \\ h_1 = g_{n-1}g_{n-2} \dots g_l \end{cases}$$

Коректність розшифрування слідує з теореми 1 та 2.

**B. Модифікація AJPS-1 з використанням чисел Кренделла**

- Алгоритми генерації публічних параметрів, створення ключів **Gen** та шифрування **Enc** аналогічні процедурам попередньої побудованої модифікації, з використанням модуля  $CR_{n,c}$ , та відповідної йому множини  $HC_{n,c,h}$ .

- Алгоритм розшифрування **Dec**:

1. Обчислюється  $d = \text{Ham}(C \cdot G \bmod CR_{n,c})$ .

2. Відповідно до значення  $d$  визначається  $b$ :

$$b = \begin{cases} 0, & \text{якщо } d \leq (c - 2^m) \cdot (2h^2 + 1) + 2h + m(m-1) - 1; \\ 1, & \text{якщо виконується умова 2}; \\ \perp, & \text{інакше (помилка)}, \end{cases}$$

де умові 2 відповідає виконання співвідношень:

$$d \geq \begin{cases} n - \lfloor \log_2 c \rfloor - \text{Ham}(x_1) - h, & x_2 < r_{\lfloor \log_2 c \rfloor - 1} \dots r_0; \\ |y_1| - \text{Ham}(y_1) + \text{Ham}(y_2) - h, & \text{інакше}. \end{cases}$$

Причому  $G = g_{n-1} \dots g_0$  представляється у вигляді:

а)  $G = x_1 \parallel x_2$ , де  $x_2$  – молодших  $\lfloor \log_2 c \rfloor$  бітів числа  $G$ .

б)  $G = y_1 \parallel y_2 \parallel y_3$ , де  $y_3$  – молодших  $\lfloor \log_2 c \rfloor + 1$  бітів числа  $G$ ;  $y_2$  містить біти числа  $G$  починаючи з  $\lfloor \log_2 c \rfloor + 1$  біту та до першого нуля, який зустрінеться після  $g_{\lfloor \log_2 c \rfloor + 1}$ ;  $y_1$  – старші біти, що залишились.

Коректність розшифрування впливає з теорем 1 та 3.

**C. Аналіз модифікацій криптосистеми AJPS-1**

Перевагами побудованих модифікацій є збільшення класу чисел, які можуть бути використані в ролі модуля та уникнення знайдених недоліків в AJPS-1, які описані в [9], зокрема атаки імітації з використанням моделі активного зловмисника. Окрім цього, перевагою модифікацій є

збільшення множини значень параметра  $d$ . Обґрунтуванням цього є експериментальні результати, що описані у таблиці II.

TABLE III. ДОВЖИНА ІНТЕРВАЛУ ТА КІЛЬКІСТЬ УНІКАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ ПАРАМЕТРА РОЗШИФРУВАННЯ

$n$	$h$	Клас чисел	Довжина інтервалу $d$		Кількість унікальних значень $d$	
			$b=0$	$b=1$	$b=0$	$b=1$
1279	17	Мерсенна	105	112	103	104
		Кренделла	213	225	185	208
		Узагальнені Мерсенна	173	256	150	224
2203	23	Мерсенна	147	141	139	139
		Кренделла	252	281	243	268
		Узагальнені Мерсенна	233	295	208	280
3217	28	Мерсенна	171	170	166	162
		Кренделла	299	356	278	323
		Узагальнені Мерсенна	279	367	256	325
4253	32	Мерсенна	201	204	192	190
		Кренделла	367	410	319	374
		Узагальнені Мерсенна	331	415	299	386
9689	49	Мерсенна	294	319	285	284
		Кренделла	619	571	535	540
		Узагальнені Мерсенна	512	668	457	553

**Зауваження.** Довжина інтервалу обчислювалась як різниця максимального та мінімального значень, під кількістю унікальних значень мається на увазі кількість унікальних значень серед отриманих 1000000 значень  $d$ . При цьому використовувались параметри  $c = 15$  для числа Кренделла та  $m = 25$  для узагальненого числа Мерсенна.

На рис. 1 зображено розподіли значення  $d$  для обох побудованих модифікацій при серії з 1000000 застосувань при використанні параметрів  $c = 15$  та  $m = 25$ .

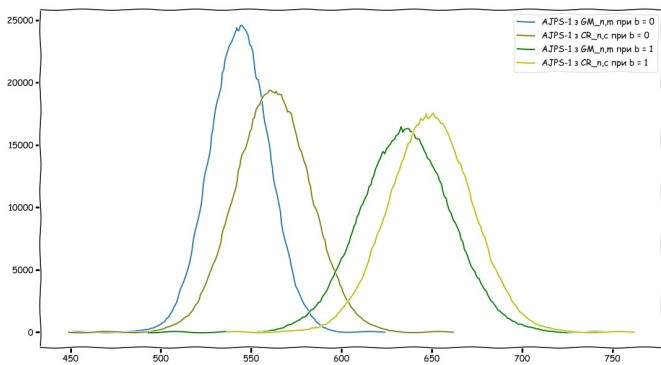


Рис. 2. Розподіл параметра розшифрування у модифікаціях криптосистеми AJPS-1 з використанням узагальнених чисел Мерсенна та чисел Кренделла для параметрів  $n=1279$  та  $h=17$

Відповідно до результатів, описаних у таблиці II, кількість різних значень  $d$  в обох модифікаціях збільшилась в середньому в два рази у порівнянні з криптосистемою AJPS-1. Однак, як бачимо з рис.1, недоліком модифікації AJPS-1 з використанням арифметики за модулем узагальненого числа Мерсенна є незбалансованість розподілів  $d$  для різних бітів, що може бути використано зі зловмисною метою для розрізнення повідомлень  $b=0$  та  $b=1$ , порівнюючи частоту виникнення значень  $d$ . Вирішити цю проблему можна шляхом підбору значення параметра  $m$ .

#### IV. ВИСНОВКИ

У роботі виконано модифікацію криптосистеми AJPS-1 для шифрування біту повідомлення шляхом зміни класу чисел, що використовується як модуль. Для побудови модифікацій використовувались клас узагальнених чисел Мерсенна та клас чисел Кренделла. Перевагами побудованих модифікацій є збільшення варіативності параметрів криптосистеми, а також збільшення кількості унікальних значень параметра розшифрування, що дозволяє підвищити стійкість криптосистеми до атак на основі шифротекстів.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Post-quantum cryptography standardization [Online], National Institute of Standards and Technology, 2017. Available: <https://csrc.nist.gov/Projects/post-quantum-cryptography/Post-Quantum-Cryptography-Standardization>.
- [2] Workshops and timeline post-quantum cryptography [Online], National Institute of Standards and Technology. Available: <https://csrc.nist.gov/Projects/Post-Quantum-Cryptography/Workshops-and-Timeline>.
- [3] D. Aggarwal, A. Joux, A. Prakash, M. Santha, A new public-key cryptosystem via Mersenne numbers [Online], IACR Cryptology ePrint Archive. Available: <https://eprint.iacr.org/2017/481>.
- [4] Bajard, L. Imbert, T. Plantard, Modular number systems: beyond the Mersenne family [Online], J. HAL-LIRMM, 2004. Available: <https://hal-lirmm.ccsd.cnrs.fr/lirmm-00109208>.
- [5] K. Nath, P. Sarkar, Efficient arithmetic in (pseudo-) Mersenne prime order fields [Online], IACR Cryptology ePrint Archive, 2018, № 985. Available: <https://eprint.iacr.org/2018/985>.
- [6] Taschwer M. Modular Multiplication Using Special Prime Moduli. – Kommunikationssicherheit im Zeichen des Internet, 2001.
- [7] Д. Ядуха, А. Фесенко, Оцінка ваги Хеммінга суми та добутку чисел за модулем узагальненого числа Мерсенна, Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики: матеріали XVIII Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених, Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, Видавництво Політехніка, 2020, с. 252-254.
- [8] Д. Ядуха, Оцінка ваги Хеммінга обернених чисел відносно операції додавання за модулем узагальнених чисел Мерсенна, матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання», Івано-Франківськ, 2018, с. 165-168.
- [9] Fesenko A. The Necessary Security Requirements for the Values Used by the AJPS Cryptosystem / A. Fesenko, D. Yadukha. // Theoretical and Cryptographic Problems of Cybersecurity. – 2019. – №1.

# Криптографічні властивості операцій, які апроксимують додавання за модулем

Сергій Яковлев

Навчально-науковий фізико-технічний інститут,  
Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”  
Київ, Україна  
yasv@rl.kiev.ua

## Cryptographic Properties of Operations Approximating Modular Addition

Serhii Yakovliev

Institute of Physics and Technology  
National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”  
Kyiv, Ukraine  
yasv@rl.kiev.ua

**Анотація**—Дана робота присвячена алгебраїчним операціям над двійковими векторами, які апроксимують модульне додавання із використанням суто логічних операцій, що дозволяє суттєво пришвидшити роботу систем, які використовують подібні операції. Вперше такий підхід було запропоновано розробниками шифру NORX. У даній роботі розглядаються алгебраїчні властивості двох таких апроксимуючих операцій, а також знаходяться аналітичні вирази для імовірностей диференціалів та їх розподіли. Одержані результати показують, що використання апроксимуючих операцій дозволяє будувати стійкі та ефективні в реалізації LRX-криптосистеми.

**Abstract**—This work is devoted to algebraic operations on binary vectors which approximate modulo addition with logic instructions. This allows to significantly increase the efficiency of systems based on such operations. This approach first was presented by developers of NORX cipher. We considered two approximating operations with their algebraic properties. We gave analytic expressions for probabilities of differentials and their distributions. Our results show that it is possible to construct both secure and efficient LRX-cryptosystems with introduced approximating operations.

**Ключові слова**—шифр NORX, додавання за модулем, ARX-криптосистеми, LRX-криптосистеми

**Keywords**—NORX cipher, modular addition, ARX-cryptosystems, LRX-cryptosystems

### I. ВСТУП

ARX-криптосистеми – це такі криптосистеми, які побудовані виключно із використанням базових операцій, доступних на рівні інструкцій процесорів: побітового додавання, додавання за модулем  $2^n$  та циклічних зсувів (відповідно, «ARX» є аббревіатурою від «Addition, Rotation, XOR») [1]. Суттєвими перевагами таких систем є простота реалізації, невеликі вимоги до ресурсів обчислювальної системи та значна швидкодія; усе наведено важливо для алгоритмів так званої легковагової криптографії (lightweight cryptography), які призначені для використання у малоресурсних пристроях. Відповідно, у цій галузі ARX-криптосистеми набули широкого розповсюдження.

Операція додавання за модулем  $2^n$  несе в собі основний елемент захисту ARX-криптосистем, оскільки вона реалізує складну нелінійну (по відношенню до побітового додавання) булеву функцію, степінь якої пропорційна довжині регістрів. Тому, хоча модульне додавання включене до базових операцій майже усіх сучасних обчислювальних архітектур, воно є суттєво більш важким у виконанні та реалізації порівняно із побітовим додаванням. Щоб компенсувати витрати на виконання додавань, розробники часто включають до переліку операцій для використання інші нелінійні булеві операції – логічні ТА та АБО, нециклічні зсуви тощо – які дозволяють підвищити стійкість криптосистеми без використання великої кількості модульних додавань. Ще далі пішли розробники шифру NORX [2], які запропонували альтернативну концепцію побудови легковагових шифрів – LRX-дизайн,



де «L» відповідає «Logic», тобто нелінійним логічним операціям. Головною ідеєю розробників була заміна модульного додавання на іншу операцію, яка побудована виключно із логічних операцій над двійковими векторами, але при цьому апроксимує операцію додавання та, відповідно, зберігає певні його криптографічні властивості.

У даній роботі розглядається апроксимуюча операція, яку запропонували розробники шифру NORX, а також інша операція, запропонована автором, яка також апроксимує модульне додавання та має потенційно ще більш привабливі криптографічні властивості. Буде досліджено основні алгебраїчні властивості даних операцій, одержано аналітичні вирази для основних параметрів криптографічної стійкості ARX-криптосистем – імовірностей диференціалів, а також знайдено розподіли цих параметрів.

## II. ОПЕРАЦІЇ, ЯКІ АПРОКСИМУЮТЬ МОДУЛЬНЕ ДОДАВАННЯ, ТА ЇХ АЛГЕБРАЇЧНІ ВЛАСТИВОСТІ

Нехай  $V_n = \{0, 1\}^n$ . Кожен елемент  $x \in V_n$  ми розглядаємо як бітовий вектор та як двійковий запис певного натурального числа з інтервалу від 0 до  $2^n - 1$ :

$$x = (x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0) = x_0 + x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 2^2 + \dots + x_{n-1} \cdot 2^{n-1}.$$

Над двійковими векторами розглядаються логічні (або бітові) операції: & або  $\wedge$  — логічне ТА (AND),  $\vee$  — логічне АБО (OR),  $\oplus$  — побітове додавання / виключне АБО (XOR); для логічного ТА будемо також використовувати спрощений запис  $xu$  замість  $x \& u$  або  $x \wedge u$ . Заперечення бітів вектору  $x$  (інверсія) позначається як  $\bar{x}$ . Усі ці операції виконуються окремо над кожним бітом аргументів. Символами  $\gggg$  та  $\llll$  позначаються циклічні зсуви векторів,  $\gg$  та  $\ll$  – нециклічні зсуви векторів. Також ми розглядаємо арифметичні операції  $+$  та  $-$ , які позначають додавання та віднімання векторів як цілих невід’ємних чисел за модулем  $2^n$ . Символом  $0$  будемо позначати як нульовий біт, так і нульовий вектор, якщо це не викликає двозначності. Символом  $1^n$  будемо позначати вектор, якій складається з  $n$  одиничних бітів; вектор  $1^n$  відповідає числу  $(-1) \bmod 2^n$ .

Для модульного додавання відомі такі тотожності [3]:

$$x + y = (x \oplus y) + ((x \& y) \ll 1),$$

$$x + y = ((x \vee y) \ll 1) - (x \oplus y).$$

Першу з цих тотожностей розробники шифру NORX використали для побудови операції, яка апроксимує модульне додавання. Для цього вони просто замінили у правій частині модульне додавання на побітове:

$$h(x, y) = x \oplus y \oplus ((x \& y) \ll 1).$$

Друга тотожність також дозволяє побудувати апроксимацію модульного додавання, яка буде мати таку форму:

$$v(x, y) = x \oplus y \oplus ((x \vee y) \ll 1) \oplus 1.$$

Уведені операції  $h(x, y)$  та  $v(x, y)$  є більш простими конструкціями, ніж операція модульного додавання  $f(x, y) = x + y$ . Зокрема, якщо  $f$  є булевою функцією степеня  $n$ , то  $h$  та  $v$  є лише квадратичними булевими функціями. Також достатньо легко показати, що  $h$  та  $v$  не задовольняють властивості асоціативності та, відповідно, не утворюють над  $V_n$  навіть підгрупи, в той час як модульне додавання задає структуру абелевої групи. Відповідно, функції  $h$  та  $v$  можна використовувати для побудови ARX-криптосистем не як алгебраїчні операції, а як функції ускладнення – і з цією задачею, як показав приклад шифру NORX, вони можуть справлятися доволі успішно. Також треба зауважити, що апроксимуючі операції зберігають окремі властивості модульного додавання: всі операції є комутативними, а наймолодший біт результату усіх операцій є афінною функцією від наймолодших бітів аргументів. Остання властивість підкреслює, що заміна модульного додавання на його апроксимації все одно вимагає використання циклічних зсувів при побудові криптосистеми.

Наведемо без доведення основні алгебраїчні властивості даних операцій.

**Властивість 1.** Операція  $h(x, y)$  має нейтральний елемент – вектор  $0$ , а операція  $v(x, y)$  має нейтральний елемент – вектор  $1^n$ .

**Властивість 2.** Кожен вектор  $x \in V_n$  має (єдиний) обернений елемент відносно операції  $h$  та (єдиний) обернений елемент відносно операції  $v$ .

**Властивість 3.** Для довільних заданих  $a, b \in V_n$  рівняння  $h(a, y) = b$  та  $v(a, y) = b$  мають єдиний розв’язок (тобто, апроксимуючі операції мають властивість регулярності).

**Властивість 4.** Для довільного  $x \in V_n$  мають місце такі співвідношення (властивості подвоснення):

$$h(x, x) = 2x \bmod 2^n;$$

$$v(x, x) = (2x + 1) \bmod 2^n.$$

**Властивість 5.** Для довільних  $x, y \in V_n$  мають місце такі співвідношення (властивості інверсії):

$$h(x, y) = 1^n \Leftrightarrow y = \bar{x};$$

$$v(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \bar{x}.$$

Необхідно зауважити, що, хоча обидві операції надають обернені елементи для будь-яких векторів, відсутність асоціативності заважає використовувати їх для алгебраїчних співвідношень; зокрема, якщо елемент  $a'$  є оберненим до  $a$  відносно  $h$ , то

$$h(h(x, a), a') \neq h(x, h(a, a')) = x.$$

Але наявність нейтральних елементів може бути використана для побудови статистичних атак, зокрема, для побудови диференціалів із високою імовірністю. Більш того, властивість регулярності дозволяє в певних ситуаціях

виконувати часткове обертання функцій ускладнення, побудованих на основі введених апроксимуючих операцій.

### III. РОЗПОДІЛИ ДИФЕРЕНЦІАЛІВ ЗА РІЗНИМИ ДОДАВАННЯМИ

При використанні апроксимуючих операцій у LRX-схемах доцільно розглядати як диференціали відносно побітового додавання, так і диференціали відносно операцій  $h$  або  $v$ . Відповідно, для диференціалу  $(\alpha, \beta \rightarrow \gamma)$ , де вектори  $\alpha$  та  $\beta$  задають різниці вхідних аргументів, а  $\gamma$  – різницю для результату операції, будемо розглядати чотири можливі імовірності

$$xdp^h(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) = Pr_{x,y}\{h(x \oplus \alpha, y \oplus \beta) = h(x, y) \oplus \gamma\},$$

$$xdp^v(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) = Pr_{x,y}\{v(x \oplus \alpha, y \oplus \beta) = v(x, y) \oplus \gamma\},$$

$$hdp^\oplus(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) = Pr_{x,y}\{h(x, \alpha) \oplus h(y, \beta) = h(x \oplus y, \gamma)\},$$

$$vdp^\oplus(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) = Pr_{x,y}\{v(x, \alpha) \oplus v(y, \beta) = v(x \oplus y, \gamma)\}.$$

Перші дві імовірності описують проходження диференціалу за операцією  $\oplus$  через функції  $h(x, y)$  та  $v(x, y)$ , а дві других – проходження диференціалів за операціями  $h$  та  $v$  через функцію  $g(x, y) = x \oplus y$ .

Поведінку імовірностей  $xdp^h$  та  $hdp^\oplus$  було детально досліджено у [2]; ми наведемо основні результати у наступній теоремі без доведення.

**Теорема 1. [2]** Для довільних  $n$ -бітових векторів  $\alpha, \beta, \gamma$  виконуються такі твердження:

1)  $xdp^h(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) > 0$  тоді та тільки тоді, коли

$$(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) \& \neg((\alpha \vee \beta) \ll 1) = 0;$$

2) якщо  $xdp^h(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) > 0$ , то

$$xdp^h(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) = 2^{-wt((\alpha \vee \beta) \ll 1)}.$$

3)  $hdp^\oplus(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) > 0$  тоді та тільки тоді, коли

$$(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) \& \neg((\alpha \oplus \gamma) \ll 1) \& \neg((\beta \oplus \gamma) \ll 1) = 0;$$

4) якщо  $hdp^\oplus(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) > 0$ , то  $hdp^\oplus(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) = 2^{-k}$ , де  $k = wt(((\alpha \oplus \gamma) \vee (\beta \oplus \gamma)) \ll 1)$ .

Теорема 1 надає аналітичні вирази для імовірностей  $xdp^h$  та  $hdp^\oplus$ , що дозволяє використовувати автоматизовані методи пошуку диференціалів з високою імовірністю, розроблені для ARX-криптосистем.

Аналогічні результати для імовірностей  $xdp^v$  та  $vdp^\oplus$  наведено у двох наступних теоремах. Зауважимо, що, в цілому, аналіз поведінки таких імовірностей більш простий, аніж аналіз імовірностей  $xdp^+$ , оскільки операція  $v$  має суттєво більш просту структуру як булева функція, ніж модульне додавання.

**Теорема 2.** Для довільних  $n$ -бітових векторів  $\alpha, \beta, \gamma$  виконуються такі твердження:

1)  $xdp^v(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) > 0$  тоді та тільки тоді, коли

$$(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) \& \neg((\alpha \vee \beta) \ll 1) = 0;$$

2) якщо  $xdp^v(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) > 0$ , то

$$xdp^v(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) = 2^{-wt((\alpha \vee \beta) \ll 1)}.$$

3)  $vdp^\oplus(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) > 0$  тоді та тільки тоді, коли

$$(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) \& eq(\alpha, \beta, \gamma) \ll 1 = 1,$$

де вектор  $eq$  визначається як

$$eq(x, y, z) := (\bar{x} \oplus y) \& (\bar{x} \oplus z);$$

4) якщо  $vdp^\oplus(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) > 0$ , то  $vdp^\oplus(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) = 2^{-k}$ , де  $k = wt(\neg eq(\alpha, \beta, \gamma)) \ll 1$ .

Теорема 1 та 2 показують, що умови існування  $\oplus$ -диференціалу та значення його імовірності збігаються для функцій  $h$  та  $v$ ; тому заміна однієї функції на іншу не може погіршити стійкість LRX-криптосистеми до диференціального криптоаналізу відносно операції  $\oplus$ . Також зауважимо, що твердження теореми 2 дозволяють застосувати до LRX-криптосистем відомі методи побудови диференціальних атак, але відносно операції  $v$ , а також методи оцінювання стійкості до таких атак.

Позначимо через  $b_k(N, p)$   $k$ -ту імовірність біноміального розподілу з параметрами  $N$  та  $p$ :

$$b_k(N, p) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}.$$

Наступна теорема розглядає розподіли імовірностей  $xdp^v$  та  $vdp^\oplus$  для випадкових диференціалів. Ми знову розглядаємо довільний диференціал  $\omega = (\alpha, \beta \rightarrow \gamma)$  як випадкову рівномірно розподілену величину на множині усіх диференціалів (тобто, фактично, трійок  $n$ -бітових векторів).

**Теорема 3.** Справедливі такі твердження.

$$1) Pr_\omega\{xdp^v(\omega) \neq 0\} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}.$$

$$2) Pr_\omega\{xdp^v(\omega) = 2^{-k} \mid xdp^v(\omega) \neq 0\} = b_k\left(n-1, \frac{6}{7}\right).$$

$$3) Pr_\omega\{vdp^\oplus(\omega) \neq 0\} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}.$$

$$4) Pr_\omega\{vdp^\oplus(\omega) = 2^{-k} \mid vdp^\oplus(\omega) \neq 0\} = b_k\left(n-1, \frac{6}{7}\right).$$

Розподіли імовірностей  $xdp^v$  та  $vdp^\oplus$ , описані у теоремі 3, повністю співпадають із розподілами  $xdp^+$ , наведеними у [4]. Зі знайденого розподілу випливає, що із збільшенням  $n$  відносна кількість диференціалів  $\omega = (\alpha, \beta \rightarrow \gamma)$ , що мають ненульову імовірність, асимптотично прямує до нуля; однак для довільних довжин диференціали із ненульовою

імовірністю будуть існувати, нехай  $i$  в незначній кількості. При цьому диференціали здебільшого будуть мати імовірність із околу значення  $2^{-\frac{6(n-1)}{7}}$ , що впливає із властивостей біноміального розподілу; відповідно, диференціалів із високими імовірностями також буде дуже мало.

Нескладно показати, що імовірності  $xdp^h$  та  $hdp^\oplus$  мають такий самий розподіл – доведення буде співпадати з доведенням теореми 3 з точністю до позначень. Це свідчить про те, що пошук високоімовірних диференціалів для побудови атаки на LRX-криптосистеми, які використовують апроксимуючі операції  $h$  або  $v$ , буде мати приблизно таку саме складність, як і пошук диференціалів для побудови атаки на традиційні ARX-криптосистеми.

#### IV. ВИСНОВКИ

У даній роботі було розглянуто дві операції, які апроксимують додавання за модулем  $2^n$ ; першу з цих операцій запропонували розробники шифру NORX, друга є авторською пропозицією. Використання таких операцій у рамках так званого LRX-дизайну дозволяє створювати дуже швидкі, ефективні та невибагливі до ресурсів криптосистеми із достатнім рівнем стійкості, тому вони можуть знайти своє застосування у легковаговій криптографії.

У роботі показано, що алгебраїчні властивості операцій, які розглядаються, в багатьох аспектах схожі із властивостями модульного додавання: вони регулярні, комутативні, мають нейтральні та обернені елементи, хоча,

на відміну від додавання, апроксимуючі операції не асоціативні та не утворюють групу на множині двійкових векторів. Для диференціалів відносно побітового додавання та апроксимуючих операцій було знайдено умови їх існування та аналітичні вирази для імовірностей, що дозволяє застосовувати до LRX-криптосистем наявні методи оцінювання стійкості ARX-криптосистем до диференціального криптоаналізу. Також було знайдено розподіли імовірностей диференціалів та показано, що поведінка усіх типів диференціалів, які розглядались, збігається із поведінкою  $\oplus$ -диференціалів для функції модульного додавання. З цього можна зробити висновок, що при заміні у криптосистемі модульного додавання на апроксимуючу операцію складність побудови диференціальної атаки на модифіковану таким чином криптосистему повинна залишатись приблизно на тому ж рівні.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] R.-P. Weinmann. "AXR – Crypto Made from Modular Additions, XORs and Word Rotations.", Dagstuhl Seminar 09031, January 2009.
- [2] Jean-Philippe Aumasson, Philipp Jovanovic and Samuel Neves. "Analysis of NORX: Investigating Differential and Rotational Properties", Cryptology e-Print Archive, Report 2014/317. – <https://eprint.iacr.org/2014/317>.
- [3] Henry S. Warren. "Hacker's Delight, Second Edition", Addison-Wesley Professional, 2012. ISBN 9780133084993
- [4] H. Lipmaa and S. Moriai. "Efficient Algorithms for Computing Differential Properties of Addition." In M. Matsui, editor, *Fast Software Encryption* 2001. – *Lecture Notes in Computer Science*. vol. 2355. – Springer, 2001. – pp. 336–350.

# Сучасні хмарні концепції, технології, застосунки, сервіси та платформи

Василь Горбачук

відділ інтелектуальних інформаційних технологій  
Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
GorbachukVasyl@netscape.net

Вадим Большаков

відділ інтелектуальних інформаційних технологій  
Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
vnbicyb@ukr.net

Сергій Гавриленко

відділ інтелектуальних інформаційних технологій  
Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
S.A.Gavrilenko@nas.gov.ua

Михайло Пустовойт

відділ інтелектуальних інформаційних технологій  
Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
Pustovoi@nas.gov.ua

## Modern Cloud Concepts, Technologies, Applications, Services, and Platforms

Vasyl Gorbachuk

Department of Intelligent Information Technologies  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics, NAS of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
GorbachukVasyl@netscape.net

Vadym Bolshakov

Department of Intelligent Information Technologies  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics, NAS of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
vnbicyb@ukr.net

Serge Gavrilenko

Department of Intelligent Information Technologies  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics, NAS of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
S.A.Gavrilenko@nas.gov.ua

Mykhajlo Pustovoi

Department of Intelligent Information Technologies  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics, NAS of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
Pustovoi@nas.gov.ua

*Анотація* – Хоча елементи хмарних технологій існують з часів застосування кількох пристроїв для виконання одного завдання, невдалі спроби закріпити відповідний термін юридично були у 1997 р. (NetCentric) та 2007 р. (Dell). Зараз ці технології стали поширеними застосуваннями, які мають багато теоретичних і практичних нюансів. Крім того, ці технології дають найвищу капіталізацію.

*Abstract* – Although elements of cloud technology have existed since the days of using multiple devices to perform a single task, unsuccessful attempts to legally codify the term were in 1997 (NetCentric) and 2007 (Dell). Now these technologies have become common applications that have many theoretical and practical

nuances. In addition, these technologies give the highest capitalization.

*Ключові слова* – Інтернет, послуги, постачальники, користувачі, стандарти.

*Keywords* – Internet, services, providers, users, standards.

### I. ВСТУП

Інтернет уможливив дистанційне застосування багатьох пристроїв різної складності для різноманітних цілей, що ознаменувало еру хмарних технологій [1–4].

Прогнози впровадження хмарних технологій свідчать, що їхній розвиток залишається однією з провідних

тенденцій [5, 6]. Опитування Gartner серед ІТ-керівників у 2019 р. показало, що на хмарні технології припадає близько 10% від загального обсягу ІТ-бюджетів [7]. Це означає, що хоча використання хмарних технологій стало масовим, можливості для їхнього розвитку далеко не вичерпані, і темпи цього розвитку не знижуються [8]. Gartner прогнозує, що весь хмарний ринок зросте до 355 мільярдів доларів у 2022 році з 197 мільярдів доларів у 2018 році. Очікувані сукупні річні темпи зростання становлять 16% проти 7% для традиційних ІТ. Хмарні технології також входять до трійки основних напрямків, де глобальні ІТ-керівники збільшать свої витрати.

## II. ПАРАДИГМА ХМАРНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Наразі сутність парадигми хмарних обчислень закріплена у міжнародному стандарті [9], який став національним [10]. Хмарні обчислення – це парадигма для надання можливості мережевого доступу до масштабованого і еластичного пулу спільно використовуваних фізичних або віртуальних ресурсів, яка забезпечує самообслуговування та адміністрування на вимогу [10].

Парадигма хмарних обчислень включає такі складові:

ключові характеристики (особливості) хмарних обчислень;

ролі та дії хмарних обчислень;

типи можливостей хмари;

категорії сервісів хмарних обчислень;

моделі розгортання хмарних обчислень;

наскрізні аспекти хмарних обчислень.

Ключовими особливостями хмарних обчислень є:

широкий мережевий доступ;

вимірюване обслуговування;

мультиоренда;

самообслуговування на вимогу;

швидка еластичність та масштабованість;

пул ресурсів.

**Головними ролями** в хмарних обчисленнях є:

споживач сервісів (в операціях використання сервісів);

партнер із сервісів (в операціях підтримки або допомоги);

постачальник сервісів (в операціях забезпечення доступу до сервісів).

Типами можливостей хмари є:

тип можливостей додатків;

тип можливостей платформи;

тип можливостей інфраструктури.

**Поширені категорії сервісів** хмарних обчислень:

обмін інформацією (зв'язок) (Communication) як послуга (as a Service) (CaaS);

обчислення (Computing) як послуга (CompaaS);

зберігання даних (Data Storage) як послуга (DSaaS);

інфраструктура (Infrastructure) як послуга (IaaS);

мережа (Network) як послуга (NaaS);

платформа (Platform) як послуга (PaaS);

програмне забезпечення (Software) як послуга (SaaS);

функції або функція (Function(s)) як послуга (FaaS);

безсерверні обчислення;

безсерверна база даних.

**Моделями розгортання** хмарних обчислень є:

публічна (загальнодоступна) хмара;

приватна хмара;

громадська хмара;

гібридна хмара.

До ключових наскрізних аспектів належать:

можливість аудиту (auditability);

готовність або доступність (availability);

керівність (governance);

функціональна сумісність (інтероперабельність);

обслуговування та управління версіями (maintenance and versioning);

продуктивність (performance);

переносність (portability);

захист персональних даних (protection of personally identifiable information (PII));

нормативне регулювання (regulatory);

здатність до відновлення (resiliency);

зворотність (reversibility);

безпека (security);

рівні обслуговування (service levels) та угода про рівень обслуговування (service level agreement).

## III. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ХМАРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Якщо розглянути різні сегменти хмарних технологій, то найбільшим буде зростання сегмента SaaS. За прогнозами Gartner, за п'ятирічний період 2018–2022 рр. сегмент SaaS майже подвоїться від 86 у 2018 р. до 151 млрд. дол. у 2022 р. Друге за величиною зростання прогнозується в сегменті IaaS – від 32 млрд. дол. у 2018 р. до 74 млрд. дол. у 2022 р. Очікується, що найближчими роками потреба у хмарних обчисленнях лише збільшуватиметься разом із швидкістю їх повсюдного впровадження [7].

Основні поняття та концепції хмарних обчислень окреслюються термінами хмарних обчислень, що входять до консолідованого словника хмарних обчислень [11] і додаткових термінів для хмарних технологій [12].

Перелік основних понять, що використовуються в галузі хмарних обчислень, містить:

основні поняття хмарних обчислень;

поняття, що стосуються моделей хмарного розгортання;

поняття, що стосуються ролей та дій хмарних обчислень;

поняття, що стосуються ключових характеристик хмарних обчислень;

поняття, які стосуються типів хмарних можливостей та категорій хмарних послуг;

поняття щодо інтероперабельності;

поняття, пов'язані з угодами про хмарні послуги;

поняття щодо переносності;

поняття, що стосуються хмарних даних;

поняття щодо безпеки та конфіденційності;

поняття, що стосуються міжхмарних обчислень;

поняття щодо віртуалізації.

#### **Основні поняття хмарних обчислень:**

хмарні обчислення (cloud computing);

хмарний сервіс (cloud service).

#### **Поняття, що стосуються моделей хмарного розгортання:**

модель хмарного розгортання (cloud deployment model);

хмара спільноти (community cloud);

гібридна хмара (hybrid cloud);

приватна хмара (private cloud);

загальнодоступна хмара (public cloud).

#### **Поняття, що стосуються ролей та дій хмарних обчислень:**

сторона (party);

споживач хмарного сервісу (cloud service customer);

постачальник хмарного сервісу (cloud service provider);

користувач хмарного сервісу (cloud service user);

партнер з хмарних сервісів (cloud service partner);

хмарний аудитор (cloud auditor);

брокер хмарного сервісу (cloud service broker);

активність (activity);

співпостачальник хмарних послуг (peer cloud service

provider);

вторинний постачальник хмарних послуг (secondary cloud service provider);

функціональний компонент (functional component);

роль (role);

підроль (sub-role);

хмарний сервіс платформи пристрою (device platform cloud service);

розробник хмарних сервісів (cloud service developer).

#### **Поняття, що стосуються ключових характеристик хмарних обчислень:**

вимірюване обслуговування (measured service);

орендар (tenant);

мультиарендність (multi-tenancy);

самообслуговування на запит (on-demand self-service);

об'єднання ресурсів (resource pooling).

#### **Поняття, які стосуються типів хмарних можливостей та категорій хмарних послуг:**

тип хмарних можливостей (cloud capabilities type);

тип можливостей програми (application capabilities type);

тип можливостей інфраструктури (infrastructure capabilities type);

тип можливостей платформи (platform capabilities type);

категорія хмарних сервісів (послуг) (cloud service category);

зв'язок як послуга SaaS;

обчислення як послуга ComaaS;

зберігання даних як послуга DSaaS;

інфраструктура як послуга IaaS;

мережа як послуга NaaS;

платформа як послуга PaaS;

програмне забезпечення як послуга SaaS.

#### **Поняття щодо інтероперабельності:**

функціональна сумісність (інтероперабельність) (interoperability);

хмарна (cloud) сумісність;

транспортна (transport) сумісність;

синтаксична (syntactic) сумісність;

семантична сумісність даних (semantic data interoperability);

поведінкова (behavioural) сумісність;

функціональна сумісність політик (policy interoperability).

**Поняття, пов'язані з угодами про хмарні послуги:**

угода про рівень обслуговування (service level agreement, SLA);

продукт хмарного сервісу (cloud service product);

каталог продуктів (product catalogue);

каталог сервісів (service catalogue);

цільове значення якісної характеристики хмарного сервісу (cloud service qualitative objective, SQO);

угода про рівень обслуговування для хмари (cloud SLA);

цільове значення показника рівня хмарних послуг (cloud service level objective, SLO);

угода про хмарні послуги (cloud service agreement);

метрика (metric);

політика щодо повідомлень про помилки (failure notification policy);

компенсація (remedy).

**Поняття щодо переносності:**

переносність хмарних програмних додатків (cloud application portability);

переносність даних (data portability);

переносність хмарних даних (cloud data portability);

синтаксична переносність даних (data syntactic portability);

семантична переносність даних (data semantic portability);

переносність політик щодо даних (data policy portability);

переносність програмних додатків (application portability);

синтаксична переносність програмних додатків (application syntactic portability);

переносність команд програмних додатків (application instruction portability);

переносність метаданих програмних додатків (application metadata portability);

переносність поведінки програмних додатків (application behaviour portability);

переносність політик програмних додатків (application policy portability).

**Поняття, що стосуються хмарних даних:**

дані споживача служби хмарних обчислень (cloud service customer data);

похідні дані сервісу хмарних обчислень (cloud service derived data);

дані постачальника хмарних послуг (cloud service provider data);

дані облікового запису (account data);

інформація, що дозволяє ідентифікувати кінцевого користувача (end user identifiable information, EUII);

змішаний набір даних (mixed dataset);

індивідуальні дані (individual data);

корпоративні дані (organizational data);

захищені корпоративні дані (organizational protected data, OPD);

публічні дані (public domain data);

неперсональні дані (non-personal data);

принципал даних (data principal), кого вони стосуються;

прозорість або транспарентність (transparency).

**Поняття щодо безпеки та конфіденційності:**

конфіденційність (confidentiality);

цілісність (integrity);

інформаційна безпека (information security);

персональні дані (PII);

безпечна мультиарендність (secure multi-tenancy).

**Поняття, що стосуються міжхмарних обчислень:**

міжхмарні обчислення (inter-cloud computing);

головний постачальник хмарних послуг (primary cloud service provider);

піринговий хмарний сервіс (peer cloud service).

**Поняття щодо віртуалізації:**

віртуальний (virtual);

віртуальна машина (ВМ) (virtual machine, VM);

гіпервізор (hypervisor), або монітор віртуальних машин (virtual machine monitor);

контейнер (container);

контейнерний образ (container image).

**Інші поняття:**

архітектура (architecture);

доступність (accessibility);

хмарний сервіс програмних додатків (application cloud service);

пристрій (device);

платформа пристрою (device platform);

маркетплейс програмних додатків (application

marketplace);

готовність (availability);

зворотність (reversibility);

резильєнтність (resilience);

аудит (audit);

перевірюваність (auditability);

нативний хмарний програмний додаток (native cloud application, NCA);

постачальник платформи пристрою (device platform provider);

постачальник хмарного сервісу платформи пристрою (device platform cloud service provider).

**Додаткові поняття, що стосуються хмарних технологій:**

гостьова операційна система (OC) (guest operating system (OS));

операційна система хоста, ОС хоста (host operating system, host OS);

безсерверні обчислення (serverless computing);

демон контейнерів (container daemon);

система управління контейнерами (container management system, CMS);

функціональна декомпозиція (functional decomposition);

безперервне розгортання (continuous deployment);

безперервна доставка (continuous delivery);

методологія, яка дозволяє спростити взаємодію між розробкою та експлуатацією програмного забезпечення (development & operations, DevOps);

підхід до безпеки IT-операцій за методологією DevOps (development & security & operations, DevSecOps);

оркестрування (orchestration);

образ віртуальної машини (virtual machine image);

метадані віртуальної машини (virtual machine metadata);

мікросервіс (microservice);

архітектура мікросервісів (microservices architecture);

функція (функції) як послуга FaaS;

безсерверна база даних (serverless database);

міжмережевий екран (firewall);

реєстр контейнерів (container registry);

близькість ресурсів (resource affinity).

#### IV. МЕТОДИ І ЗАСОБИ СТВОРЕННЯ ХМАРНИХ ЗАСТОСУНКІВ

Реалізація ідей і концепцій парадигми хмарних обчислень потребувала створення нових і адаптацію вже

існуючих технологій [13]. Було створено низку методів і засобів реалізації програмних застосунків у хмарному середовищі. Найбільш розповсюдженими і загальноприйнятими стали такі застосунки [12]:

методи і засоби підтримки еластичності та масштабованості хмарних систем;

мікросервісна архітектура;

безсерверні хмарні обчислення;

платформи для хмарних застосунків;

підходи до зберігання даних у хмарних системах;

засоби мережевої взаємодії у хмарних системах;

контейнери та системи управління контейнерами;

віртуальні машини і гіпервізори;

програмно-визначені центри обробки даних та конвергентні інфраструктури;

засоби гарантування безпеки хмарних обчислень;

інструментарії автоматизації у сфері хмарних обчислень.

#### V. МАСШАБОВАНІСТЬ ТА ЕЛАСТИЧНІСТЬ ЯК ГОЛОВНІ ВИМОГИ ДО ХМАРНИХ СИСТЕМ

Необхідними якостями сучасних хмарних обчислень стали швидка еластичність і масштабованість – властивості, при яких фізичні або віртуальні ресурси з метою їх швидкого збільшення чи зменшення можуть швидко і точно (автоматично чи автоматизовано) переналаштуватися.

Еластичність – це ступінь, у якій система може адаптуватися (як правило, автоматично) до змін робочого навантаження шляхом виділення та звільнення ресурсів так, щоб доступні ресурси максимально відповідали поточному попиту. Масштабованість – це здатність системи збільшувати чи зменшувати ресурси, що виділяються для даного робочого навантаження.

Масштабованість може досягатися як вертикальним, так і горизонтальним масштабуванням [14].

**Вертикальне масштабування** має місце, коли розмір окремого ресурсу змінюється, щоб забезпечувати потрібний рівень ресурсів:

для обчислювальних ресурсів – це зміна кількості процесорів чи обсягу оперативної пам'яті (ОЗП) цього ресурсу;

для ресурсів зберігання – це зміна розміру пристрою (диска) чи зміна швидкості читання/запису, яка доступна ресурсу;

для мережевих ресурсів – це перехід до мережі з більшою чи меншою пропускнуою спроможністю.

**Горизонтальне масштабування** здійснюється, якщо кілька ресурсів використовуються паралельно, а кількість ресурсів, що використовуються паралельно, змінюється:



для обчислювальних ресурсів використовують кілька обчислювальних машин (фізичні машини, віртуальні машини, контейнери);

для зберігання ресурсів використовують кілька пристроїв зберігання (дисків),

для мережеских ресурсів використовують кілька мереж (мережеских пристроїв).

Для вертикального масштабування характерні відносно прості проектні рішення з меншими експлуатаційними витратами. Однак вертикальне масштабування має обмеження, оскільки окремі фізичні обчислювальні ресурси мають максимальну кількість та потужність доступних процесорів і максимальний обсяг доступної пам'яті. Обмеження фізичних обчислювальних ресурсів лімітують вертикальну масштабованість обчислень. У разі масштабування ресурсів зберігання окремі пристрої зберігання також мають обмеження місткості, проте віртуалізовані служби зберігання можуть використовувати кілька базових фізичних ресурсів зберігання, відображаючи їх як єдиний ресурс і таким чином забезпечуючи суттєву вертикальну масштабованість. Для мережеских ресурсів одна фізична мережа має обмеження смуги пропускання. Віртуалізована мережа може підтримувати можливість використання декількох паралельних базових мережеских ресурсів і таким чином розширювати мережескі можливості.

Горизонтальне масштабування, при якому кілька екземплярів ресурсу використовуються паралельно, зазвичай веде до більшого робочого навантаження та вимагає проектних рішень, орієнтованих на характеристики цього масштабування. Для вирішення проблем, пов'язаних з горизонтальним масштабуванням, використовуються спеціальні методи. Для ресурсів зберігання віртуалізація базових ресурсів зберігання приховує наявність декількох фізичних пристроїв зберігання. Однак такий віртуалізований ресурс зберігання часто має властивості окремих фізичних ресурсів, зокрема обмеження на розмір окремих файлів або об'єктів, оскільки такі об'єкти зберігання не можуть охоплювати кілька фізичних пристроїв. Подібні обмеження можуть мати місце під час використання горизонтального масштабування. Горизонтальне масштабування мережеских ресурсів полягає в тому, що проект рішення використовує декілька окремих з'єднань, доступних за посередництва різних мережеских ресурсів. У випадку, коли віртуалізована мережа підтримує можливість прозорого використання декількох паралельних базових мережеских ресурсів, відпадає необхідність у проектуванні засобів, що управляють мережею безпосередньо.

Горизонтальне масштабування обчислювальних ресурсів використовується тому, що технічно неможливо віртуалізувати межі обчислювальних ресурсів. Горизонтальне масштабування обчислювальних ресурсів забезпечується тим, що кілька екземплярів даного програмного компонента запускаються паралельно, а дані розподіляються між цими екземплярами. Таке проектне рішення явно враховує обмеження на обчислювальні ресурси (процесори, пам'ять), що призводить до

необхідності розділяти програмне забезпечення на окремі компоненти, які виконуються в окремих процесах. При цьому знижуються кількість процесорів та обсяги пам'яті, необхідні кожному компоненту. Такий підхід до проектування архітектури мікросервісів безпосередньо пов'язаний з цим способом забезпечення горизонтального масштабування.

Для використання горизонтального масштабування обчислювальних ресурсів (коли кілька паралельних екземплярів програмного компонента обробляють вхідні запити) при розробці проектної рішення враховується необхідність розподілу запитів (які надходять до конкретного програмного компонента) між усіма екземплярами цього програмного компонента. Цей процес розподілу можна вважати обробкою потоку запитів, спрямованих на конкретну кінцеву точку веб-служби (зовні ця кінцева точка має мережеску адресу, на яку надсилаються запити). Кожний з кількох паралельних екземплярів програмного компонента має власну (приватну) кінцеву точку, з окремою мережескою адресою та набором портів. Компонент, який використовується для керування кінцевою точкою служби та направлення кожного вхідного запиту служби одному з паралельних екземплярів, називають балансувальником навантаження [15].

Балансувальник навантаження підключають до кінцевої точки (порту) веб-сервісу, щоб він обробляв усі запити. Балансувальнику навантаження, який оперує зі списком всіх екземплярів відповідного програмного компонента, мають бути відомі принаймні адреса кінцевої точки та порт кожного екземпляру. Кожний вхідний запит надсилається одному з екземплярів програмного компонента. Вибір того, який екземпляр використовувати для вхідного запиту, визначається алгоритмом диспетчеризації (алгоритм диспетчеризації, що використовується, може модифікуватися чи змінюватися шляхом перенаштування параметрів).

Прикладом простого алгоритму диспетчеризації є цикл, при якому кожен з екземплярів використовується по черзі, щоб забезпечувати рівну кількість звернень до кожного екземпляра. Варіантом цього рішення є зважений циклічний перебір, коли кожному екземпляру присвоюється вага, а частка звернень до екземпляра пропорційна вазі. Складніші алгоритми диспетчеризації враховують поточне навантаження на різні елементи системи та інформацію про ще невиконані екземпляром запити. При цьому балансувальник навантаження враховує кількість запитів, які все ще обробляються кожним екземпляром, і надсилає нові запити в найменш завантажений з екземплярів.

Важливою рисою балансувальника навантаження є здатність динамічно налаштовуватися на зміну числа екземплярів, оскільки можливими є запуск нових екземплярів, зупинка або видалення існуючих екземплярів для забезпечення масштабування та еластичності, збій окремого екземпляра.

Можливою є реалізація балансувальника навантаження з використанням зворотного проксі-сервера, який надає

додаткові можливості щодо кешування статичного контенту, обробки (шифрування/дешифрування) підключень за SSL (Secure Sockets Layer) та захисту від найпоширеніших веб-атак, таких як DoS або DDoS.

Еластичність – це автоматична чи автоматизована адаптація ресурсів, використовуваних конкретним компонентом, до змін робочого навантаження на цей компонент. Автоматизоване рішення вимагає наявності персоналу для виконання дій і зазвичай виявляється менш оперативним [16].

Автоматична еластичність ґрунтується на постійному моніторингу відповідних компонентів щодо використання ними ресурсів за допомогою відповідного інструментарію. Компоненти, що відповідають за забезпечення еластичності, конфігуруються таким чином, що у випадку використання ресурсів вище деяких встановлених рівнів виділяються додаткові ресурси, а у випадку використання ресурсів нижче деяких встановлених рівнів надлишок ресурсів вивільняється. При встановленні конкретних порогів, особливо для виділення ресурсів, необхідно враховувати час, потрібний для виділення і вивільнення ресурсів, оскільки є ризик вичерпання поточних ресурсів до того, як додаткові ресурси стануть доступними.

Одна з найважливіших вимог до хмарних систем – масштабування бази даних. Вимоги масштабованості бази даних відносять як до фізичного розміру бази даних, так і до кількості операцій і транзакцій до бази даних, а також до кількості виконуваних запитів і операцій оновлення.

Поширеним підходом, який використовується для масштабування бази даних, є та чи інша форма горизонтального масштабування з використанням декількох комп'ютерів і декількох пристроїв зберігання для однієї бази даних. Фундаментальна проблема використання горизонтальної масштабованості – це синхронізація кількох ресурсів один з одним [17].

В якості одного з підходів до підтримки синхронізації ресурсів використовується таке сегментування бази даних, що різні групи записів бази даних зберігаються і обробляються різними ресурсами, вхідні запити поділяються та передаються відповідному ресурсу, а результати від кожного ресурсу об'єднуються до повернення відповіді на запит.

Інший підхід до підтримки синхронізації ресурсів – це кластеризація, коли мінімізується час, необхідний на зв'язок між ресурсами, і є можливість використання глобального моніторингу транзакцій, що підтримує узгодженість між різними ресурсами. Кожний з цих підходів реалізує так звану сувору узгодженість між різними ресурсами: клієнт, який використовує таку базу даних, завжди отримує той самий результат, незалежно від того, які ресурси фактично використовуються для обробки запиту. Сувору узгодженість необхідна для транзакційних додатків, у яких впорядкування транзакцій є необхідною вимогою до системи.

Інакший підхід до масштабування бази даних може застосовуватися для нетранзакційних типів додатків, коли застосовується концепція несупорядкованої узгодженості. У цьому

випадку створюються репліки бази даних, а оновлення виконуються незалежно для кожної з реплік, допускаючи відмінності між вмістом реплік протягом певного періоду часу та можливості появи конфліктуючих оновлень. Такий тип узгодженості реалізовано переважно у базах даних NoSQL.

## VI. ЗАСТОСУВАННЯ МІКРОСЕРВІСІВ ЯК ПРОВІДНЕ АРХІТЕКТУРНЕ РІШЕННЯ ДЛЯ ПРОЕКТУВАННЯ ХМАРНИХ СИСТЕМ

Архітектура мікросервісів – це підхід, який широко застосовують для проектування нативних хмарних застосунків. Нативний застосунок – це застосунок, який безпосередньо призначений для роботи всередині обраного середовища виконання (в даному випадку – хмарному середовищі) та для використання його можливостей. Архітектура мікросервісів – це архітектурний стиль поділу застосунків на окремі процеси, які виконуються незалежно (мікросервіси), з можливістю розгортання на різних ресурсах інфраструктури за потреби. Архітектура мікросервісів є окремим випадком, конкретизацією та редукцією сервіс-орієнтованої архітектур [18].

Розгорнуті незалежно мікросервіси пов'язані один з одним через сервісні інтерфейси. При створенні мікросервісів додатки прагнуть розділяти на компоненти (сервіси), кожний з яких призначений для реалізації конкретної функціональної чи технічної можливості. Архітектура дозволяє розробляти й оновлювати кожний мікросервіс окремо.

Архітектура мікросервісів – це методологія проектування застосунків. Для реалізації мікросервісів можуть використовуватися різні технології. Мікросервіси можуть реалізовуватися з використанням контейнерів, віртуальних машин, безсерверних обчислень. Різні мікросервіси можуть підключатися до деяких спільних віртуалізованих мереж. При цьому формуються конкретні реалізації архітектури, що використовується для створення додатків.

Створення мікросервісної архітектури ґрунтується на функціональній декомпозиції додатків, як правило, з використанням предметно-орієнтованого підходу до проектування. Предметно-орієнтоване проектування – це система методів структуризації складних програмних систем [19].

Основний зміст предметно-орієнтованого підходу полягає у принципах і прийомах поділу складного простору задачі на простіші частини, у шаблонах реалізації та успішних прийомах формування керованого простору рішень [20].

Для архітектури мікросервісів характерною є цілковита автономність кожного архітектурного компонента (сервісу). Зміна реалізації сервісу не впливає на інші сервіси, оскільки зв'язок між сервісами здійснюється лише через прикладний програмний інтерфейс (API). Інтерфейс кожного сервісу чітко визначено та опубліковано. Слабкий зв'язок і висока узгодженість сервісів дозволяє їх компонувати з метою реалізації сервісів чи додатків

вищого рівня [21].

На відміну від додатків, створених на основі архітектури мікросервісів, існують монолітні додатки, в яких усі компоненти об'єднані одним процесом.

Розробка монолітних веб-додатків проводилася на основі багаторівневої архітектури, відомої як шаблон модель – представлення – контроллер. Реалізація багаторівневої архітектури додатків, розробленої з використанням мікросервісів, відрізняється від реалізації додатків з монолітним дизайном у частині, пов'язаній з пакетуванням програмних компонентів і середовищами виконання додатків.

При монолітному дизайні додатків, незважаючи на те, що додаток був спроектований і реалізований на основі багаторівневої архітектури, всі програмні компоненти зібрані в один програмний пакет і розгорнуті в одному середовищі виконання програми. За будь-якого (незначного) оновлення весь програмний пакет має бути зібраний і протестований, а середовище виконання сервера має бути зупинено для розгортання нового програмного пакета. Це може виявитися тривалим процесом незалежно від обсягу змін програми. Для мікросервісного додатку кожен програмний компонент пакетується як окремий мікросервіс і незалежно розгортається у окремому процесі.

До особливостей мікросервісної архітектури належать такі [22]:

принцип єдиного обов'язку (мікросервіс має реалізовувати одну функціональну можливість);

можливість створювати, розгортати й оновлювати сервіси окремо (інші мікросервіси в системі мають виконуватися та працювати під час розгортання зміненого мікросервісу, в також продовжувати виконуватися після того, як нова версія буде розгорнута). Те, що мікросервіси бажано розгортати окремо, впливає на спосіб їх взаємодії (зміни в інтерфейсі мікросервісу зазвичай мають бути зворотно сумісними, щоб інші мікросервіси могли продовжувати працювати з новою версією так само, як працювали зі старою);

тенденція до необтяжливості (кожний мікросервіс відповідає тільки за одну функціональну можливість, бо мікросервіси за своєю природою є невеликими як за областю дії, так і за розміром коду);

можливість написання сервісів різними мовами для задоволення потреб у продуктивності розробки (важливо також зазначити, що мікросервіси можуть взаємодіяти з іншими мікросервісами, необов'язково написаними тією ж мовою програмування (C#, Java, Erlang тощо); все, що потрібно знати мікросервісам, – це те, як обмінюватися повідомленнями один з одним (деякі мікросервіси можуть обмінюватися повідомленнями через службову шину, через двійковий протокол (наприклад Thrift, залежно від системних вимог), через протокол HTTP (найчастіше));

використання різних стеків зв'язувального програмного забезпечення та різних рівнів даних для різних сервісів (наприклад, наявність власного сховища даних кожного мікросервісу дозволяє використовувати

різні технології баз даних для різних мікросервісів залежно від потреб конкретного мікросервісу, вибраних для даного мікросервісу технології баз даних і частин реалізації, які не впливають на інші мікросервіси).

Вигоди використання архітектури мікросервісів є реальними, оскільки належним чином створені мікросервісні додатки забезпечують [23]:

можливість безперервної доставки програмного забезпечення;

ефективність процесу розробки через зниження складності супроводу мікросервісів;

високу стійкість до помилок;

масштабування послуг у бік збільшення чи зменшення незалежно від інших послуг.

Хмарні платформи дозволяють розгортати кожний мікросервіс незалежно та зв'язувати мікросервіси разом для створення додатку. Кожним мікросервісом можна керувати незалежно від інших, всі мікросервіси можна незалежно розподіляти та оновлювати, залишаючи додаток загалом у повністю робочому стані.

Ще одна перевага використання архітектури мікросервісів полягає в тому, що кожний компонент додатку, створений як мікросервіс, може мати окремий життєвий цикл розробки. Це дозволяє швидше змінювати, розширювати, тестувати та розгортати дрібніші компоненти додатків.

При використанні мікросервісів переважно використовують асинхронну взаємодію за допомогою подій і надають особливого значення стійкості до відмов скрізь, де потрібна синхронна взаємодія. Спосіб взаємодії мікросервісів має бути стійким до помилок у тому сенсі, що кожний мікросервіс має бути готовим до періодичних збоїв інших мікросервісів і має при цьому продовжувати працювати в міру можливостей. Збій одного мікросервісу, наприклад, через простої під час розгортання, не має призводити до збою інших мікросервісів, допускаючи лише скорочення функціональності або дещо більший час обробки запитів.

Архітектура на основі мікросервісів дає можливість масштабувати кожний із сервісів окремо з урахуванням вузьких місць, щоб відповідати навантаженню лише на даний компонент. Цей підхід відрізняється від підходу до монолітної програми. У випадку монолітної архітектури всі компоненти програми розгортаються і працюють як єдине ціле, а масштабування можливе лише шляхом вертикального масштабування всього додатка.

Вибір архітектури мікросервісів тягне за собою не лише нові можливості, а й істотні витрати, які не слід ігнорувати:

оскільки системи мікросервісів працюють розподілено, то пов'язані з вибором такої архітектури додаткові витрати є доволі високими (зокрема, такі системи складніші для осмислення та тестування, ніж монолітні, а обмін повідомленнями між процесами або по мережі відбувається на порядки повільніше, ніж виклики методів

усередині процесу);

оскільки системи мікросервісів складаються з множини мікросервісів, то необхідно розробляти та розгортати кожний з них і забезпечувати керування ними під час експлуатації у середовищі виконання, що передбачає велику кількість розгортань і складні схеми встановлення;

оскільки кожний мікросервіс має власну базу коду, то рефакторинг із переміщенням коду від одного мікросервісу до іншого потребує великих зусиль, що передбачає правильне визначення сфери дії всіх мікросервісів.

Перед початком побудови системи мікросервісів бажано оцінювати рівень складності реалізованої системи, щоб підбирати відповідні накладні витрати і визначати способи вирішення проблем, що виникають [24]:

оскільки комунікація та інтеграція, визначення правильної комунікаційної стратегії є дуже важливими для проектування, то стратегія включає визначення правильного протоколу, очікуваного часу відповіді, таймаутів та дизайну з використанням API, REST, сокетів, TCP, шлюзів, автоматичних вимикачів, балансувальників навантаження, проксі-серверів;

оскільки виявлення сервісів є здатністю різних сервісів узгоджено виявляти одне одного, то для системи важливо мати стандартний та послідовний процес, у якому сервіси можуть реєструватися та повідомляти про себе, допомагаючи виявляти кінцеві точки та розташування інших сервісів, що передбачає вибір правильних стратегій пошуку і виклику сервісів, а також вибір налаштування API-шлюзів для повідомлень про виявлення та доступність сервісів;

оскільки продуктивність залежить від використання архітектури мікросервісів з ризиком надмірної комунікації між різними сервісами (наприклад, виконання однієї функціональної вимоги може призводити до спільної організації (оркестрації) кількох викликів служб, що, у свою чергу, призводить до більшого запізнення відповіді), то робота в рамках одного обмеженого контексту веде до того, що дані, які часто використовуються одним мікросервісом, також належать іншому мікросервісу, вимагаючи створення примітивів спільного використання даних та синхронізації, щоб уникати накладних витрат на зв'язок, спричинених копіюванням даних під час викликів мікросервісу;

оскільки відмовостійкість – це здатність системи відновлюватися після часткової відмови, то розробники мікросервісів мають надавати механізми для поступового відновлення та запобігання розповсюдженню будь-якого збою на інші частини системи. Оскільки деякі служби запускаються в кількох копіях з причин масштабування та доступності, то кількість копій, узгодженість версій серед копій, механізм балансування навантаження та розташування в мережі є ключовими факторами для забезпечення стійкості до відмов;

оскільки критично важливим рішенням безпеки є встановлення довірчих відносин між мікросервісами з урахуванням різних способів взаємодії сервісів один з

одним, а виклик іншого сервісу може використовувати синхронний або асинхронний протокол, то для деяких систем важливо, щоб користувач був ідентифікований в усіх ланцюжках службової взаємодії між мікросервісами, щоб шаблони взаємодії між сервісами мали конкретні та ефективні механізми автентифікації та авторизації відповідно до політики безпеки, щоб поліпшений зв'язок між компонентами мав безпечні протоколи відповідно до вимог програми;

оскільки у системах на основі мікросервісів трасування сервісів та централізоване ведення журналів є необхідними для розробників, щоб розуміти поведінку системи в цілому, то при поділі монолітних систем на мікросервіси використовуються як методи, що традиційно використовуються для налагодження та профілювання систем, так і різні нові методи та рішення, зокрема, розподілене трасування (можливість відстежувати ланцюжок сервісних викликів для ідентифікації окремої транзакції або окремого запиту користувача), журнали для цілей аудиту та налагодження системи, для отримання цілісного уявлення про поведінку системи (для налагодження систем зазвичай потрібна централізована система ведення журналів з можливостями агрегування та інтегрування інформації журналів від окремих мікросервісів);

моніторинг продуктивності додатків має включати вимірювання продуктивності окремих мікросервісів, щоб оцінювати працездатність і перевіряти виконання існуючих угод про рівень обслуговування для системи;

оскільки операції розгортання для запуску сервісних процесів потребують автоматизованих механізмів їх розгортання, то масштабованість та цілісність системи є першочерговими завданнями при розгортанні мікросервісів. Контейнери є механізмом, який переважно використовують для розгортання мікросервісів, а застосування систем управління контейнерами (які призначають ресурси і реалізують топологію з'єднань) вирішує проблеми розгортання, однак деякі припущення та вимоги у моделях розгортання можуть не відповідати функціональним вимогам конкретних програм на основі мікросервісів: наприклад, може припускатися відсутність стану у контейнера, в якому розміщується мікросервіс, позаяк наявність мікросервісу з відстеженням стану може входити до загальних вимог до системи/додатку.

До основних очікуваних якісних характеристик мікросервісних систем належать:

масштабованість, розширюваність, еволюційність;

незалежність, спадна складність, ізолюваність, слабкість зв'язку, поділюваність, розподілюваність, контейнеризованість, автономність;

ремонтпридатність, розширюваність, адаптивність, мінливість, здатність до гнучкої реалізації, динамічна мінливість;

автоматизованість розгортання;

керована працездатність, відмовостійкість, надійність, аварійна відновлюваність, відсутність єдиної точки

відмови;

модульність, єдина відповідальність, спадна складність, відокремленість бізнес-завдань, спеціалізованість, настроюваність;

керованість, самоврядність, децентралізованість управління, чутливість;

продуктивність, тривалість відгуку, тривалість трансакції, пропускну здатність, ефективність;

можливість повторного використання – підключення;

різнорідність технологій, переносність, можливість вибору із множини технологій чи мов програмування;

гнучкість, ітеративність, інкрементність, безперервність доставки;

безпечність;

балансованість навантаження, розподіл інтенсивності навантаження;

організаційна узгодженість, крос-функціональність команд, координованість розробників і тестувальників;

відкритість інтерфейсу, відкритість опису API-інтерфейсів, графічних інтерфейсів користувача та формату комунікаційних повідомлень.

Способи реалізації мікросервісних систем можуть бути різними: кожний компонент системи, який є окремим мікросервісом, працює у власному процесі і за необхідності викликає інші мікросервіси, може бути реалізований з використанням віртуальної машини, контейнера або безсерверної функції.

## VII. БЕЗСЕРВЕРНІ ХМАРНІ ОБЧИСЛЕННЯ ЯК СУЧАСНА ТЕНДЕНЦІЯ ЩОДО ДОСКОНАЛОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ХМАРНИХ СЕРВІСІВ

Безсерверні обчислення маскують використання серверів від розробників і користувачів, виконуючи код за запитом з автоматичним масштабуванням. Безсерверні обчислення забезпечують автоматичне масштабування з динамічним еластичним розподілом ресурсів, автоматичне розподілення по кількох місцях, а також автоматичне обслуговування та резервне копіювання. Можливості безсерверних обчислень запускаються однією або декількома подіями, визначеними користувачем, і виконуються протягом обмеженого періоду часу, необхідного для обробки кожної події. Безсерверні можливості можуть запускатися прямим викликом із веб-додатків та мобільних додатків. Таким чином, безсерверні обчислення – це категорія хмарних сервісів, якими можна користуватися без необхідності резервувати, розгортати та керувати апаратними чи програмними ресурсами, надаючи лише код додатку або надаючи дані [25].

Зазвичай у безсерверних додатках використовуються функції у вигляді сервісу FaaS (керовані рішення для короткочасних обчислень без збереження стану (AWS Lambda, Azure Functions або Google Cloud Functions)), сервісів обміну повідомленнями, зберігання файлів, баз даних, потокової передачі та аутентифікації (повністю

керуються постачальником) та програм, які постачаються у вигляді сервісу (Back-end as a Service, BaaS). Безсерверні обчислення сьогодні активно освоюються підприємствами та науково-дослідною спільнотою завдяки важливій особливості: вони дозволяють розробникам зосередитися на реалізації бізнес-логіки, поклавши на постачальника сервісу всі експлуатаційні завдання, включаючи розгортання, резервування ресурсів та масштабування.

Ідея безсерверних хмарних обчислень ґрунтується на концепції функції як сервісу. Ця концепція полягає в тому, щоб необхідні для коду програми ресурси виділялися під час її виконання, динамічно на її запит, без необхідності попереднього їх виділення та управління конкретними реальними чи віртуальними машинами, контейнерами та будь-яким іншим програмним забезпеченням, що входить у зв'язаний стек.

Інший спосіб опису безсерверних обчислень полягає в тому, що вони є різновидом хмарної платформи, де користувач (розробник) надає тільки код програми та/або самі дані, позаяк всі інші ресурси та можливості, необхідні для запуску програми, надаються та керуються платформою.

В цілому вважається, що безсерверні обчислення є більш придатними для допоміжної функціональності і менш придатними для основних функцій, критичних до затримок, та обслуговують велику кількість користувачів. Наприклад, на Netflix сервіс AWS Lambda використовується для допоміжних завдань – кодування відео, резервного копіювання файлів, аудиту безпеки віртуальних машин, моніторингу; основна функціональність (бекенд сайту, додатки, доставка відео) виконується на традиційній хмарній інфраструктурі. Безсерверні програми застосовуються для підтримки допоміжної функціональності (цьому служать 39% додатків), для реалізації основних функцій (42%), для виконання дослідницьких програм (16%): значна кількість безсерверних додатків (39%) працюють з високоінтенсивним трафіком. При цьому частка додатків, що виконуються на запит і працюють з малим обсягом трафіку, становить 47%, а частка додатків, що виконуються за розкладом, становить 17% [26].

Поширений аргумент проти безсерверних систем полягає в тому, що при холодному запуску вони не підходять для додатків зі строгими вимогами до затримки. Однак безсерверні програми застосовуються і для критичних до затримки завдань, хоча холодний запуск збільшує максимальне значення затримки, а частина безсерверних програм працюють в режимі реального часу. Інший аргумент проти безсерверних систем полягає в тому, що безсерверні платформи сьогодні можуть не підходити для завдань, які виконуються довго або обробляють великі обсяги даних. Тому безсерверні платформи потребують удосконалення.

Отже, безсерверні програми найчастіше застосовуються для завдань з коротким часом виконання, малим обсягом даних та стрибкоподібним навантаженням. Однак, на противагу поширеній думці, вони широко використовуються для критичного навантаження основної

функціональності з великим трафіком. Таким чином, в цілому безсерверні хмарні обчислення використовуються для додатків усіх типів, з різними вимогами і робочими навантаженнями.

Порівняно з традиційними хмарними системами, безсерверні системи мають ряд переваг та недоліків [27].

До переваг відносяться:

оскільки відсутні експлуатаційні завдання (NoOps), то розробнику, який застосовує безсерверні функції, достатньо створити основний, не звертаючи уваги на масштабування та оркестрування. Безсерверні системи, особливо які використовують BaaS, зменшують обсяг роботи спеціалістів з експлуатації, оскільки управління інфраструктурою (наприклад, базами даних) передається на «аутсорсинг» постачальнику платформи, а тому розробникам не доводиться мати справу із серверами, на яких виконуються функції;

оскільки відбувається швидко незалежне розгортання, то розробник може розгорнути конкретну функцію і повторювати цю операцію без розгортання всієї конфігурації. Така можливість також є при роботі з мікросервісами, але безсерверна модель дозволяє запускати вужчі функції і забезпечувати їм більшу незалежність;

оскільки відсутні витрати на інфраструктуру (при використанні традиційних хмарних сервісів компанії зазвичай платять за надмірно потужні віртуальні машини (щоб застрахуватися від вичерпання ресурсів), ціна використання яких не залежить від реального обсягу використання сервісу), то безсерверні моделі не вимагають купувати сервери та платити за фіксованими тарифами. Код виконується лише при настанні заданої події, а оплата за інфраструктуру стягується лише за час виконання коду. Тому у разі завдань з коротким періодом виконання інфраструктурні витрати можуть суттєво зменшуватися, але у разі завдань з довгим періодом виконання ці витрати можуть зростати;

оскільки відбувається автоматичне масштабування, то безсерверні функції автоматично масштабуються залежно від навантаження. Відповідні програми здатні обробляти велику кількість запитів, які надсилаються численними клієнтами.

Реалізація безсерверних систем супроводжується певними складнощами, зокрема пов'язаними з необхідністю освоювати подійно-залежну парадигму, забезпечувати зв'язок між сервісами, виконувати моніторинг та тестування, а також контролювати безпеку:

оскільки необхідні тестування та налагодження, то створення тестової копії безсерверного середовища не завжди є можливим, а тому тестування функцій іноді відбувається робочому середовищі, налагодження ускладнюється через розподілену природу безсерверних проєктів і через прихованість від розробника інфраструктурних процесів;

оскільки відбуваються процеси з тривалим періодом виконання, то робота таких процесів на безсерверних

платформах може коштувати дорожче, ніж на платформах з традиційною хмарною інфраструктурою;

оскільки потрібна продуктивність, то безсерверні функції періодично запускаються, а кожний їх запуск вимагає часу на ініціалізацію. Оскільки холодний запуск може вести до затримок під час виконання додатків, то існують обхідні рішення, які дозволяють підтримувати функції у стані готовності та уникати холодного запуску;

оскільки потрібна прив'язка до постачальника, то після розгортання безсерверної системи на одній платформі перенесення цієї системи на іншу платформу не є простим. Хоча прив'язка до постачальника посилюється при використанні бази даних, шини обміну повідомленнями, API-шлюзів та інших пропрієтарних технологій, вже з'явилися рішення, які забезпечують взаємозамінність постачальників. Наприклад, існує система Serverless Application Framework, яка дозволяє розгорнути той самий код на платформах різних операторів. Загалом простого способу перенесення даних, особливо під час використання пропрієтарних технологій, немає;

оскільки потрібна подієво-залежна парадигма, то її освоєння може бути складним, особливо для розробників, які не застосовували такої парадигми.

Використання безсерверних функцій – це один із способів реалізації архітектури програми на основі мікросервісів, який не вимагає використання контейнерів і систем керування контейнерами. Водночас можна поєднувати використання функцій з мікросервісами, реалізованими з використанням контейнерів (або з використанням віртуальних машин).

Іншим видом сервісів, які наслідують моделі безсерверних хмарних обчислень, є безсерверні бази даних. У безсерверній базі даних розподілом ресурсів зберігання управляє постачальник платформи, а її функції доступні через API. Об'єм пам'яті автоматично та динамічно масштабується, щоб відповідати необхідному обсягу даних клієнта, які розміщуються в базі даних. Реплікація й резервне копіювання керуються постачальником, включаючи розміщення даних у місцях, які підходять для використання даних, а також синхронну підтримку кількох реплік. Аналогічно ресурси, необхідні для обслуговування запитів і оновлень у базі даних, також управляються і масштабуються постачальником. Приклади безсерверних баз даних включають Amazon Aurora Serverless, Cassandra (Datastax Astra), DynamoDB, FaunaDB, Google Cloud Firestore, IBM Cloudant, Microsoft Azure Data Lake, MongoDB (Atlas), Oracle Autonomous Database, Oracle NoSQL Database.

Наукова спільнота (наприклад, такі відомі організації, як NASA, CERN, Німецький аерокосмічний центр (DLR), Німецький електронний синхротрон (DESY)) виявляє зростаючий інтерес до безсерверних хмарних рішень. Проте більшість відповідних застосувань перебувають на ранній стадії розвитку з недостатньою загальнодоступною інформацією про них [28].

Існують досить оптимістичні прогнози щодо безсерверних хмарних обчислень у 2020-х роках [29]:

очікується створення нових сервісів зберігання даних BaaS, розширюючи коло додатків, які добре працюють з безсерверними обчисленнями. Такі сховища будуть відповідати продуктивності локального блокового сховища і будуть доступними в різних варіантах, збільшуючи неоднорідність комп'ютерного обладнання для безсерверних обчислень порівняно із звичайним процесором x86, який воно застосовує сьогодні;

очікуються спрощення безсерверних обчислень для цілей програмування та убезпечення (порівняно із серверними хмарними обчисленнями) шляхом вищого рівня абстракції програмування та тонкої ізоляції хмарних функцій;

оскільки немає фундаментальної причини, через яку вартість безсерверних обчислень має перевищувати вартість серверних обчислень, то моделі білінгу (виставлення оплати) розвиватимуться так, що використання безсерверних обчислень майже будь-яким додатком, який працює практично в будь-якому масштабі, буде (набагато) дешевшим, ніж використання серверних обчислень;

оскільки майбутнє серверних обчислень пов'язуватиметься зі спрощенням BaaS, то програми, які складно писати над безсерверними обчисленнями (бази даних з OLTP, примітиви комунікацій, черги), ймовірно, пропонуватимуться як частина більшого набору сервісів від усіх постачальників хмарних послуг;

хоча серверні хмарні обчислення продовжуватимуть існувати, відносна важливість цієї частини хмари знижуватиметься, оскільки безсерверні обчислення матимуть менше обмежень;

безсерверні обчислення стануть стандартною обчислювальною парадигмою хмарної ери, значною мірою витіснивши серверні хмарні обчислення і тим самим завершивши еру клієнт-сервер.

### VIII. ПЛАТФОРМИ ДЛЯ ХМАРНИХ ЗАСТОСУНКІВ

Хмарна платформа – це хмарне обчислювальне середовище, в якому можна розгортати, запускати і підтримувати керованими створені або придбані програмні додатки, які використовують одну або кілька мов програмування та одне або кілька середовищ виконання. Платформа зазвичай включає узгоджену сукупність програмного забезпечення, призначеного для спільної роботи [30].

Платформи призначені, насамперед, для розроблення, розгортання та експлуатування клієнтських програм, а також для інших можливостей – використання програмних, обчислювальних, мережевих ресурсів і ресурсів зберігання. Платформи зазвичай включають різноманітні можливості проміжного програмного забезпечення (middleware), включаючи платформи для додатків, платформи інтеграції, платформи бізнес-аналітики, сервіси потокової передачі подій і серверні сервіси для мобільних додатків, а також набори інструментів, що підтримують процеси розробки. Крім того, пропозиція платформ часто включає набір

операційних опцій, таких як моніторинг, управління, розгортання і пов'язані з ними можливості.

Платформи призначені для розробників додатків та IT-фахівців з експлуатації додатків, які підтримують спільну з розробниками роботу та методологію DevOps [31].

DevOps (акронім від англійського словосполучення development & operations) – це низка практик, призначених для пожевлення взаємодії розробників із фахівцями інформаційно-технологічного обслуговування, а також для зближення їхніх робочих процесів. DevOps ґрунтується на ідеї тісної взаємозалежності між розробкою та використанням програмного забезпечення, щоб допомагати організаціям швидше створювати й оновлювати програмні продукти та послуги [32].

Один із способів опису хмарної платформи полягає в тому, що вона є середовищем для додатків, створених серверами додатків, системами управління базами даних, брокерами інтеграції, системами управління бізнес-процесів, машинами логічного виведення, системами обробки складних подій та подібними системами. Таке середовище допомагає розробнику писати програми, скорочуючи обсяг необхідного коду й одночасно розширюючи функціональні можливості програм. Суть створення платформи полягає в тому, що проводяться встановлення, налаштування та супроводження середовища виконання програми (включаючи будь-які базові віртуальні машини, операційні системи, контейнери, середовища виконання, бібліотеки), залишаючи фахівцям написання лише самого коду програми. Таким чином, суттєва різниця між інфраструктурою та платформою полягає в тому, що в інфраструктурі створюється образ віртуальної машини або образ контейнера для виконання коду програми, а на платформі надається все необхідне для безпосереднього завантаження та виконання коду програми [33].

Платформи також часто розширюють можливості проміжного програмного забезпечення, пропонуючи розробникам додатків постійно зростаючий різноманітний набір сервісів і API. При цьому все спрямоване на те, щоб приховувати існування проміжного програмного забезпечення, забезпечуючи високу продуктивність розробки. Частина платформ поєднують функції інфраструктур і додатків, пропонуючи деякий рівень контролю над розподілом базових ресурсів, з одного боку, і надаючи повні можливості готового програмного забезпечення, з іншого [34].

Як правило, програми, розроблені на відповідних платформах, можуть використовувати переваги нативних характеристик хмарних середовищ, нерідко без необхідності розробнику програми додавати спеціальний код у власне застосунок. Це забезпечує можливість створення хмарних застосунків без спеціальних навичок.

Платформи зазвичай мають такі характеристики [35]:

надання середовища або ряду середовищ виконання для програм, де кожне середовище виконання підтримує один або невеликий набір мов програмування та фреймворків (у середовищі-полілоті), що дозволяє розробникам вибирати

найбільш підходящу технологію. Середовища виконання можуть використовувати контейнери та безсерверні можливості;

підтримка розгортання та виконання програмних додатків користувача, які можуть повною мірою використовувати масштабовані, еластичні та інші хмарні можливості, а також властивості інфраструктури (у багатьох випадках – без написання спеціального коду);

підтримка уніфікації та оптимізації розробки і супроводу, тобто підтримка DevOps з усуненням поділу між розробкою, супроводом та експлуатацією, з наданням інструментів (редактори коду, репозиторії коду, інструменти складання, розгортання і тестування, інструменти безпеки), служб та інформаційних панелей моніторингу аналітики використання додатків (ведення журналів, аналіз журналів), API-інтерфейсів, які дозволяють клієнтам підключати власні набори інструментів підтримки. Наприклад, збільшення чи зменшення кількості активних працюючих екземплярів програми для роботи зі змінним навантаженням програми може виконуватися автоматизованими службами, на основі набору правил, встановлених розробниками або IT-фахівцями;

надання розробникам та операторам автоматизованих механізмів швидкого розгортання та запуску програмних додатків, забезпечуючи динамічний розподіл ресурсів, коли код програми передається в службу платформи через API. Вимоги до конфігурації за замовчуванням зводяться до мінімуму, хоча залишається можливість керувати конфігурацією за потреби, наприклад при контролі кількості паралельно працюючих екземплярів програми для обробки очікуваного робочого навантаження або при досягненні цілей відмовостійкості;

підтримка широкого спектра можливостей проміжного програмного забезпечення (наприклад, управління базами даних з використанням технологій баз даних SQL та NoSQL, управління бізнес-процесами, машинне логічне виведення, служби інтеграції, бізнес-аналітики, обробки подій та серверні служби мобільних додатків), щоб задовольняти вимоги до програмних додатків;

підтримка використання низки сервісів, які зазвичай викликаються через API, встановлюються та запускаються постачальником платформи, знімаючи відповідальність зі споживача сервісу (наприклад, для бази даних відповідальність за забезпечення доступності та надійності, за наявність реплік та резервних копій даних, за захист даних, тощо покладається на постачальника) та зменшуючи його зусилля (використання сервісів постачальника платформи дозволяє знижувати складність побудови програмних систем, бо їх постачання у готовому вигляді не потребує встановлення та налаштування складного набору програмного забезпечення);

надання попередньо налаштованих можливостей з мінімальною доконфігурацією, доступною розробникам, фахівцям і клієнтам, знижуючи складність системи і ймовірність виникнення несподіваних проблем (за рахунок спрощення управління та налагодження системи),

підвищуючи продуктивність системи (на деяких платформах можна автоматично налаштувати конфігурації на основі шаблонів використання та навантаження, зменшуючи час, необхідний для найефективнішого запуску застосунків);

надання можливостей для програмних додатків керувати через програмний інтерфейс API, потрібний зазвичай для мобільних застосунків користувача для того, щоб ці додатки, працюючи незалежно від основної програми, могли за необхідності отримувати доступ до даних і транзакцій, а також щоб дозволяти іншим сторонам (партнерам, клієнтам, постачальникам) інтегрувати власні додатки з додатками підприємства (така інтеграція здійснюється через API). Оскільки надання API вимагає певного рівня контролю, то лише авторизовані користувачі можуть отримувати доступ до API. Оскільки кожний користувач може отримувати доступ тільки до тих можливостей, на які він має дозвіл, то потрібні деякі можливості керування API, і такі можливості керування API пропонуються платформами;

підтримка портування наявних програм за потреби перенесення існуючих програм на нову платформу. Деякі платформи мають спеціальні засоби для допомоги у міграції від одних платформ до інших;

підтримка (платформами розподілених обчислень) широкого спектру програм, що використовують архітектуру мікросервісів, включаючи підтримку середовищ виконання (які використовуються для власне мікросервісів), підтримку базових засобів (які використовуються мікросервісами), підтримку мережевих засобів (які пов'язують всі компоненти разом);

підтримка мережевих технологій, щоб глибше інтегруватися з мережевими можливостями хоста постачальника, який контролює стеки мережевих протоколів і забезпечує їм повну видимість. Ця підтримка дозволяє відносно просто (як для постачальника, так і для розробника) інтегрувати платформу із засобами віртуалізації мережі, балансування мережевого навантаження, перемикачів при відмовах, оптимізації мережі, кешування, передачі повідомлень та організації черг та інших мережевих технологій;

надання вбудованих засобів безпеки (міжмережевий екран, управління кінцевими точками, безпечна обробка протоколів, управління доступом і авторизація, шифрування переданих і збережених даних, перевірка цілісності, механізми стійкості (створення надлишкових копій даних, автоматичне резервне копіювання)), які знижують навантаження на розробників і спеціалістів з експлуатації, а також мінімізують вплив на код програми. Оскільки базове середовище виконання є частиною платформи, то сторона, яка надає платформу, бере на себе відповідальність за усунення проблем безпеки операційної системи, виявлення та видалення шкідливих програм та інші важливі завдання з підтримки безпеки, тим самим даючи розробнику можливість зосереджуватися на запобіганні тих вразливостей безпеки, які вносяться цим розробником у свій власний код.



Об'єднання кількох елементів типової хмарної платформи має наслідком такий склад компонентів типового програмного застосунку, що був створений та розгорнутий з використанням такої платформи [36]:

зовнішня кінцева точка, яка надає доступну ззовні кінцеву точку з відповідним забезпеченням безпеки кінцевої точки (наприклад, підтримка https, керування сертифікатами, обробка DDoS-атак, керування ідентифікацією та доступом);

зворотний проксі-сервер для кожного компонента програми, що масштабується за рахунок використання паралельних екземплярів (базова програма (ядро) і мікросервіси) і використанні функцій балансування навантаження для рівномірного розподілу вхідних запитів по всіх працюючих екземплярах;

засоби управління мережевою взаємодією множини сервісів для внутрішніх з'єднань між компонентами програми, а також для з'єднань із зовнішніми сервісами;

засоби автоматичного управління паралельним запуском кількох екземплярів кожного компонента програми для масштабування та розподілу вхідних запитів за цими екземплярами. Оскільки кількість екземплярів, які запускаються одночасно, можна збільшувати та зменшувати, щоб відповідати обсягу роботи для задоволення запитів, то зазвичай потрібно, щоб платформа відстежувала екземпляри для визначення того, наскільки вони зайняті. Засоби автоматичного управління іноді можна пов'язувати з автоматичним балансуванням мережевого навантаження, щоб рівні трафіку для конкретних екземплярів можна було динамічно узгоджувати з обсягом їх поточних ресурсів та доступністю;

різноманітні допоміжні послуги (наприклад, бази даних або інші послуги зберігання даних), необхідні для компонентів додатка, надаються набором сервісів, до яких компоненти підключаються за потреби;

API платформи, інтерфейс між інструментарієм для роботи з платформою і додатками, інтерфейс між самою платформою і сервісами, які становлять додаток. Наприклад, такий інтерфейс може дозволяти передавати код компонента додатку на виконання служби виконання додатків (runtime);

інструментарій для роботи з платформою та програмами (DevOps). Розробники та підтримка можуть об'єднуватися в єдину команду DevOps, використовуючи різні інструменти DevOps для виконання своєї роботи (інструменти розробки та тестування використовуються під час створення та тестування додатку та його мікросервісів, а інструменти моніторингу та управління використовуються для спостереження та управління компонентами додатку у робочому середовищі).

Цифрові платформи сьогодні стають місцем повсякденних транзакцій сучасної людини.

## IX. ВИСНОВКИ

Україна стає одним із світових лідерів у галузі інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ), про що свідчить, наприклад, капіталізація необанку Revolut або транснаціональної корпорації GitLab. Revolut і GitLab заснували випускники сучасних університетів України, а спеціальності з ІКТ стали одними з найпопулярніших серед абітурієнтів України. Розвиток ІКТ України ґрунтується на інституційному базисі передових досягнень вітчизняної кібернетики та інформатики, починаючи з 1950-х років, коли в Україні був створений перший у континентальній Європі та третій у світі комп'ютер. Вітчизняна соціологічна школа також бере початок від вітчизняної кібернетики. Інформація про подібні досягнення створює для молоді та суспільства в цілому мотивацію до ширших застосувань ІКТ, які в ході Четвертої промислової революції торкаються практично всіх сфер людської діяльності.

Розробка пропозованих інформаційно-комунікаційних технологій призначена для застосування великих даних у наявному соціумі, наприклад, у Центрі досліджень інтелектуальної власності та трансферу технологій НАН України, Державному науково-дослідному інституті інформатизації та моделювання економіки Мінекономіки України та в інших зацікавлених сторін (стейкхолдерів), допускаючи трансформацію ролі учасника цифрової платформи до рівня стейкхолдера. Методологія спирається на попередній досвід, права інтелектуальної власності та ноу-хау авторів в розробці та експлуатації онлайн-систем з десятками тисяч користувачів, запитів і звітів у режимі реального часу. Розроблені в НАН України та широко експлуатовані (починаючи з 2015 р.) розподілені інформаційні технології практично доводять здатність надійно й ефективно забезпечувати потреби побудови резильєнтних інфраструктур загалом. Хмарні архітектури з подібними технологіями водночас підвищують резильєнтність кіберінфраструктур. Беручи до уваги цифрові виклики сучасної логістики та менеджменту ланцюгами поставок, глобалізацію, повсюдне користування даними, їх доступність або самопідтримуваність, необхідно розробляти цілісний погляд на інтеграцію методів великих даних і бізнес-аналітики. Оскільки продукти, основані на хмарних технологіях, мають високу ринкову капіталізацію (Amazon, Alibaba, Google та інші), то розвиток цих технологій має підтримуватися в Україні.

Розвиток інформаційних і програмних технологій сприяв створенню нового необхідного інструментарію, що розширює можливості розробки хмарних систем і нових інструментів для їх простішого і швидшого розгортання та супроводу. Ці інструменти в сукупності з методами та практиками поліпшуватимуть хмарні системи.

Використання нових методологій проектування та технологій розробки хмарних систем дозволить задовольняти попит на сучасні, надійні, масштабовані прикладні програмні інтерфейси та сервіси, а також сприятиме створенню нових класів хмарних застосунків та сервісів у майбутньому.

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Горбачук В., Гавриленко С., Голоцуков Г., Дунаєвський М. Засади розвитку хмарних технологій. *Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання*. Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені В.Стефаника, 2020. С. 82–83.
- [2] Горбачук В., Гавриленко С., Дунаєвський М. До участі України в Європейській хмарі відкритої науки. Global and regional problems of informatization in society and nature using 2021. Kyiv: National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, 2021. P. 169–171.
- [3] Горбачук В.М., Дунаєвський М.С., Сулейманов С.-Б., Батіг Л.О., Симонов Д.І. Моделі прийняття рішень на ринку хмарних послуг. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2021. № 3. С. 53–64.
- [4] Горбачук В.М., Бардадим Т.О., Осипенко С.П. Задача децентралізованого прийняття рішень для сучасних хмарних послуг. *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2021. № 2. С. 32–38.
- [5] Gaivoronski A., Gorbachuk V. The stochastic problem for cloud services. *Mathematical Modeling, Optimization and Information Technologies* (November 15–19, 2021, Chisinau (Moldova), Kyiv (Ukraine), Batumi (Georgia)). Chisinau: Moldova State University; Kyiv: V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine; Batumi: Batumi Shota Rustaveli State University, 2021. P. 64–69.
- [6] Гайворонський О.О., Горбачук В.М., Дунаєвський М.С. Стратегічна взаємодія провайдерів диференційованих Інтернет-послуг. *Проблеми управління у інформатиці*. 2021. № 6. С. 102–113.
- [7] Rimol M. Gartner says four trends are shaping the future of public cloud. *Gartner Press Release*. 2021, August 2. URL: <https://www.gartner.com/en/newsroom/press-releases/2021-08-02-gartner-says-four-trends-are-shaping-the-future-of-public-cloud> (дата звернення: 29.11.2022).
- [8] Горбачук В., Гавриленко С. Вплив ціноутворення хмарних сервісів на прибуток провайдера, споживчий надлишок і суспільний добробут. *Проблеми програмування*, 2020, № 2–3. С. 237–245.
- [9] ISO/IEC 17788:2017 Information technology – Cloud computing – Overview and vocabulary. URL: <https://www.iso.org/standard/60544.html> (дата звернення: 29.11.2022).
- [10] ДСТУ ISO/IEC 17788:2017 Інформаційні технології. Хмарні обчислення. Огляд та основні терміни. Дата реєстрації: 19.12.2017. Дата початку дії: 01.01.2019. URL: [http://online.budstandart.com/ua/catalog/doc-page?id\\_doc=75484](http://online.budstandart.com/ua/catalog/doc-page?id_doc=75484) (дата звернення: 29.11.2022).
- [11] ISO/IEC 22123-1:2021 Information technology – Cloud computing – Part 1: Vocabulary. URL: <https://www.iso.org/standard/80350.html> (дата звернення: 29.11.2022).
- [12] ISO/IEC TS 23167:2020 Information technology – Cloud computing – Common technologies and techniques. URL: <https://www.iso.org/standard/74805.html> (дата звернення: 29.11.2022).
- [13] Горбачук В.М., Большаков В.М., Голоцуков Г.В., Пустовойт М.М. Сучасні виклики еволюції хмарних архітектур. *Інтелектуальні рішення - С* (29 вересня 2021 р.). В.С.Снитюк (ред.) Київ – Ужгород: КНУ імені Т.Шевченка, 2021. С. 40–43.
- [14] Abbott M.L., Fisher M.T. *The art of scalability: scalable web architecture, processes, and organizations for the modern enterprise*. 2nd edition. Addison Wesley Professional, 2015. 624 p.
- [15] Kleppmann M. *Designing data-intensive applications: the big ideas behind reliable, scalable, and maintainable systems*. O'Reilly Media, 2017. 611 p.
- [16] Atchison L. *Architecting for scale: high availability for your growing applications*. O'Reilly Media, 2016. 230 p.
- [17] Ozsu M.T., Valduriez P. *Principles of distributed database systems*. 3rd edition. Springer, 2011. 864 p.
- [18] ISO/IEC 18384-1:2016, Information technology – Reference Architecture for Service Oriented Architecture (SOA RA) – Part 1: Terminology and concepts for SOA. URL: <https://www.iso.org/standard/63104.html> (дата звернення: 29.11.2022).
- [19] Evans E. *Domain-driven design: tackling complexity in the heart of software*. Boston, MA: Addison-Wesley Professional, 2003. 560 p.
- [20] Millet S., Tune N. *Patterns, principles, and practices of domain-driven design*. Indianapolis, IN: Wrox, 2015. 800 p.
- [21] Bucchiarone A., Dragoni N., Dustdar S., Lago P., Mazzara M., Rivera V., Sadovykh A. *Microservices: science and engineering*. Springer International Publishing, 2020. 376 p.
- [22] Richardson C. *Microservices patterns: with examples in Java*. Manning Publications Co, 2018. 520 p.
- [23] Gammelgaard C.H. *Microservices in .NET Core: with examples in Nancy*. Manning Publications Co, 2017. 344 p.
- [24] Alshuqayran N., Ali N., Evans R. A Systematic Mapping Study in Microservice Architecture. *IEEE 9th International Conference on Service-Oriented Computing and Applications (SOCA)* (November 4–6, 2016, Macau, China). IEEE, 2016. P. 44–51.
- [25] Castro P., Ishakian V., Muthusamy V., Slominski A. The rise of serverless computing. *Communications of the ACM*. 2019. Vol. 62. No. 12. P. 44–54.
- [26] Eismann S., Scheuner J., van Eyk E., Schwinger M., Grohmann J., Herbst N., Abad C., Iosup A. Serverless applications: why, when, and how? *IEEE Software*. 2021. 38 (1). P. 32–39.
- [27] Taibi D., Spillner J., Wawruch K. Serverless computing – where are we now, and where are we heading? *IEEE Software*. 2021. 38 (1). P. 25–31.
- [28] Eismann S., Scheuner J., van Eyk E., Schwinger M., Grohmann J., Herbst N., Abad C., Iosup A. The State of Serverless Applications: Collection, Characterization, and Community Consensus. *IEEE Transactions on Software Engineering*. 2022. 48 (10). P. 4152–4166.
- [29] Jonas E., Khandelwal A., Krauth K., Schleier-Smith J., Pu Q., Yadwadkar N., Stoica I., Sreekanti V., Shankar V., Gonzalez J., Patterson D., Tsai C.-C., Carreira J., Popa R.A. *Cloud programming simplified: a Berkeley view on serverless computing*. Berkeley, CA: UC Berkeley, 2019. 33 p. URL: <https://arxiv.org/pdf/1902.03383.pdf> (дата звернення: 29.11.2022).
- [30] Asadullah A., Faik I., Kankanhalli A. Digital platforms: a review and future directions. *Proceedings of the 22nd Pacific Asia Conference on Information Systems (PACIS 2018)* (June 26–30, 2018, Yokohama, Japan). M.Hirano, M.D.Myers, K.Kijima, M.Tanabu, D.Senoo (eds.). 248. URL: <https://aisel.aisnet.org/pacis2018/248> (дата звернення: 29.11.2022).
- [31] Rütz M. DevOps: A Systematic Literature Review. Seminar paper, Wedel, Germany: Fachhochschule Wedel. *IT Management Seminar Paper*. 2019. Summer. 17 p.
- [32] DevOps. URL: <https://uk.wikipedia.org/wiki/DevOps> (дата звернення: 29.11.2022).
- [33] Gustavsson M., Ljungberg J. Platformization of a Cloud Service. *40th International Conference of Information Systems (ICIS)*, (December 15–18, 2019, Munich, Germany). H.Krcmar, J.Fedorowicz, W.F.Boh, J.M.Leimeister, S.Wattal (eds.). 7. URL: [https://aisel.aisnet.org/icis2019/innov\\_entre/innov\\_entre/7](https://aisel.aisnet.org/icis2019/innov_entre/innov_entre/7) (дата звернення: 29.11.2022).
- [34] Aviv I. The distributed ledger technology as development platform for distributed information systems. *International Conference on Intelligent Vision and Computing (ICIVC 2021)* (October 3–4, 2021, Sur University College, Oman). H.Sharma, V.K.Vyas, R.K.Pandey, M.Prasad (eds.). Springer, 2022. P. 344–355.
- [35] Bajaj D., Bharti U., Goel A., Gupta S. PaaS providers and their offerings *International Journal of Scientific & Technology Research*. 2020. 9 (02). P. 4009–4015.
- [36] Gupta B., Mittal P., Mufti T. Review on Amazon Web Service (AWS), Microsoft Azure & Google Cloud Platform (GCP) services. *Proceedings of the 2nd International Conference on ICT for Digital, Smart, and Sustainable Development (ICIDSSD 2020)* (February 27–28, 2020, Jamia Hamdard, New Delhi, India). M.A.Alam, R.Biswas, J.Ahmed, F.Siddiqui (eds.). URL: <http://dx.doi.org/10.4108/eai.27-2-2020.2303255> (дата звернення: 29.11.2022).

# Реалізація Асоціативної Пам'яті на ПЛІС

Володимир Грига  
кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки  
Прикарпатський національний університет імені Василя  
Стефаника,  
Івано-Франківськ, Україна  
v.dr\_2000@ukr.net

Степан Мельничук, Ірина Мануляк  
кафедра комп'ютерних систем і мереж  
Івано-Франківський національний технічний  
університет нафти і газу  
Івано-Франківськ, Україна  
stenni@ukr.net, manulyak-iryana@ukr.net

Богдан Бабій, Юрій Почанін  
кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки  
Прикарпатський національний університет імені Василя  
Стефаника,  
Івано-Франківськ, Україна  
bohdanbabiy15@gmail.com, lorksqwerty@ukr.net

Михайло Гуменицький  
кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки  
Прикарпатський національний університет імені Василя  
Стефаника,  
Івано-Франківськ, Україна  
It\_mychailo@ukr.net

## Implementation of Associative Memory on FPGA

Volodymyr Hryha  
Department of Computer Engineering and Electronics  
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University  
Ivano-Frankivsk, Ukraine  
v.dr\_2000@ukr.net

Stepan Melnychuk, Iryna Manuliak  
Department of Computer Systems and Networks,  
Ivano-Frankivsk national technical university of oil and gas  
Ivano-Frankivsk, Ukraine  
stenni@ukr.net, manulyak-iryana@ukr.net

Bohdan Babii, Yuriy Pochanin  
Department of Computer Engineering and Electronics  
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University  
Ivano-Frankivsk, Ukraine  
bohdanbabiy15@gmail.com, lorksqwerty@ukr.net

Mykhailo Humenitskyi  
Department of Computer Engineering and Electronics  
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University  
Ivano-Frankivsk, Ukraine  
It\_mychailo@ukr.net

*Анотація* — Описано структуру асоціативної пам'яті та алгоритм її функціонування. Проведено огляд відомих реалізацій асоціативної пам'яті на програмовних логічних інтегральних схемах та визначено галузі їх застосування. Розроблено структуру асоціативної пам'яті, яка має глибину 4096 комірок розрядністю 30 бітів з використанням мови опису апаратних засобів VHDL. Виконано синтез розробленої асоціативної пам'яті на ПЛІС сімейства Artix-7 з використанням САПР Vivado Design Suite.

*Abstract*— The structure of associative memory and the algorithm of its functioning are described. An overview of known implementations of associative memory on software logic integrated circuits was conducted and the fields of their application were determined. An associative memory structure has been developed, which has a depth of 4096 cells of 30 bits using the hardware description language VHDL. The synthesis of the developed associative memory on the Artix-7 family FPGA was performed using Vivado Design Suite CAD.

*Ключові слова*— асоціативна пам'ять; комірка; ПЛІС; теги; компаранд; маска.

*Keywords* — associative memory; cell; FPGA; tags; comparand; mask.

### I. ВСТУП

В більшості пристроїв зберігання інформації звертатися до даних можна тільки через конкретну адресу [1,2]. А саме вона є головною перепорою в створенні сучасних високопродуктивних і складних інформаційних систем.

Існує великий клас задач, пов'язаний з пошуком, оновленням, сортуванням і іншими операціями обробки даних, програмування котрих для машин з асоціативною пам'яттю незрівнянно простіше і ефективніше, ніж для машин з матричною пам'яттю [1-3]. Природний паралелізм, який має місце при виконанні подібних операцій, відкриває широкі можливості підвищення швидкодії обчислення.

Проблема швидкого доступу до даних на машинах з адресною пам'яттю досі не вирішена. При роботі з адресною пам'яттю важко досягти підвищення швидкості доступу на апаратному рівні, так як при звертанні до пам'яті завжди необхідно вказувати адресу даних, і за один цикл можна звернутися тільки до однієї комірки. В даний час більш вантажу по прискоренню доступу лягає на програмне забезпечення, котре фактично утворює віртуальну асоціативну пам'ять на машинах з адресною пам'яттю, що є не досить ефективно. Суттєво підвищити швидкість доступу до даних можна, коли увімкнути до складу комп'ютера пам'ять з адресацією по змісту [4].

Застосування асоціативної пам'яті дозволяє суттєво підвищити швидкість вибірки і спростити доступ до даних. Так як при вибірці проходить ряд логічних операцій з відбору даних, то зникає необхідність в спеціальних програмних конструкціях з прискорення доступу, а саме, сортуванню, хешуванню і таке інше. При цьому індекси потрібні будуть тільки для забезпечення унікальності записів і задання зв'язку між таблицями даних [5].

Асоціативна пам'ять часто використовується в мережевих пристроях для прискорення передачі баз даних та операцій із таблицями маршрутизації. Цей тип асоціативної пам'яті також використовується у кеш-пам'яті.

Асоціативна пам'ять набагато швидша, ніж оперативна пам'ять у програмах пошуку даних. Однак у асоціативної пам'яті є недоліки щодо вартості. На відміну від мікросхеми оперативної пам'яті, яка має прості комірки пам'яті, кожен окремий біт пам'яті в повністю паралельній асоціативній пам'яті повинен мати власну пов'язану схему порівняння для виявлення відповідності між збереженим бітом і вхідним бітом. Крім того, результати збігу з кожної комірки в слові даних повинні бути об'єднані, щоб отримати повний сигнал збігу слова даних. Додаткові схеми збільшують фізичні розміри та виробничу вартість мікросхеми асоціативної пам'яті.

Метою даної публікації є проектування асоціативної пам'яті з швидким записом і читанням розміром 4096x30, тобто глибина пам'яті складає 4096 комірок ( $2^{12}$ ), а ширина (розрядність) 30 бітів.

## II. СТРУКТУРА АСОЦІАТИВНОЇ ПАМ'ЯТІ ТА АЛГОРИТМ ЇЇ ФУНКЦІОНУВАННЯ

Асоціативна пам'ять складається з деякої кількості комірок де зберігаються дані. Кількість комірок називається глибиною асоціативної пам'яті. Кожна комірка може зберігати слово з деякою кількістю двійкових розрядів (ширина слова). На рис. 1. показана загальна структура асоціативної пам'яті. Кожна така комірка АП може зберігати дані та порівнювати їх з компарандом паралельно з іншими комірками. Інформація і команди надходять від пристрою керування до кожної комірки пам'яті паралельно [1]. Наприклад, пристрій керування може надіслати коміркам команду для порівняння інформації, яка в них зберігається з компарандом.

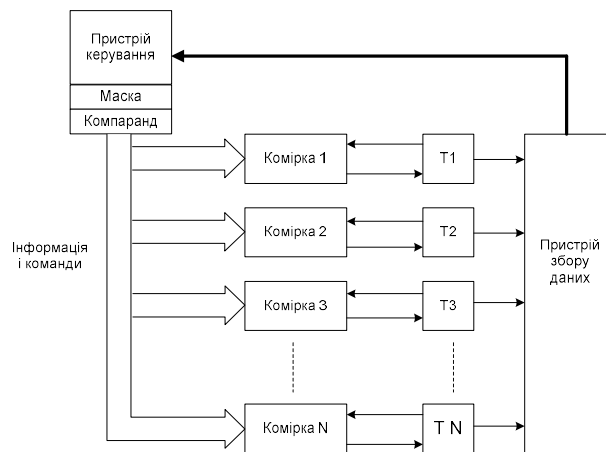


Рис.1. Загальна структура асоціативної пам'яті.

Кожна комірка пов'язана з керуючим пристроєм теговим розрядом  $T_i$ . Сукупність тегових розрядів називається пам'яттю відповіді (реакції). Перед початком порівняння керуючий пристрій надсилає команду встановлення всіх тегових розрядів в "1". Коли керуючий пристрій формує команду порівняння то кожна комірка в якій міститься слово, що не співпадає з компарандом, формує сигнал, який викликає скид відповідного тегового розряду в "0". Після виконання даної команди встановленими в "1" залишаться тільки ті розряди, які відповідають коміркам, вмістиме яких, співпало з компарандом.

В керуючому пристрої є два регістри: компаранда і маски. При виконанні простого пошуку, регістр компаранда використовується для зберігання слова, яке потрібно знайти. Але бувають випадки, коли не потрібне співпадіння слова з усіма розрядами компаранда, а наприклад співпадіння тільки перших 5-и розрядів слова. В таких випадках використовується регістр маски. В регістрі маски, одиниці встановлені в тих розрядах, з якими необхідно виконати порівняння, решта розрядів скинуті в нуль. Наприклад, якщо використовується тільки перші 5 розрядів 8-розрядного слова то використовується наступна маска : 11111000.

## III. ОГЛЯД ВІДОМИХ РЕАЛІЗАЦІЙ АП НА ПЛІС

Асоціативна пам'ять може бути спроектована, як окрема мікросхема на основі НВІС або реалізована на основі ПЛІС, як модуль пам'яті деякої системи побудованої в одному кристалі SOC (System on Chip). Враховуючи особливості проектування та виготовлення НВІС реалізація АП або інших вузлів на основі НВІС стає економічно виправданою лише при серійному, конвеєрному виробництві. Спроектована на НВІС асоціативна пам'ять має високу продуктивність та незначну вартість при серійному виробництві [6].

Найпростіший приклад асоціативної пам'яті, яку можна виконати на ПЛІС, показаний на рисунку 2. Це базова модель, призначена тільки для читання, еквівалентна декодеру для кожного слова, яке подається на вхід. Основним елементом є блок порівняння, який виконаний

як примітив "І" з необов'язковим інвертором по кожному входу.

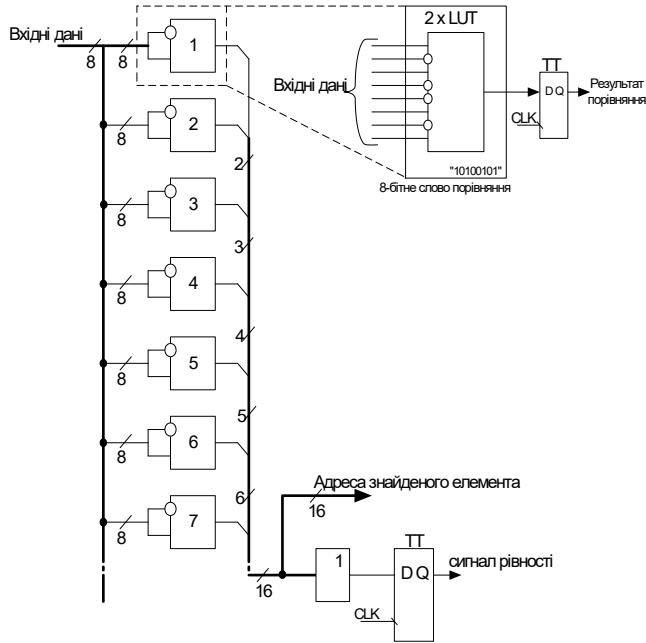


Рис.2. Базова модель асоціативної пам'яті.

На сьогоднішній день на ринку програмованих логічних інтегральних мікросхем працюють багато виробників, але основні з них це Xilinx та Intel (Altera). Ці компанії мають найбільші обсяги по виробництву ПЛІС, та найпотужніші проекти для різних задач в галузі обчислювальних систем. Тому для поставленого завдання в даній роботі потрібно проводити аналіз проектів асоціативної пам'яті, реалізованої на ПЛІС вказаних виробників.

Асоціативна пам'ять, в залежності від поставленої задачі до проекту, реалізується на різних сімействах ПЛІС компанії Altera. Кожен пристрій може утворювати блоки асоціативної пам'яті розміром 32x32 на основі вбудованих системних блоків (ESB). На рисунку 3 показана блок-схема асоціативної пам'яті на пристроях Altera.

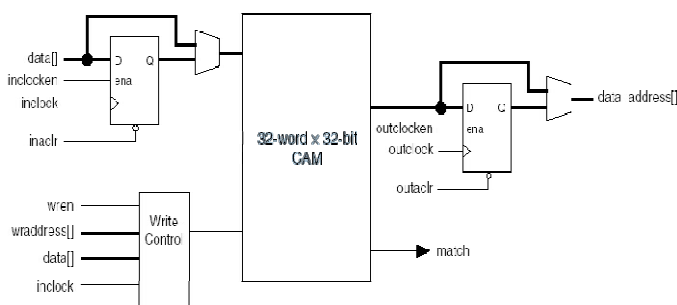


Рис. 3. Виконання асоціативної пам'яті на пристроях Intel (Altera).

Дані в пам'яті можуть бути попередньо записані під час конфігурації проекту або вже в робочому режимі пристрою. Для запису слова даних потрібно два цикли.

Читання з пам'яті, яка виконується на пристроях Altera, може виконуватись в трьох режимах: режим одного порівняння, режим множинного порівняння, режим швидкого множинного порівняння. В усіх режимах результатом на виході буде кодована (або нековдована) адреса комірки пам'яті, де зберігаються дані. Режим одного порівняння кращий для проектів, де дані не повторюються в пам'яті; вивід результату виконується за один цикл.

Кожний вбудований системний блок пристроїв Altera утворює 1 Кбіт блоку асоціативної пам'яті. Для утворення більшої глибини і ширини пам'яті потрібно об'єднувати ці блоки за допомогою вбудованих логічних елементів.

#### IV. Розроблення АП

В основі побудови асоціативної пам'яті з швидким записом та читанням оптимізованої на велику глибину та ширину для ПЛІС сімейства Virtex фірми Xilinx лежить принцип побудови на основі 2-х портової блокової пам'яті RAMB16\_S1\_S18 з конфігурацією портів, яка зображена нижче на рис. 4.

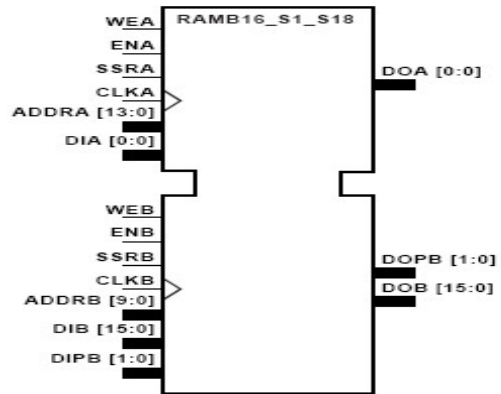


Рис. 4. Модуль блокової пам'яті RAMB16\_S1\_S18.

Порт А сконфігурований, як пам'ять розмірністю 16384x1, тобто з 14-и розрядною шиною адрес та однією лінією шини даних. Порт В сконфігурований, як пам'ять розмірністю 1024x16, тобто з 10-и розрядною шиною адрес та 16-и розрядною шиною даних. Порт А використовується для запису даних, а порт В використовується для порівняння даних. Тобто використовуючи одну таку блокову RAM можна реалізувати асоціативну пам'ять розмірністю 16x10.

Під час запису дані записуються в комірку асоціативної пам'яті, яка визначається 12-розрядною адресою при встановленому сигналі дозволу запису. Під час читання вхідні дані одночасно порівнюються з вмістимим всіх комірок пам'яті і якщо відбувся збіг то на виході пам'яті сформується сигнал збігу та адреса комірки, де збіглися дані. Також встановиться в одиницю сигнал коректності адреси збігу. Якщо збіг даних відбувся більше ніж в одній комірці то сигнал коректності адреси встановиться в нуль. Тобто адреса буде вважатися неправильною.

Асоціативна пам'ять з швидким записом та читанням побудована на основі блокової пам'яті має малу розмірність, а незначне збільшення розмірності веде до значного збільшення кількості модулів блокової пам'яті. Для вирішення цієї проблеми можна розбити 12-и розрядну адресу, на 3-и адресні простори, як показано нижче на рис. 5. Під час запису в таку пам'ять дані будуть паралельно записуватись в кожний з 3-ох адресних просторів, використовуючи 4-ох розрядну адресу. Кожний адресний простір може бути побудований на основі однієї матриці 1024x16 або декількох таких матриць в залежності від ширини слова. Для ширини слова 30 біт потрібно використати 3-и такі матриці. Кожна матриця реалізується на основі однієї блокової пам'яті RAMB16\_S1\_S18. Тобто для запису даних в таку матрицю потрібно вказати індекс рядка – значення 10-и розрядних даних, які потрібно записати та індекс стовпця – адресу комірки. Тоді в відповідну комірку запишеться одиниця. Наприклад, значення даних «7» записується в комірку за адресою «2». Тоді відповідний біт в матриці встановиться в «1». Нехай для порівняння на вхід матриці буде подаватись значення даних «7», тоді на виході матриці сформується 16-и розрядна адреса, яка буде мати значення «000000000000100». Тобто це означає, що відбувся збіг в комірці за адресою «2». Тобто теоретично в таку комірку можна записати всі можливі комбінації 10-и розрядних даних.

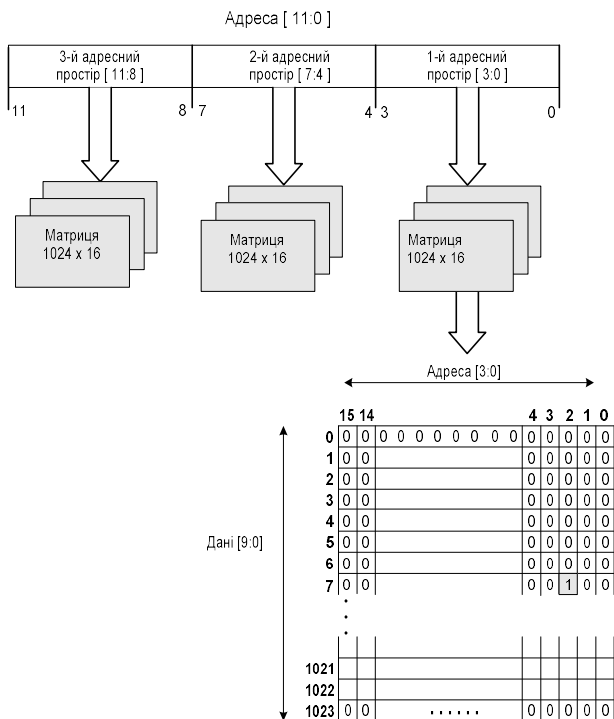


Рис. 5. Побудова АП розмірністю 4096x30 на основі блокової RAM.

Враховуючи такий підхід побудови АП з великою розмірністю на основі блокової RAM можна побудувати загальну структуру пам'яті розмірністю 4096x30, яка зображена на рис. 6.

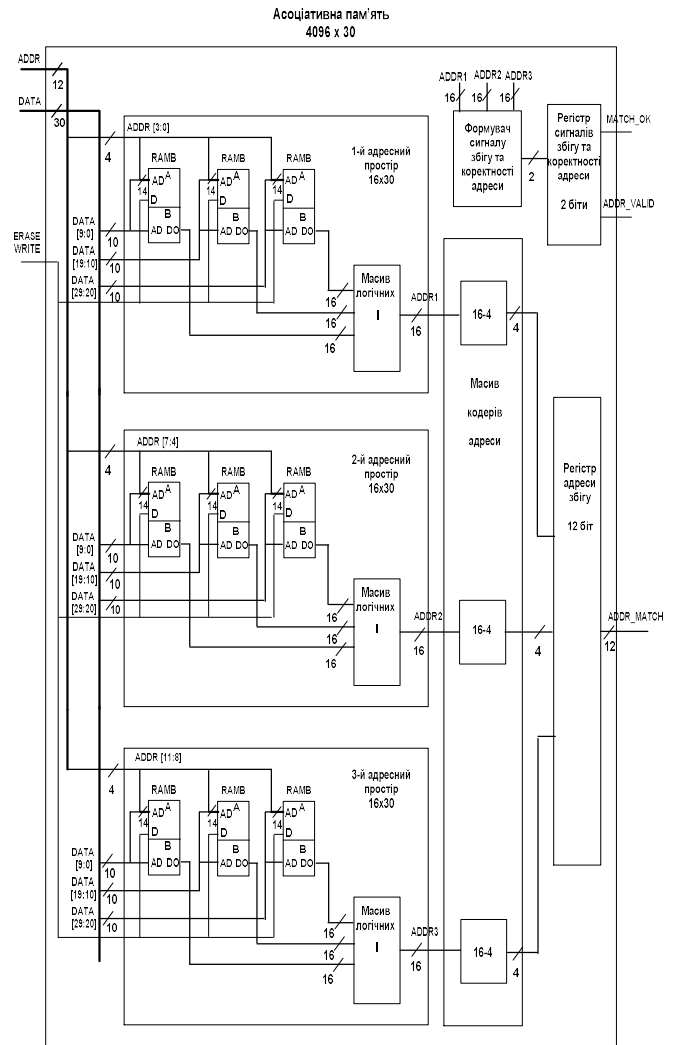


Рис. 6. Загальна структура асоціативної пам'яті розмірністю 4096x30.

Асоціативна пам'ять представлена на рис. 6 містить: 3-ох адресний простір, кожен з яких містить 3 блоки 2-х портової пам'яті (RAMB) та масив логічних елементів "І"; масив кодерів адрес, який включає три кодери на 16 входів та 4 виходи; формувача сигналу збігу та коректності адреси на який подаються три 16-розрядні адреси (ADDR1, ADDR2, ADDR3); 12-розрядного регістра збігу результату.

## V. СИНТЕЗ АП НА ПЛІС

Процес синтезу модуля асоціативної пам'яті Module\_Cam\_4096\_30 на ПЛІС виконано в системі автоматизованого проектування Vivado Design Suite фірми Xilinx.

В результаті проведеного синтезу створеного проекту отримано схему модуля асоціативної пам'яті Module\_Cam\_4096\_30 на рівні регістрових передач (RTL-схема) фрагмент якої наведено на рис. 6.

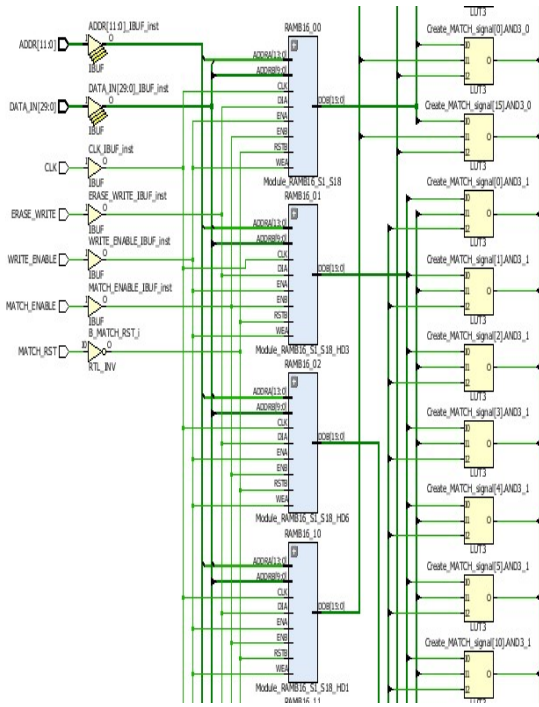


Рис. 6. Фрагмент RTL-схеми модуля асоціативної пам'яті Module\_Cam\_4096\_30.

Дана схема складається із 9 елементів блокової пам'яті RAMB, 49 елементів LUT та вхідних/вихідних буферів, які розміщені на входах та виходах модуля.

На рис. 7 показано фрагмент топології кристалу, з розведеними комунікаційними зв'язками та спеціальними блоками реалізації багатовходових логічних функцій (LUT), імplementованої схеми асоціативної пам'яті на ПЛІС сімейства Artix7 [7].

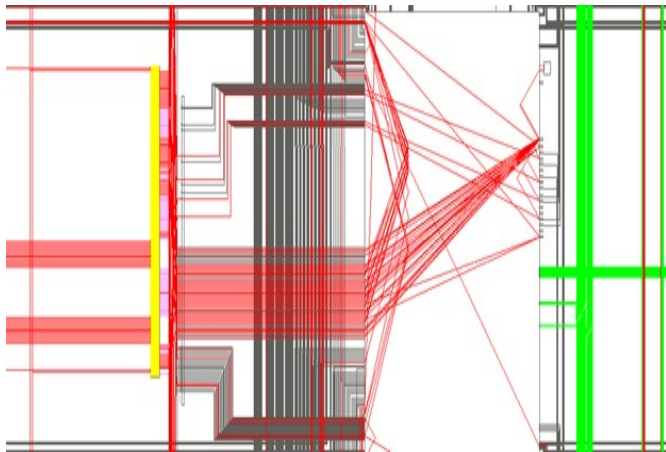


Рис. 7. Фрагмент топології кристалу імplementованої схеми асоціативної пам'яті на ПЛІС сімейства Artix-7.

Реалізована асоціативна пам'ять при синтезі на ПЛІС сімейства Artix7 має тактову частоту 185 МГц і використовує 48 базових таблиць перетворення (LUT) та має 143 входи/виходи.

## VI. ВИСНОВКИ

При аналізі сучасного стану розробки пристроїв асоціативної пам'яті встановлено, що асоціативна пам'ять коштує в 1,5 рази дорожче від матричної (адресної) пам'яті, але сучасні технології постійно зменшують вартість виготовлення одного вентиля, тому ціна асоціативної пам'яті зменшується, а також розширюється коло задач, рішення яких перекладають на асоціативну пам'ять. Виконано огляд відомих реалізацій АП на ПЛІС та встановлено їх переваги у порівнянні з НВІС. Розроблено VHDL-модель АП розмірністю 4096 x 30. Проведено синтез розробленої АП на ПЛІС сімейства Artix-7 фірми Xilinx та отримано системні характеристики її функціонування.

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Мельник А.О. Архітектура комп'ютера, Наукове видання. – Луцьк: Волинська обласна друкарня, 2008. – 470 с.
- [2] А. Мельник Пам'ять з впорядкованим доступом: Монографія – Львів: Видавництво НУ “Львівська політехніка”, 2014. – 296 с.
- [3] Спеціалізовані комп'ютерні технології в інформатиці / за загальною редакцією Я.М. Николайчука. – Тернопіль: Видавництво Бескиди, 2017. – 919 с.
- [4] Content-addressable memory [Електронний ресурс] / Вікіпедія – вільна енциклопедія. Режим доступу: [https://en.wikipedia.org/wiki/Content-addressable\\_memory](https://en.wikipedia.org/wiki/Content-addressable_memory).
- [5] Computer data storage [Електронний ресурс] / Вікіпедія – вільна енциклопедія. Режим доступу: [https://en.wikipedia.org/wiki/Computer\\_data\\_storage](https://en.wikipedia.org/wiki/Computer_data_storage).
- [6] Binary CAM Search LogiCORE IP Product Guide (PG317) [Електронний ресурс] / AMD Xilinx Documentation Portal. Режим доступу: <https://docs.xilinx.com/r/en-US/pg317-bcam/Introduction>.
- [7] Artix-7 FPGA – AMD-Xilinx [Електронний ресурс] / Режим доступу: <https://www.digikey.bg/en/product-highlight/x/xilinx/artix-7-fpga>.

# Лазерний акселерометр

Панасюк Юрій

відділ № 265 математичних проблем прикладної  
інформатики  
Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН  
України,  
Київ, Україна  
uranasuk265@mail.ru

Гульчак Ольга

відділ № 265 математичних проблем прикладної  
інформатики  
Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН  
України.  
Київ, Україна  
olga-gulchak@ukr.net

Тетяна Чоботок

відділ №265 математичних проблем прикладної  
інформатики  
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
tatiana110b@gmail.com

Сергій Іовов

відділ №265 математичних проблем прикладної  
інформатики  
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
5264359@mail.ru

## Laser accelerometer

Yuri Panasyuk

dept. №265 of Mathematical Problems of Applied  
Informatics  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the National  
Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
askoval@yandex.ua

Olga Gulchak

dept. №265 of Mathematical Problems of Applied  
Informatics  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the National  
Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
olga-gulchak@ukr.net

Tetyana Chobotok

dept. №265 of Mathematical Problems of Applied  
Informatics  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the National  
Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
tatiana110b@gmail.com

Sergij Iovov

dept. №265 of Mathematical Problems of Applied  
Informatics  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the National  
Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
5264359@mail.ru

*Анотація*—Авторами пропонується пристрій, що відноситься до виміральної техніки, зокрема до вимірювання параметрів руху, а саме до лазерних акселерометрів, призначених для вимірювання прискорення руху транспортних засобів, в тому числі мобільних роботів різного базування: наземних, морських і встановлених на безпілотних літальних апаратах.

*Abstract*—The authors propose a device related to measuring technology, in particular to the measurement of movement parameters, namely to laser accelerometers designed to measure the acceleration of the movement of vehicles, including mobile robots of various bases: land, sea and installed on unmanned aerial vehicles.

*Ключові слова* — автоматизація; вимірвальна техніка, прискорення руху; параметри руху, транспортні засоби

*Keywords*— automation; measurement technique, movement acceleration; traffic parameters, vehicle

### I. ВСТУП

Точне вимірювання прискорення в процесі руху транспортних засобів – актуальне проблема. Вирішення її дає можливість (шляхом інтегрування за часом руху) визначити як швидкість, так і пройдений шлях, що дуже важливо в разі пересування по заданій траєкторії.

У доповіді авторами запропоновано вимірювальний пристрій, що відноситься, зокрема, до вимірювання параметрів руху, а саме до лазерних акселерометрів, призначених для вимірювання прискорення руху транспортних засобів. Пристрій може бути використано в тому числі у конструкції мобільних роботів різного



базування: наземного, морського та повітряного, наприклад, встановлених на БПЛА.

Існує багато різних типів акселерометрів, заснованих на різних фізичних явищах. Вони мають свої переваги та недоліки. Так, наприклад, широке поширення отримали п'єзоелектричні акселерометри. До числа їхніх переваг відноситься компактність, широкий діапазон вимірюваних прискорень, мале енергоспоживання. Головний їх недолік - вони не можуть бути використані при високих температурах навколишнього середовища, що перевищують точку Кюрі п'єзоелектричних матеріалів. Також вони високочутливі до електричних шумів. Використовуються також електростатичні акселерометри, акселерометри маятникового типу, акселерометри на ПАР-структурах. Вони всі також чутливі до електричних шумів. Відомі оптичні акселерометри волоконного типу, але вони все відрізняються великим тепловим дрейфом [1,2]

Для вимірювання прискорень рухомих об'єктів відоме використання лазерного пристрою, що містить внутрірезонаторний чутливий елемент з ізотропного матеріалу з прикріпленою до нього контрольної масою.

Цей пристрій має значні похибки і обмежений діапазон вимірювань через застосування двухамерної конструкції з оптичною перегородкою між камерами. Також цей пристрій не реагує на знак прискорення [3].

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Авторами доповіді запропоновано технічне рішення оптичного лазерного акселерометру, що позбавлене від вказаних вище недоліків.

Пропоноване технічне рішення засноване на ефекті зміни відстані між світловіддзеркалюючими поверхнями близько розташованих призм, і пов'язаний з цим зміні коефіцієнту пропускання оптичною системою акселерометру, що пропонується, оптичного випромінювання лазера. Причому відстань  $d$  при впливі прискорення може змінюватися від  $d = \lambda$  до  $d = 0$  (де  $\lambda$  - довжина хвилі випромінювання лазера), а коефіцієнт пропускання буде змінюватися від 0 до 100%. Випромінювання лазера проходить через повітряні прошарки між призмами і реєструється фотоприймачем ФП2 (рис.1), при цьому відбите випромінювання несе таку ж інформацію про величину повітряного зазору. Тому в реальному приладі можна використовувати один фотоприймач на вибір - або фотоприймач ФП1, або фотоприймач ФП2. Однак використання обох дає можливість підвищити точність за рахунок усереднення результатів.

Але оскільки потужність випромінювання лазера може мати флуктуації, то для контролю передбачено ще один фотоприймач (позначено на рис.1 - ФП3), який отримує частину випромінювання, відбитого від напівпрозорого дзеркала (позначено на рис.1 - ППЗ).

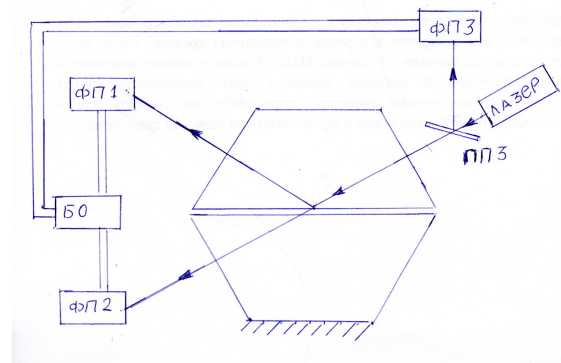


Рис.1

Сигнали від усіх фотоприймачів потрапляють в блок обробки інформації (позначено на рис.2 - БО).

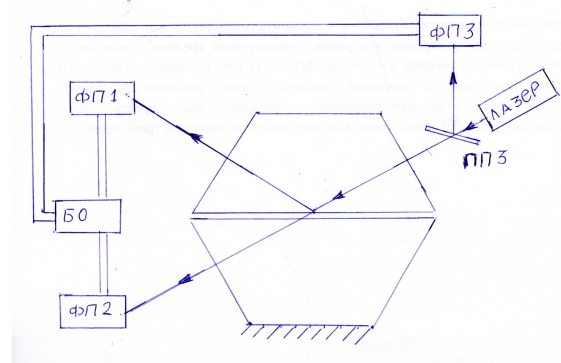


Рис.2

Залежність коефіцієнту пропускання через блок з двох близько розташованих призм від величини зазору між ними добре відома [4]. Хоча ця залежність трохи відрізняється від лінійної, але це можна врахувати в програмному пристрої блоку обробки інформації (на рис.1 позначено - БО). Одна з призм, наприклад, нижня закріплена на підставі жорстко, а друга скріплена з гнучкою мембраною, на яку тисне інерційна маса (на рис.2 - це кулька), яка має прискорення. Робочий діапазон обмежує величина зазору  $d = \lambda$ . Тому бажано використовувати лазери ближнього діапазону інфрачервоного випромінювання. При цьому потрібно врахувати, що більшість марок оптичного скла пропускають світло до довжин хвиль  $\lambda = 2,5$  мкм. Після того, як рухома призма стикнеться з нерухомою, можливість вимірювати прискорення зникає. При необхідності проблему розширення меж вимірювання можна вирішити, використавши другу аналогічну конструкцію, але з меншою інерційною масою. Обов'язковою умовою є невелике перекриття робочого діапазону обох конструкцій - кінець першої з початком роботи другої.

Описана конструкція дозволяє вимірювати прискорення лише в одному напрямку, яке зазначено на рис.2. Але, в принципі, зменшивши початковий зазор до

величини  $d = \lambda / 2$ , можна вимірювати прискорення і в протилежному напрямку.

Пропонуються такі заходи, що деталізують конструктивні особливості та технологію виготовлення: оптична частина пристрою виготовляється з одного матеріалу, а саме скла (бажано кварцового) і складається з двох призми: нерухомого віддзеркалювача світла 2 і призми з рухомим центральним елементом - призмою 1 (рис.3).

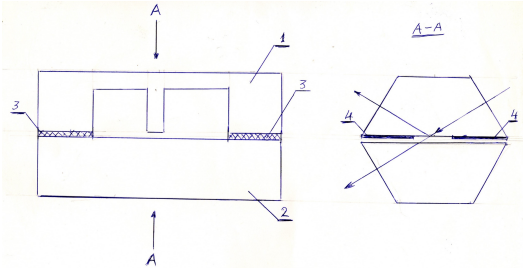


Рис.3

Причому обидві призми виготовляються з однакових заготовок з трапецією в перерізі. На заготовках обов'язково повинні бути зняті фаски до 1 мм. Потім в призмі, що містить рухливий елемент робляться глибокі проточки, симетричні відносно центральної робочої зони і тим самим утворюється гнучка мембрана, яка є частиною монолітної скляної деталі. На опорні поверхні цієї призми наносяться (наприклад, напыленням у вакуумі) плівки потрібної товщини  $\lambda \geq d \geq \frac{1}{2} \lambda$  (позначені на рис.3 цифрою 3).

Найкращим матеріалом для плівки є двоокис кремнію  $\text{SiO}_2$  (за хімічним складом це еквівалентно кварцового скла). Для захисту робочої поверхні рухомої частини цієї призми поза робочої зони наносяться тонкі плівки 4 (див. Фіг.3), товщина яких багато менше довжини хвилі  $\lambda$

(наприклад, 0,01 мкм). На оптичних властивостях системи (пропускання випромінювання) це практично не позначиться, але робочу частину буде захищено від випадкових ударів і «схлопування». Температура і дрейф теж зменшуються, оскільки вся конструкція - це моноліт, виготовлений зі скла «після склейки призми». Склеювання проводиться по контуру опорних поверхонь шляхом нанесення клейового шву в ямку, утворену фасками. Юстирування проводиться один раз в цехових умовах, і збірка закріплюється за допомогою клею. Для обліку флуктуацій інтенсивності випромінювання передбачено фотоприймач ФПЗ (див. рис.1).

### III. ВИСНОВОК

На запропоноване у доповіді технічне рішення стосовно конструкції лазерного акселерометра було отримано патент №126219 «Оптичний лазерний акселерометр» [5]. Пристрій призначено для вимірювання прискорення руху транспортних засобів, наприклад, мобільних роботів, безпілотних літальних апаратів, транспорту наземного та морського призначення. Конструкція передбачає за необхідністю можливість розширення меж вимірювання. Крім основного застосування (акселерометр), описаний пристрій можна адаптувати для вимірювання, зокрема, сили тиску та в інших цілях.

### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Авторське свідоцтво СРСР №1163274 клас G 01 P 15/08 від 1982 року
- [2] Патент SU №1780020 A1 клас G 01 P 15/08
- [3] Патент США P 3800594, кл. G 01 P 15/08 02.04.74
- [4] Оптико -механічна промисловість, ГОІ, №3, стор.19-23.
- [5] Патент на винахід №126219 «Оптичний лазерний акселерометр», опубл. 31.08.2022. Автор Панасюк Ю.Я.

# Інформаційна технологія автоматизації управління збором та транспортуванням відходів у місті.

Іван Варава

каф. інженерії програмного забезпечення в енергетиці  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»  
Київ, Україна  
ivan.varava@ukr.net

Анна Остапенко

відділ № 265 математичних проблем прикладної інформатики  
Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
pisarenkojv@gmail.com

Надія Чумакова

відділ № 265 математичних проблем прикладної інформатики  
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
bronata@ukr.net

Володимир Малачинський

відділ № 265 математичних проблем прикладної інформатики  
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
vjmalachinskii@gmail.com

## Information technology for automating management of garbage collection and transportation in the city.

Ivan Varava

cat. Software Engineering for Power Industry  
National Technical University of Ukraine  
“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”  
Kyiv, Ukraine  
ivan.varava@ukr.net

Anna Ostapenko

dept. №265 of Mathematical Problems of Applied Informatics  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
pisarenkojv@gmail.com

Nadiia Chumakova

dept. №265 of Mathematical Problems of Applied Informatics  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
bronata@ukr.net

Volodymyr Malachynskiy

dept. №265 of Mathematical Problems of Applied Informatics  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
vjmalachinskii@gmail.com

*Анотація*— Запропонована технологія враховує сучасну українську специфіку: менталітет, стан економіки. Об'єктом автоматизації в даному випадку виступає система утилізації відходів в умовах міста. Описано етапи: збір відходів та їх транспортування до міста переробки. Пропонована технологія реалізує поєднання автоматизації на етапі кожного процесу та системи утилізації в цілому з використанням інтелектуальних технологій. Розроблене програмне забезпечення (ПЗ) здійснює керування системою та

складається з онлайн центру керування; віддаленого серверу по обробці даних; бази даних; сайта зі статистичними даними.  
*Abstract*—The proposed technology takes into account modern Ukrainian specifics: mentality, state of the economy. The object of automation in this case is the waste disposal system in the city. The stages are described: collection of waste and its transportation to the recycling city. The proposed technology implements a combination of automation at the stage of each process and the disposal system as a whole with the use of intelligent technologies.

**The developed software (software) manages the system and consists of an online control center; remote data processing server; databases; website with statistical data.**

**Ключові слова— інтелектуальні системи; утилізація сміття; автоматизація; збор відходів, сортування сміття**

**Keywords— intelligent systems; garbage disposal; automation; waste collection, garbage sorting**

## I. ВСТУП

Постійний розвиток міст як результат має збільшення населення, а, отже, і відходів, яке воно залишає кожного дня. До цього додається поступове збільшення завантаженості транспортної інфраструктури міста, тому планування маршрутів та розпорядку денного все складніше і складніше розробити без використання інтелектуальних систем.

Україна наразі має дуже застарілу систему збору відходів, та майже не має системи їх сортування. В порівнянні з західними державами існує дуже велике відставання. Але за останні роки було затверджено декілька законодавчих актів, що зобов'язують переходити на більш сучасні системи збору та сортування сміття. Також у світі набирає популярності так званий Інтернет речей (IoT) [1, 2], що може допомогти при вирішенні даної проблеми. Отже постає питання підвищення ефективності комунальних підприємств щодо збору та сортування сміття і зниження матеріальних та часових витрат на їх операції.

## II. ОГЛЯД ПРОБЛЕМИ ТА ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Оптимізація системи утилізації сміття – не нова проблема. Сполучені Штати Америки, Канада та європейські країни вже десятки років практикують різні способи вирішення питання нескінченного накопичення відходів. Німеччина має на своєму рахунку ще декілька нестандартних підходів. Одним з них є реєстрація та сортування сміття на місці. Цей метод підходить для місць великого скупчення людей. Наприклад, на Потсдамську площу щодня приходять до 100 тисяч людей, які залишають до 8 тонн сміття. До речі, великі міста, як Київ, Харків чи Львів, створюють приблизно 250-400 тисяч тонн відходів на рік.

Швеція вже давно має розгалужену систему підземних повітропроводів для відходів. До них підключена більшість сміттєвих контейнерів. Повітропроводи ведуть до центральних контейнерів, які збирають в собі сміття з певної області, пресують та відправляють надалі до переробних станцій та спалювачів.

Сполучені Штати Америки вже давно почали запровадження системи “розумного” міста. Найбільші міста вже мають систему розумного збору сміття [3].

Україна також наразі має деякі рішення цієї проблеми. З 1 вересня 2018 року в Україні було унормовано сучасні способи збору сміття, якими є підземний та вакуумний. Підземні контейнери значно зменшують прояв неприємного запаху та покращують зовнішній вигляд міст. Також вони є набагато більшими, тому є дуже корисними у місцях великого скупчення людей.

Попри те, що всі вищезазначені рішення використовують передові технології та розробки, вони все ж таки мають певні недоліки. Необхідно розглянути їх з урахуванням умов, які зараз існують в Україні, для побудови коректної моделі запропонованого рішення.

Багато країн використовують розробки повітропроводів, але наразі їх побудова є доречною лише в майбутніх проектах розширення міст або житлових комплексів. Адже впровадження цієї системи у вже існуючі райони потребує перекопування великих площ для встановлення труб для транспортування сміття. Це може на довгий час погіршити інфраструктуру в містах та селищах. Також при попаданні великогабаритних відходів, повітропровід може забитися, що спричинить повторне перекопування площ для очищення труб, або, для запобігання цьому, потрібно будувати великі підземні комплекси, в яких будуть міститися основні та резервні шляхи, які можна реалізовувати окремо. Але це дуже недешеве рішення, і взагалі один з головних недоліків цієї системи є дуже велика сума початкових інвестицій у дане рішення. Тому її доречно встановлювати лише у густонаселені регіони. До того ж для побудови і обслуговування потрібна висококваліфікована робоча сила. Зважаючи на принцип роботи повітропроводу, він є не дуже зручним для таких видів сміття як папір, скло та рідкі відходи.

Метою розробленої та запропонованої авторами інформаційної технології є забезпечення автоматизації та оптимізації процесу керування обліком, збором, транспортуванням до пунктів переробки відходів у місті, завдяки чому прогнозується підвищення ефективності комунальних підприємств щодо збору та сортування сміття і зниження матеріальних та часових витрат на ці операції.

## III. ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ СИСТЕМИ ЗБОРУ ТА ТРАНСПОРТУВАННЯ ВІДХОДІВ

Запропоновано новий підхід до вирішення проблеми утилізації сміття у масштабах населеного пункту. Він враховує теперішній стан економіки України та менталітету населення та заснований на підставі оптимізації та автоматизації вже існуючої у місті системи на відміну від впровадження багатозатратних новітніх систем, які безумовно є прогресивними, але на цей час недоречними для реалій України, оскільки викликають необхідність докорінних змін: у інфраструктурі міст (що займає багато часу та коштів) та у менталітеті населення, який потребує звички відповідально ставитись до роздільного збору сміття. Отже, головними критеріями впровадження системи є дешевизна та доречність в умовах сучасного становища та менталітету населення.

Авторами прийняте наступне рішення: з метою уникнення великої суми початкових інвестицій для впровадження технології оптимізувати вже існуючу систему утилізації відходів шляхом розробки та впровадження програмно-апаратних засобів. Що стосується прийому відходів, то контейнери будуть застосовуватись для всіх видів відходів одночасно, при цьому на верхню частину кожного кріпиться маленький

датчик наповненості, він спрямований у сторону сміття, і з певною частотою вимірює наповненість контейнера.

Транспортування відходів передбачається здійснювати сміттевозами комунальних служб, керованими за допомогою програмного забезпечення інтелектуальної системи збору відходів, яке виконує пошук найкоротшого шляху між заповненими контейнерами, динамічну перебудову маршруту за необхідності додавання певного контейнеру до існуючого маршруту, збір і представлення статистичних даних

Програмне забезпечення складається з:

- онлайн центру керування;
- віддаленого серверу по обробці даних;
- бази даних;
- сайт зі статистичними даними.

Онлайн центр керування представлений у вигляді сайту. Він виконує наступні функції:

- перегляд карти кожного зареєстрованого міста з позначенням усіх точок збору сміття, комунальних служб та сортувальних станцій;
- перегляд стану наповненості кожного контейнера;
- реєстрація нових комунальних служб та сортувальних станцій;
- розподілення певних районів між комунальними службами та сортувальними станціями;
- знаходження найшвидшого шляху, якщо початковою точкою є комунальна служба, а кінцевою – сортувальна станція, – з урахуванням завантаженості доріг та економії пального;
- надання можливості динамічно змінювати маршрут певного сміттевоза при раптовому заповненні контейнера;
- збирання статистичної інформації з усіх транспортувань.

Віддалений сервер по обробці даних буде:

- приймати сигнали від кожного датчика та сигналізувати онлайн центр керування при наповненості контейнера;
- віддавати всю необхідну інформацію з бази даних до центру керування та навпаки.

Сайт зі статистичними даними, як передбачено, буде доступний кожному громадянину міста, якого зареєстровано в даній системі.

Тут буде показана така інформація, як кількість комунальних служб та інформація по ним, середня швидкість проходження маршруту, кількість пального, що витрачається, інформація про сортувальні станції, які закріплені за кожним районом, графіки порівняння роботи системи впродовж часу тощо.

На рис.1 наведено один з розділів мапи.

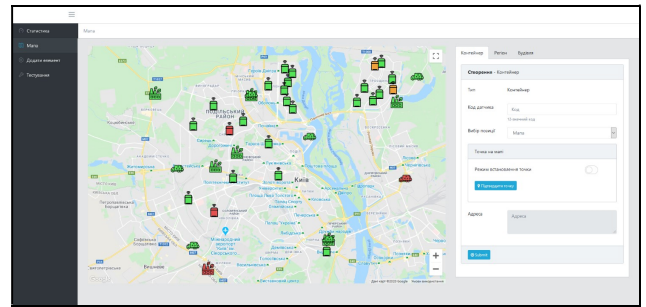


Рис.1 Екранна форма інтерфейсу «Розділ мапи»

Тут можна переглядати розміщення усіх елементів, таких як регіони, контейнери, комунальні відділення та сортувальні станції, та інформацію про них та їхній статус. Також можна додавати нові елементи на мапу, ввівши всю потрібну інформацію та обравши розташування елемента.

Даний сайт буде наглядно показувати ефективність даного рішення, що в майбутньому полегшить перехід на більш розвинені системи.

#### IV. ВИСНОВКИ

Техніко-економічний ефект від впровадження запропонованої системи полягає в тому, що він не супроводжується великими витратами. Основними функціями, які зменшують додаткові витрати є:

- можливість приєднання програмного забезпечення до загального сервісу надання та керування послугами. Наприклад, до існуючої наразі системи «розумного» міста Києва Kyiv Smart City;
- не потрібно змінювати будову великої частки від вже існуючих сміттєвих контейнерів, датчики в свою чергу кріпляться до будь-яких з них.
- не потребує перебудови інфраструктури міста.

На підставі викладених підходів та концепцій було розроблено інформаційну технологію, яку було 17.06.2022 зареєстровано в УкрІНТЕІ та отримано державний реєстраційний номер 0622U000077 [4].

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Internet of Things-IOT: Definition, Characteristics, Architecture, Enabling Technologies, Application & Future Challenges / K. Patel, S. Patel, P. Scholar, C. Salazar. // International Journal of Engineering Science and Computing. –2016.
- [2] The Internet of Things / S. Greengard // Cambridge, MA: MIT Press. – 2015.
- [3] Jamrozik N. Smart Waste Management [Електронний ресурс] / Nadia Jamrozik. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: <https://www.iiotforall.com/smart-waste-management/>.
- [4] Інформаційна технологія автоматизації управління утилізацією відходів у місті. УкрІНТЕІ, держ. реєстраційний номер 0622U000077. УкрІНТЕІ | Технології ONLINE (ukrintei.ua)

# Математичне моделювання перехідного процесу у багатоскладових системах групових машинних агрегатів.

Іван Варава

каф. інженерії програмного забезпечення в енергетиці  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»  
Київ, Україна  
ivan.varava@ukr.net

Валерій Писаренко

відділ № 265 математичних проблем прикладної  
інформатики  
Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
olga-gulchak@ukr.net

Володимир Красношапка

відділ № 265 математичних проблем прикладної  
інформатики  
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
vkrasnoshapka265@mail.ru

Микола Фесенко

відділ № 265 математичних проблем прикладної  
інформатики  
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України  
Київ, Україна  
oollyy55@ukr.net

## Mathematical modeling of the transition process in multicomponent systems of group machine units.

Ivan Varava

cat. Software Engineering for Power Industry  
National Technical University of Ukraine  
“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”  
Kyiv, Ukraine  
ivan.varava@ukr.net

Valeriy Pysarenko

dept. №265 of Mathematical Problems of Applied  
Informatics  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the National  
Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
olga-gulchak@ukr.net

Volodymyr Krasnoshapka

dept. №265 of Mathematical Problems of Applied  
Informatics  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the National  
Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
vkrasnoshapka265@mail.ru

Mykola Fesenko

dept. №265 of Mathematical Problems of Applied  
Informatics  
V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the National  
Academy of Sciences of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
oollyy55@ukr.net

*Анотація*— Розглянуто методи розрахунку динамічних характеристик технологічних групових машинних агрегатів, які є багатоскладовою та багатоланковою системою. Запропоновано узагальнену математичну модель, яка дозволяє визначити вплив динамічних процесів на вихідні змінні характеристики групових машинних агрегатів. На підставі запропонованої математичної моделі досліджено вплив компонування конструктивних ланок цієї складної

системи на вібраційні процеси в лініях передачі, що стає причинами пошкодження механічних елементів, а також може порушити працездатність електронних і оптичних систем.

*Abstract*— Abstract— Methods of calculating the dynamic characteristics of technological group machine aggregates, which are a multi-component and multi-link system, are considered. A generalized mathematical model is proposed, which allows

determining the influence of dynamic processes on the initial variable characteristics of group machine units.

On the basis of the proposed mathematical model, the influence of the composition of the structural links of this complex system on vibration processes in transmission lines, which causes damage to mechanical elements, and can also disrupt the performance of electronic and optical systems, was investigated.

*Ключові слова*—математична модель, групові машинні агрегати, багатоскладові системи, вібраційні процеси

*Keywords* - mathematical model, group machine units, multi-component systems, vibration processes

## I. ВСТУП

Робототехнічні системи з елементами штучного інтелекту включають комплекс механічних, електричних, електронних і оптичних елементів, тобто є поліагрегатними динамічними системами.

У процесі здійснення технологічних операцій їх виконання може бути порушено внаслідок наявності вібрацій, які можуть стати причинами втомного пошкодження механічних елементів, а також здатні порушити працездатність електронних і оптичних систем. Вібраційні процеси можуть виникати з причин зовнішніх впливів, а також в силу внутрішніх особливостей динамічної поліагрегатної системи. Значний вплив на динамічні процеси може надавати компоновка ліній передачі індивідуального машинного агрегату (МА). В області теоретичних досліджень динаміки групових машинних агрегатів (МА) у відділі 265 Інституту кібернетики НАНУ було встановлено [1], [2], що при певних умовах в системах (МА), що мають пружні розгалуження, можуть збуджуватися стаціонарні коливання, які практично не демпфуються за рахунок дисипативних втрат в електродвигунах. Машинні агрегати з індивідуальними електродвигунами (ІЕД) також мають пружні розгалуження, тому дуже важливо встановити вплив компоновання валопроводів на вихідні змінні машинного агрегату.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Для дослідження впливу компоновання валопроводів на виникнення стаціонарних коливань, які здатні порушити працездатність електронних і оптичних компонентів багатоскладових систем, авторами було поставлено завдання провести математичне моделювання МА. Дослідження стійкості узагальненої математичної моделі МА з ІЕД дуже складно, тому розглянемо спочатку випадки, коли демпфуючий фактор незначний (тобто  $b_1 = b_2 = 0$ ) і жорсткості механічних характеристик двигунів нехтує малі ( $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ). Математична модель перехідного процесу може в такому випадку описуватися наступною системою диференційних рівнянь у вигляді

$$\dot{v} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{J_\Sigma} v = \frac{\Delta M}{J_\Sigma}$$

$$\ddot{\Theta}_{12} + \Omega_{12}^2 \Theta_{12} - \frac{\mu_1}{J_2} v = \frac{M_{01}}{J_{1\delta}} + \frac{M_{0S}}{J_2}$$

$$\dot{v} - \frac{C_1}{J_2} \Theta_{12} + \frac{C_2}{J_3} \Theta_{34} + \left( \frac{\mu_1}{J_2} - \frac{\mu_2}{J_3} \right) v = -\frac{M_{0S}}{J_2} + \frac{M_{0S}}{J_3}$$

(1)

$$\ddot{\Theta}_{34} + \Omega_{34}^2 \Theta_{34} - \frac{\mu_2}{J_3} v = \frac{M_{02}}{J_{4\delta}} + \frac{M_{0S}}{J_3}$$

де  $\Omega_{12}^2 = \frac{C_1(J_{1\delta} + J_2)}{J_{1\delta}J_2}$ ,  $\Omega_{34}^2 = \frac{C_1(J_{4\delta} + J_3)}{J_{4\delta}J_3}$  (2)

тут, як і далі введені наступні умовні позначення:

$b_1, b_2$	Демпфуючий фактор (в'язке тертя)
$\beta_1, \beta_2$	Жорсткості механічних характеристик двигунів
$\mu$	Кутова швидкість
$\mu_1, \mu_2$	Коефіцієнти тертя на верхньому і нижньому валках.
$\Delta M$	Різниця моментів
$I_\Sigma$	Сумарний момент інерції
$I_2, I_3$	Моменти інерції дискретних мас
$I_{1\delta}, I_{4\delta}$	Моменти інерції роторів двигунів
$M_{01}, M_{02}$	Моменти сил пружності
$C_1, C_2$	Жорсткість пружних ланок
$\Theta_{12}, \Theta_{34}$	Пружні деформації

Перше рівняння системи (1) визначає рух системи машинного агрегату як твердого тіла і може бути проінтегровано після знаходження  $v(t)$  з трьох спільних рівнянь (1).

Характеристичне рівняння для диференційних рівнянь має вигляд

$$\lambda^5 + a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (3)$$

де  $a_0 = \frac{\mu_1}{J_2} - \frac{\mu_2}{J_3}$ ,  $a_1 = \Omega_{12}^2 + \Omega_{34}^2$

$$a_2 = \frac{\mu_1}{J_2} \Omega_{34}^2 + \frac{\mu_1 C_1}{J_{1\delta} J_2} - \frac{\mu_2}{J_3} \Omega_{12}^2 - \frac{\mu_2 C_2}{J_3 J_{4\delta}}$$

$$a_3 = \Omega_{12}^2 \Omega_{34}^2$$

$$a_4 = C_1 C_2 \left[ \mu_1 (J_3 + J_{4\delta}) - \mu_2 (J_2 + J_{1\delta}) \right] (J_{1\delta} J_2 J_3 J_{4\delta})^{-1}$$

(4)

Записавши для характеристичного рівняння 5-го порядку (3) відому алгебраїчну умову стійкості [4], приходимо до таких нерівностей (5):

$$\frac{\mu_1 C_1}{J_2^2} - \frac{\mu_2 C_2}{J_3^2} > 0, \quad -\frac{\mu_1 \mu_2 C_1 C_2}{J_2^2 J_3^2} (\Omega_{12}^2 - \Omega_{34}^2)^2 > 0, \quad (5)$$

Оскільки в залежностях для моментів опору  $\mu_2 < 0$ , то коефіцієнти характеристичного рівняння (3) є позитивними. Перша нерівність завжди позитивна, а друга нерівність може звертатися в нуль. Звернення в нуль відбувається, коли виконується рівність:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{(J_3 + J_4) J_1 J_2}{(J_2 + J_1) J_3 J_4} \quad (6)$$

Найпростіший випадок, коли виконується рівність (6) - це випадок ідентичних валопроводов, тобто  $C_1 = C_2$

$$J_{1\partial} = J_{4\partial} \quad J_2 = J_3 \quad (7)$$

Необхідно відзначити, що умову (7) неможливо реалізувати в силу окремих конструктивних особливостей машинного агрегату з індивідуальними двигунами, які полягають в асиметрії верхньої і нижньої лійні як за інерційними, так і за жорсткісними параметрами [2].

У той же час з другого нерівності (5), виходить, що якщо  $\mu_2 \rightarrow 0$ , то система машинного агрегату близька до межі стійкості і можуть виникнути коливання значною амплітуди.

Наявність вібрацій може стати причинами і втомного пошкодження механічних елементів, і порушенням працездатності електронних і оптичних систем.

Умови (7) не характерні для машин агрегатів з індивідуальними електроприводом. Однак умова (6) може бути корисним в тому сенсі, що після обчислення лівої і правої частини можна встановити, наскільки вони різняться між собою. Можна стверджувати, що чим більше відрізняються чисельні значення лівої і правої частин рівності, тим більш раціонально обрані пружно-інерційні параметри машинного агрегату з індивідуальними електродвигунами. При великій різниці в правої та лівої частинах рівняннях (6) буде зменшуватися вплив перехідних коливальних процесів на вихідні змінні машинних агрегатів з індивідуальними двигунами.

Авторами було проведено чисельні розрахунки на конкретних прикладах, які дозволили простежити зміну характеристик вібростійкості МА в залежності від

параметрів. Ці розрахунки підтвердили, що вплив перехідних коливальних процесів на вихідні змінні характеристики МА буде менше при забезпеченні конструктивно великій різниці в рівняннях (6).

### III. ВИСНОВКИ

Поліагрегатні динамічні системи включають в себе комплекс рухомих механічних, електричних, електронних і оптичних елементів. На прикладі технологічних групових машинних агрегатів (які являють собою багатоскладові системи з рухомими елементами) розглянуто методи розрахунку їх динамічних характеристик. Як результат, було виведено узагальнену математичну модель, яка надає можливість визначити вплив динамічних процесів, що виникають у конструкціях машинних агрегатів на їх вихідні змінні характеристики.

На підставі запропонованої математичної моделі авторами було досліджено вплив компоновання конструктивних ланок цієї складної системи на вібраційні процеси в лініях передачі, що стає причинами пошкодження механічних елементів, а також, як наслідок, може порушити працездатність електронних і оптичних систем. Було зроблено висновок стосовно критерію більш раціонального вибору пружно-інерційних параметрів машинного агрегату. Таким чином умова (6) може служити критерієм для раціонального вибору пружно-інерційних параметрів робототехнічних систем з індивідуальними двигунами [2].

Для отримання поліпшених динамічних характеристик необхідно вибрати пружно-інерційні параметри таким чином, щоб у формулі (6) ліва і права частини максимально відрізнялися чисельно.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Красношапка В.А., Варава І.А., Красношапка В.В. Динамічні процеси в технологічних групових машинних агрегатах, Харків: «ІНФОПРЕСС», 2018. - 96 с.
- [2] Красношапка В.А. Динамічні процеси в керованих машин агрегатів з індивідуальними двигунами. Міжнародний науково-технічний журнал «Проблеми управління та інформатики», 2009, №2, с. 66-71.
- [3] Красношапка В.А., Вплив змінних технологічних навантажень на динамічні процеси в машинних агрегатах. Міжнародний науково-технічний журнал «Проблеми управління та інформатики», 2011, №2, с.60-68
- [4] Попов Е.А. Теорія лінійних систем автоматичного регулювання та керування - М: Наука, 1990. - 314с.



# Чисельний аналіз методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна двовимірних крайових задач для нелінійного рівняння теплопровідності

Костянтин Василюшин  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет  
радіоелектроніки  
Харків, Україна  
kostiantyn.vasylyshyn@nure.ua

Максим Сидоров  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет  
радіоелектроніки  
Харків, Україна  
maxim.sidorov@nure.ua

## Numerical analysis by two-sided approximations method based on using the Green's function of two-dimensional boundary value problems for nonlinear heat conduction equation

Kostiantyn Vasylyshyn  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
kostiantyn.vasylyshyn@nure.ua

Maxim Sidorov  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
maxim.sidorov@nure.ua

**Анотація**—проведено дослідження питання побудови двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв'язку двовимірного нелінійного рівняння теплопровідності, де нелінійність зумовлена нелінійністю коефіцієнта теплопровідності і функції потужності теплових джерел.

**Abstract**—this work is dedicated to research of construction of two-sided approximations method based on using the Green's function of two-dimensional boundary value problems for nonlinear heat conduction equation, where the nonlinearity is caused by the nonlinearity of thermal conductivity coefficient and heat sources' power function.

**Ключові слова**—двобічні наближення; функція Гріна; гетеротонний оператор; закон Арреніуса

**Keywords**—two-sided approximations; Green's function; heterotonic operator; Arrhenius' law

### I. ВСТУП

Сьогодні перед людством стоїть складна задача забезпечення необхідними ресурсами усе населення нашої планети. Одним з важливих ресурсів є електроенергія. Питання ефективного здобуття великої кількості енергії ставилося ще багато десятиріч тому, і з кожним роком це питання лише ускладнюється, бо обсяги споживаної енергії тільки збільшуються. Одним з цікавих шляхів здобуття енергії є лазерний термоядерний синтез (ЛТС) [1]. При ЛТС завдяки деяким нелінійним властивостям плазми і фіксованим умовам, щодо середовища проведення реакції, розподілення енергії в результаті теплопередачі описується рівнянням

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + f(\theta).$$

Для розв'язання задач для цього рівняння можна застосувати різні чисельні методи: метод сіток, метод Ньютона-Канторовича, метод двобічних наближень тощо. Останній метод є найбільш привабливим через зручну апостеріорну оцінку для похибки наближеного розв'язку і можливість довести існування розв'язку вихідної задачі. Отже, застосування двобічних ітераційних методів до розв'язання задач для нелінійного диференціального рівняння теплопровідності є актуальною задачею.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядатимемо задачу термоядерного горіння, що викликане збуренням температури [2, 3, 4]. Задача знаходження розв'язку нелінійної крайової задачі, коли коефіцієнт теплопровідності залежить степенево від температури і коли у області горіння наявні джерела тепловиділення, розподілені за експоненціальним законом, є дуже поширеною у сфері лазерного термоядерного синтезу.

Процес запалювання у плоскій області  $\Omega$ , коли реакція горіння виходить на стаціонарну температуру, описується рівнянням

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)=f(\theta), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$T|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

де  $k(\theta) = k_0\theta^\sigma$  – коефіцієнт теплопровідності,  $k_0 > 0$  – значення коефіцієнта теплопровідності у лінійному середовищі,  $f(\theta) = e^\theta + \lambda e^{-\theta}$  – функція потужності теплових джерел,  $\sigma > 0$  – параметри нелінійності середовища,  $\lambda > 0$  – стала, що характеризує потужність теплових джерел.

## III. МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

Застосуємо до розв'язання задачі (1), (2) метод двобічних наближень, заснований на використанні методів теорії нелінійних операторних рівнянь у напівопорядкованих просторах [6, 7].

Спочатку зробимо у задачі (1), (2) заміну  $\theta = \left[\frac{\sigma+1}{k_0}u\right]^{\frac{1}{1+\sigma}}$ , де  $u(x, y)$  – нова невідома функція, та отримаємо наступну крайову задачу для функції  $u$ :

$$-\Delta u = F(u), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3)$$

$$u(x, y) > 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (4)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5)$$

$$\text{де } F(u) = e^{\mu u^{\frac{1}{1+\sigma}}} + \lambda e^{-\mu u^{\frac{1}{1+\sigma}}}, \quad \mu = \left(\frac{\sigma+1}{k_0}\right)^{1+\sigma}.$$

Задача (3) – (5) є задачею Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння. Зрозуміло, що функція  $F(u)$  неперервна і додатна при  $u > 0$ .

Якщо  $G(x, y, \xi, \eta)$  – функція Гріна першої крайової задачі для оператора Лапласа, то задача (3) – (5) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) F(u(\xi, \eta)) d\xi d\eta. \quad (6)$$

Рівняння (6) розглядатимемо у банаховому просторі  $C(\bar{\Omega})$ , напівопорядкованому конусом  $K_+$  невід'ємних функцій.

З рівнянням (6) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор  $T$ , що діє у  $C(\bar{\Omega})$  за правилом

$$T(u)(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) F(u(\xi, \eta)) d\xi d\eta. \quad (7)$$

Помітимо, що функція  $F(u)$  дозволяє діагональне подання  $F(u) = \hat{F}(u, u)$ , де неперервна за сукупністю змінних  $v, w$  невід'ємна функція  $\hat{F}(v, w) = e^{\mu v^{\frac{1}{1+\sigma}}} + \lambda e^{-\mu w^{\frac{1}{1+\sigma}}}$  монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $(x, y) \in \bar{\Omega}$ . Тоді оператор  $T$  вигляду (7) буде гетеротонним з супутнім оператором

$$\hat{T}(v, w)(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}(v(\xi, \eta), w(\xi, \eta)) d\xi d\eta. \quad (8)$$

Зрозуміло, що оператори  $T$  і  $\hat{T}$  цілком неперервні.

Дослідимо застосування методу двобічних наближень до знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (6), що є еквівалентним вихідній задачі (3) – (5).

За допомогою умов  $\hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0$ ,  $\hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0$  виділимо сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  у конусі  $K_+$  невід'ємних функцій.

Оскільки  $F(0) = 1 + \lambda > 0$ , то конусний відрізок, сильно інваріантний для гетеротонного оператора (7), шукатимемо у вигляді  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$ . Тоді для визначення  $\beta$  отримаємо нерівність

$$M \left( e^{\gamma \beta^{\frac{1}{1+\sigma}}} + \lambda \right) \leq \beta, \quad (9)$$

де  $M = \max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta$ .

Сформуємо далі ітераційний процес за схемою:

$$v^{(k+1)}(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}(v^{(k)}(\xi, \eta), w^{(k)}(\xi, \eta)) d\xi d\eta, \\ k = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

$$w^{(k+1)}(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}(w^{(k)}(\xi, \eta), v^{(k)}(\xi, \eta)) d\xi d\eta, \\ k = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$v^{(0)}(x, y) = v_0(x, y), \quad w^{(0)}(x, y) = w_0(x, y). \quad (12)$$

Зважаючи на сильну інваріантність конусного відрізка  $\langle v_0, w_0 \rangle$  та властивість гетеротонності оператора  $T$  із супутнім оператором  $\hat{T}$  стає очевидним, що послідовність  $\{v^{(k)}(x, y)\}$  не спадає за конусом  $K_+$ , а послідовність  $\{w^{(k)}(x, y)\}$  не зростає за конусом  $K_+$ . Існування границь  $v^*(x, y)$  і  $w^*(x, y)$  цих послідовностей отримується з умови нормальності конуса  $K_+$  і повної неперервності оператора  $\hat{T}$ .

Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$0 = v^{(0)} \,, \, v^{(1)} \,, \, \dots \,, \, v^{(k)} \,, \, \dots \,, \, v^* \,, \\ \,, \, w^* \,, \, \dots \,, \, w^{(k)} \,, \, \dots \,, \, w^{(l)} \,, \, w^{(0)} = \beta.$$

Можливими є два випадки:  $v^* < w^*$  і  $v^* = w^*$ . За умови  $u_0$  - увігнутості оператора  $T$  можливим є лише випадок  $v^* = w^*$ , і тоді  $u^* := v^* = w^*$  буде єдиною на конусному відрізку  $\langle 0, \beta \rangle$  нерухомою точкою оператора  $T$ , а отже, точка  $u^*$  буде єдиним на  $\langle 0, \beta \rangle$  додатним розв'язком задачі (3) – (5).

Гетеротонний оператор  $T$  вигляду (7), для якого оператор  $\hat{T}$  вигляду (8) є супутнім, матиме властивості псевдоувігнутості і навіть  $u_0$  -псевдоувігнутості з функцією  $u_0$  вигляду

$$u_0(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

якщо для будь-яких додатних чисел  $v, w$ , менших за  $\beta$ , при будь-якому  $\tau \in (0, 1)$

$$e^{\mu(\tau v)^{\frac{1}{1+\sigma}}} + \lambda e^{-\mu\left(\frac{1}{\tau} w\right)^{\frac{1}{1+\sigma}}} > \tau \left( e^{\mu v^{\frac{1}{1+\sigma}}} + \lambda e^{-\mu w^{\frac{1}{1+\sigma}}} \right). \quad (13)$$

Тоді, матиме місце наступна теорема.

**Теорема.** Нехай  $\langle 0, \beta \rangle$  – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (7) із супутнім оператором  $\hat{T}$  вигляду (8) і виконується нерівність (13). Тоді ітераційний процес (10) – (12) збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle 0, \beta \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (3) – (5), причому справджується ланцюг нерівностей

$$0 = v^{(0)} \,, \, v^{(1)} \,, \, \dots \,, \, v^{(k)} \,, \, \dots \,, \, u^* \,, \\ \,, \, \dots \,, \, w^{(k)} \,, \, \dots \,, \, w^{(l)} \,, \, w^{(0)} = \beta.$$

Останній ланцюг нерівностей як раз і характеризуватиме ітераційний метод (10) – (12) як метод двобічних наближень.

За наближений розв'язок крайової задачі (3) – (5) на  $k$ -й ітерації вважатимемо функцію

$$u^{(k)}(x, y) = \frac{w^{(k)}(x, y) + v^{(k)}(x, y)}{2}. \quad (14)$$

Для побудованого ітераційного процесу матимемо зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку (14), а саме:

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(x, y) - v^{(k)}(x, y)).$$

Тоді при заданій точності  $\varepsilon > 0$  ітераційний процес (10) – (12) слід продовжувати до виконання нерівності

$$\max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(x, y) - v^{(k)}(x, y)) < 2\varepsilon,$$

і з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що  $u^*(x, y) \approx u^{(k)}(x, y)$ .

Наближеним розв'язком вихідної задачі (1), (2) вважатимемо функцію

$$\theta^{(k)}(x, y) = \left[ \frac{\sigma + 1}{k_0} u^{(k)}(x, y) \right]^{\frac{1}{1+\sigma}}.$$

Оскільки величина  $\max_{x, y \in \bar{\Omega}} (w^0(x, y) - v^0(x, y)) = \beta$  має бути якомога меншою для більш швидкої збіжності ітерацій, то при практичній реалізації ітераційного процесу (10) – (12) слід взяти найменше  $\beta$ , що задовольняють нерівності (9), тобто найменший корінь рівняння

$$M = \frac{\beta}{e^{\gamma \beta^{\sigma+1}} + \lambda}.$$

#### IV. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Обчислювальний експеримент було проведено для задачі (1), (2), розглядуваній у крузі  $\Omega$  радіуса  $R$ , при  $k_0 = 1$ ,  $\lambda = 0,25$  і  $\sigma = 0,5$ .

Функція Гріна для задачі (3) – (5) у кулі радіуса  $R = 1$  матиме вигляд:

$$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 \rho^2 - 2r \rho \cdot \cos(\varphi - \psi) + 1}{r^2 - 2r \rho \cdot \cos(\varphi - \psi) + \rho^2},$$

де  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $\xi = \rho \cos \psi$ ,  $\eta = \rho \sin \psi$ .

Ітераційний процес зійшовся до розв'язку вихідної задачі із точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$  за 12 ітерацій. Результати ітерацій у перерізі  $x_2 = 0$  наведено на рис. 1 (суцільна лінія відповідає послідовності верхніх, а пунктирна – нижніх наближень).

Залежність норми наближеного розв'язку  $T(x, y)$  від параметра  $\lambda$  наведено на рис. 2 відповідно. Залежність норми наближеного розв'язку  $T(x, y)$  від параметра  $\sigma$  наведено на рис. 3.

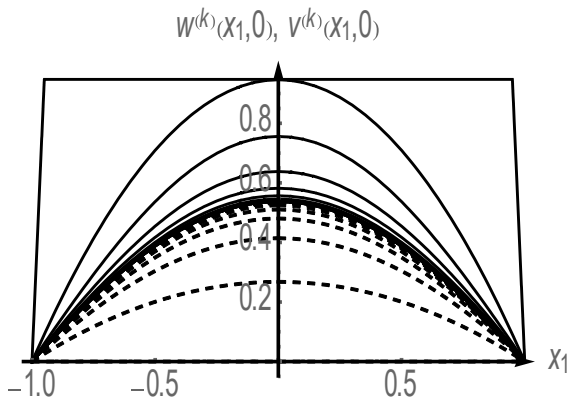


Рис. 1. Графіки  $v^{(k)}(x_1, 0)$  і  $w^{(k)}(x_1, 0)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 12$

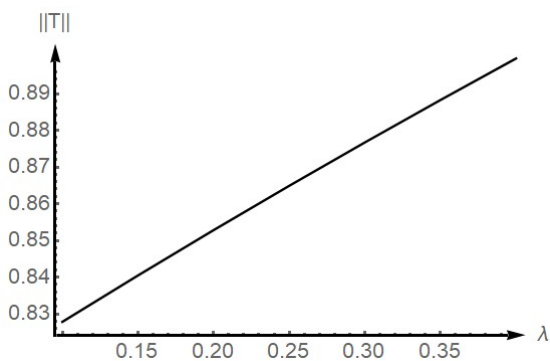


Рис. 2. Графік залежності норми розв'язку  $T(x, y)$  від параметра  $\lambda$  при  $\sigma = 0,5$

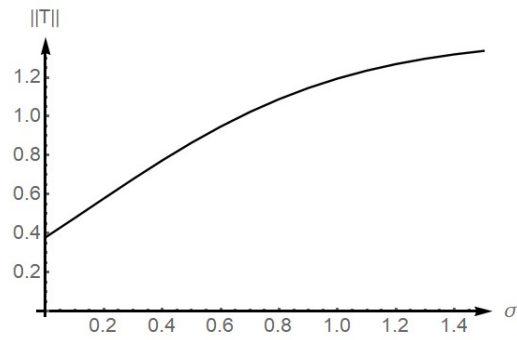


Рис. 3. Графік залежності норми розв'язку  $T(x, y)$  від параметра  $\sigma$  при  $\lambda = 0,25$

#### V. ВИСНОВКИ

У роботі вперше було досліджено можливість побудови двобічних наближень до єдиного додатного розв'язку двовимірного нелінійного диференціального рівняння теплопровідності зі степеневим коефіцієнтом теплопровідності та експоненціальною функцією розподілу теплових джерел. Також було проведено чисельний аналіз залежності норми наближеного розв'язку від сталої, що характеризує потужність теплових джерел, і параметра нелінійності середовища. Розглянутий метод показав свою ефективність при розв'язанні тестових задач і може бути використаний при розв'язанні задач моделювання лазерного термоядерного синтезу. Це і визначає наукову новизну та практичну значущість отриманих у роботі результатів.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд. Москва : Физматлит, 2001. 320 с.
- [2] Ашихмин В. Н. Введение в математическое моделирование : уч. пособ. Москва : Университетская книга, 2007. 440 с.
- [3] Проблемы лазерного термоядерного синтеза. Сб. статей / Пер. под ред. А. А. Филокова. Москва : Атомиздат, 1976. 296 с.
- [4] Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. Москва : Едиториал УРСС, 2003. 616 с.
- [5] Сидоров М. В. Методи двобічних наближень розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики : дис. ... д-ра фіз.-мат. наук : 01.05.02 / Харків. нац. ун-т радіоелектрон. Харків, 2019. 486 с.
- [6] Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 394 с.
- [7] Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.

# Дробово-диференціальна Математична Модель Внутрішньочастинкового Масопереносу

Віктор Жуковський, Наталія Жуковська  
Кафедра комп'ютерних наук та прикладної  
математики  
Національний університет водного  
господарства та природокористування  
Рівне, Україна  
V.V.Zhukovsky@nuwm.edu.ua

## Fractional-differential Mathematical Model of Intraparticle Mass Transfer

Viktor Zhukovsky, Nataliia Zhukovska  
Department of Computer Science and Applied  
Mathematics  
The National University of Water and  
Environmental Engineering  
Rivne, Ukraine  
V.V.Zhukovsky@nuwm.edu.ua

**Анотація**—В роботі представлено постановку задачі процесу вертикального масопереносу речовин у каталітичному пористому середовищі. Побудовано дробово-диференціальну математичну модель одновимірної задачі внутрішньочастинкового масопереносу забруднених речовин в пористому середовищі. Знайдено аналітичний розв'язок відповідної крайової задачі.

**Abstract**— The paper presents the formulation of the problem of contaminant vertical mass transfer in a catalytic porous medium. A fractional-differential mathematical model of the one-dimensional problem of intraparticle mass transfer of polluted substances in a porous medium has been constructed. An analytical solution of the corresponding boundary value problem was found.

**Ключові слова**— дробово-диференціальна; математична модель; аналітичний розв'язок

**Keywords**— fractional-differential; mathematical model; analytical solution

### I. ВСТУП

Останнім часом спостерігається активність вчених у використанні дробово-диференціальних рівнянь при математичному та комп'ютерному моделюванні різноманітних реальних процесів [1, 2]. Дробово-

диференціальні рівняння дозволяють моделювати процеси для яких є характерними ефекти пам'яті та просторової нелокальності. Це дає змогу побудувати більш точні моделі реального світу.

### II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо каталітичне пористе середовище, що займає область  $\Omega = \{0 < x < l; 0 < r < R\}$  (рис. 1) в якому відбувається процес масопереносу забруднених речовин.

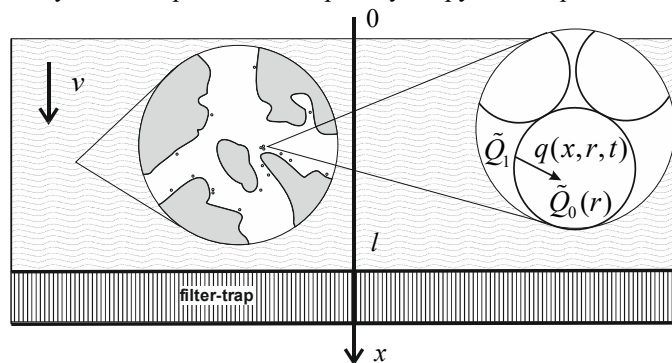


Рис. 1. Схема вертикального масопереносу забруднених речовин у каталітичному пористому середовищі

Необхідно розрахувати нові значення концентрації  $q(x, r, t)$  по області  $\Omega$ , що дасть можливість прогнозувати використання спеціалізованих мікро- та нанопористих частинок для пористого середовища. Даний процес може бути застосований для очищення ґрунтів з метою їх подальшого сільськогосподарського використання.

### III. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Математичну модель поставленої задачі в одновимірному випадку можна описати наступною крайовою задачею [2–4]:

$$D_t^{(\beta)} q = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 D_0(q) \frac{\partial q}{\partial r} \right), \quad X \in \Omega, r \in (0, R), t > 0, \quad (1)$$

$$q(x, r, 0) = \tilde{Q}_0(r), \quad X \in \Omega, r \in (0, R), \quad (2)$$

$$X \in \Omega, t > 0. \quad (3)$$

Тут використані наступні позначення:  $X = \{x\}$  – точка області  $\Omega$ , м;  $r$  – радіус частинки, м;  $t$  – час;  $q(x, r, t)$  – концентрація радіонуклідів у частинках радіуса  $R$ ;  $D_0$  – коефіцієнт дифузії радіонуклідів у частинках радіуса  $R$ , що знаходяться у скелеті ґрунту;

$D_t^{(\beta)} q$  – дробова похідна Капуто (Капуто—Герасимова) порядку  $\beta (0 < \beta < 1)$ .

$$D_t^{(\beta)} q = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\partial C(x, \eta)}{(t-\eta)^\beta} d\eta,$$

$\Gamma(1-\beta) = \int_0^\infty t^{-\beta} e^{-t} dt$  – гама-функція Ейлера.

Рівняння (1) описує внутрішньочастинковий масоперенос забруднюючих частинок з поточною концентрацією  $q(x, r, t)$ ; рівняння (2) задає значення концентрації  $q$  у початковий момент часу; рівняння (3) задає значення концентрації  $q$  на зовнішній межі частинки при  $r = R$ .

У випадку, коли  $D_0(q) = D_0 = const$ , та використання в рівнянні (1) звичайної похідної маємо

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 D_0 \frac{\partial q}{\partial r} \right).$$

або

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D_0 \left( \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \right), \quad X \in \Omega, r \in (0, R), t > 0. \quad (4)$$

Аналітичний розв’язок (4) при відповідних крайових умовах (2) та (3) має вигляд

$$q(x, r, t) = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 D_0 t}{R^2}} \sin \frac{n\pi r}{R}, \quad (5)$$

$$\text{де } \beta_n = \frac{2}{R} \int_0^R r \tilde{Q}_0(r) \sin \frac{n\pi r}{R} dr.$$

Знайдемо аналітичний розв’язок рівняння (4) при початковій умові (2) для випадку, коли гранична умова (3) є неоднорідною, тобто маємо

$$q(x, R, t) = \tilde{Q}_1, \quad (6)$$

де  $\tilde{Q}_1 = const$ .

Щоб звести неоднорідну граничну умову до однорідної введемо заміну вигляду

$$q(x, r, t) = u(x, r, t) + \tilde{Q}_1, \quad (7)$$

де  $u(x, r, t)$  – нова невідома функція.

Тоді маємо

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$q(x, R, t) = u(x, R, t) + \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_1,$$

$$q(x, r, 0) = u(x, r, 0) + \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_0(r).$$

Звідси отримаємо

$$u(x, R, t) = 0,$$

$$u(x, r, 0) = \tilde{Q}_0(r) - \tilde{Q}_1.$$

Отже, маємо наступну крайову задачу для функції  $u(x, r, t)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad X \in \Omega, r \in (0, R), t > 0, \quad (8)$$

$$u(x, r, 0) = \tilde{Q}_0(r) - \tilde{Q}_1, \quad X \in \Omega, r \in (0, R), \quad (9)$$

$$u(x, R, t) = 0, \quad X \in \Omega, t > 0. \quad (10)$$

Тоді розв’язок (8)–(10) наступний:

$$u(x, r, t) = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 D_0 t}{R^2}} \sin \frac{n\pi r}{R}, \quad (11)$$

$$\text{де } \beta_n = \frac{2}{R} \int_0^R r (\tilde{Q}_0(r) - \tilde{Q}_1) \sin \frac{n\pi r}{R} dr.$$

Повертаючись до проведеної заміни (7), отримаємо аналітичний розв’язок (4) з відповідними крайовими умовами (2) та (6) у вигляді наступної функції:

$$q(x, r, t) = \tilde{Q}_1 + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 D_0 t}{R^2}} \sin \frac{n\pi r}{R}, \quad (12)$$

$$\text{де } \beta_n = \frac{2}{R} \int_0^R r (\tilde{Q}_0(r) - \tilde{Q}_1) \sin \frac{n\pi r}{R} dr.$$

### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] В. А. Богаєнко and В. М. Булавацький, “Численное моделирование дробно-дифференциальной динамики процесса фильтрационно-конвективной диффузии на основе параллельных алгоритмов для кластерных систем,” *Доповіді НАН України*, 2017.
- [2] P. Kostrobij, B. Markovych, O. Viznovych, and M. Tokarchuk, “Generalized electrodiffusion equation with fractality of space-time,” *Math. Model. Comput.*, vol. 3, no. 2, pp. 163–172, 2016, doi: 10.23939/mmc2016.02.163.
- [3] W. C. Conner and J. P. Fraissard, *Fluid transport in nanoporous materials*. Dordrecht, the Netherlands: Springer in cooperation with NATO Public Diplomacy Division, 2006.
- [4] A. P. Vlasjuk and V. V. Zhukovskyy, “Mathematical and computer modeling of intraparticle radionuclides mass transfer in catalytic porous media under isothermal conditions,” *Mathematical Modeling and Computing*, vol. 4, no. 2, pp. 117–125, 2017.

# Метод Роте та метод двобічних наближень у застосуванні до аналізу процесів самозаймання

Анатолій Калініченко  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет  
радіоелектроніки  
Харків, Україна  
anatolii.kalinichenko@nure.ua

Максим Сидоров  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет  
радіоелектроніки  
Харків, Україна  
maxim.sidorov@nure.ua

## Rothe's method and method of two-sided approximations in application to analysis of processes of spontaneous ignition

Anatolii Kalinichenko  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
anatolii.kalinichenko@nure.ua

Maxim Sidorov  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
maxim.sidorov@nure.ua

**Анотація**—робота присвячена використанню методу Роте в комбінації з методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна для розв'язання початково-крайової задачі для напівлінійного рівняння теплопровідності, потреба розгляду якої виникає при математичному моделюванні процесів самозаймання. Потужність внутрішнього джерела наближено тепла за допомогою експоненціальної залежності.

**Abstract**—this paper is devoted to the use of the Rothe's method in combination with the method of two-sided approximations based on the use of the Green's function to solve the initial-boundary value problem for the semilinear equation of thermal conductivity. The power of the internal heat source is approximated by exponential dependence.

**Ключові слова**—двобічні наближення; ізотонний оператор; метод Роте; напівлінійне рівняння теплопровідності; напівупорядкованість; процеси самозаймання; функція Гріна.

**Keywords**—two-sided approximations; isotonic operator; Rothe's method; two-sided approximation; semilinear equation of thermal conductivity; processes of spontaneous ignition; Green's function.

### I. ВСТУП

Процесом самозаймання називається різке збільшення температури без зовнішнього джерела тепла з наступним загорянням. Він властивий таким матеріалам як вугілля, торф, зерно, які в господарській діяльності часто розміщують на довгострокове збереження, внаслідок чого існує необхідність дослідження та прогнозування цього процесу. Самозаймання відбувається як наслідок акумуляції тепла, отриманого з екзотермічної хімічної реакції окиснення. Її інтенсивність збільшується разом із температурою, тому можемо вважати, що в насипі матеріалу, де відбувається процес, є внутрішнє джерело тепла, яке залежить від температури. Тоді математичною моделлю процесу самозаймання є напівлінійне диференціальне рівняння теплопровідності

$$\rho_m C \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T + f(T),$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\rho_m$  – насипна щільність матеріалу,  $C$  – питома теплоємність матеріалу,  $k$  –

коєфіцієнт теплопровідності,  $f(T)$  – нелінійна функція, що описує потужність внутрішнього джерела.

Згідно з рівнянням Арреніуса, швидкість хімічної реакції експоненціально залежить від температури [1], а отже, і потужність внутрішнього джерела тепла при самозайманні, що є наслідком хімічної реакції, можна описати за допомогою експоненціальної залежності.

Для різного навколишнього середовища отримаємо різні крайові умови, з початкового розподілу температури – початкову умову, і, як наслідок, нелінійну початково-крайову задачу для розподілу температури в насипі при процесі самозаймання. Дослідження задач такого класу аналітичним методом можливе лише в поодиноких випадках, що визначає необхідність застосування чисельних методів.

Метою цієї роботи є отримання наближеного розв'язку початково-крайової задачі для одновимірного напівлінійного рівняння теплопровідності (з нелінійною функцією потужності теплових джерел), яка виникає при моделюванні процесів самозаймання, методом Рунге в комбінації з методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо нелінійну початково-крайову задачу для рівняння теплопровідності, яка є математичною моделлю зміни температури при процесові самозаймання насипу вугілля

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = A \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + B e^{\theta}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, t_0], \quad (1)$$

$$\theta(x, t) > 0, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, t_0], \quad (2)$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (3)$$

$$\theta(0, t) = \theta(1, t) = 0, \quad t \in [0, t_0], \quad (4)$$

де  $A = \frac{k}{\rho_m C} > 0$  – коєфіцієнт температуропровідності,  $B > 0$  – стала, що характеризує кількість тепла, яке виділяється реакцією окиснення,  $t_0 > 0$  – час моделювання.

## III. ПОБУДОВА ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Введемо на відрізку  $[0, t_0]$  часову сітку з кроком  $\tau$ , що складається з точок:

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \quad m\tau = t_0,$$

та позначимо

$$\Theta_j = \Theta_j(x) = \theta(x, t_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Згідно з методом Рунге розв'язок задачі (1) – (4) шукатимемо вздовж прямих  $t = \text{const}$ . Для цього виконаємо на прямій  $t = t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , в рівнянні (1) апроксимацію диференціального оператора відношенням скінченних різниць

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \approx \frac{\Theta_j - \Theta_{j-1}}{\tau},$$

що дозволяє замінити з похибкою  $O(\tau)$  вихідне рівняння на вказаній прямій звичайним диференціальним рівнянням. Кожне з таких рівнянь, як і вихідне (1), розглядаються при  $x \in (0, 1)$ , тоді з крайових умов (4) маємо  $\Theta_j(0) = \Theta_j(1) = 0$ .

Оскільки початкова умова (3) визначає  $\theta(x, 0)$ , то на нульовому часовому шарі покладемо  $\Theta_0(x) = 0$ .

Таким чином, звели знаходження розв'язку вихідної початково-крайової задачі (1) – (4) до розв'язання послідовності крайових задач:

$$-\frac{d^2 \Theta_j}{dx^2} + \frac{1}{A\tau} \Theta_j = \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1} + \frac{B}{A} e^{\Theta_j}, \quad x \in (0, 1), \quad (5)$$

$$\Theta_j(x) > 0, \quad x \in (0, 1), \quad (6)$$

$$\Theta_j(0) = 0, \quad \Theta_j(1) = 0, \quad (7)$$

$$j = 1, 2, \dots, m;$$

$$\Theta_0(x) = 0.$$

Відмітимо, що апроксимація нелінійності в (5) відбувається на поточному часовому шарі, а не на попередньому, як в оригінальному методі Рунге.

Застосуємо для розв'язання кожної з задач (5) – (7) метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна.

Розглянемо задачу (5) – (7) при деякому фіксованому  $j$ . Ця задача еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$\Theta_j(x) = \int_0^1 G(x, s) \left( \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1}(s) + \frac{B}{A} e^{\Theta_j(s)} \right) ds, \quad (8)$$

де  $G(x, s)$  – функція Гріна першої крайової задачі для оператора  $-u'' + \frac{1}{A\tau} u$  на відрізку  $[0, 1]$ ,



$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{sh \kappa x sh \kappa(1-s)}{\kappa sh \kappa}, & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{sh \kappa s sh \kappa(1-x)}{\kappa sh \kappa}, & s \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{а } \kappa = \frac{1}{\sqrt{A\tau}}.$$

Рівняння (8) розглянемо у банаховому просторі  $C[0, 1]$ , напівупорядкованому конусом  $K_+$  невід'ємних на відрізку  $[0, 1]$  неперервних функцій за правилом: для  $u, v \in C[0, 1]$   $u \leq v$ , якщо  $v - u \in K$ . Конус  $K_+$  в  $C[0, 1]$  є нормальним [2]. Введемо в  $C[0, 1]$  норму  $\|u\| = \max_{x \in [0, 1]} |u(x)|$ . Розв'язок  $\Theta_j(x)$  крайової задачі (5) – (7) шукатимемо як неперервний розв'язок інтегрального рівняння (8).

Увівши оператор Гаммерштейна

$$T(u)(x) = \int_0^1 G(x, s) \left( \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1}(s) + \frac{B}{A} e^{u(s)} \right) ds \quad (10)$$

можемо записати рівняння (8) як  $u = T(u)$ .

Оскільки функція  $F(x, u) = \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1}(x) + \frac{B}{A} e^u$  неперервна і додатна при  $x \in [0, 1]$ ,  $u > 0$  та монотонно зростає за  $u$ , адже  $F'(x, u) = \frac{B}{A} e^u > 0$  при  $u > 0$ , то оператор (10) є ізотонним.

Функція  $f(u) = \frac{B}{A} e^u$  визначена при  $u = 0$  та  $f(0) = \frac{B}{A} > 0$ , тож на  $j$ -му часовому шарі інваріантний конусний відрізок для оператора  $T_j$  шукатимемо у вигляді  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle = \langle 0, \beta_j \rangle$  [3]. Число  $\beta_j > 0$  (при цьому для швидшої збіжності обирати необхідно якнайменше значення  $\beta_j$ ) визначається з нерівності

$$\varphi_j(x) + \frac{B}{A} e^{\beta_j} u_0(x) \leq \beta_j, \quad x \in [0, 1],$$

$$\text{де } \varphi_j(x) = \frac{1}{A\tau} \int_0^1 G(x, s) \Theta_{j-1}(s) ds;$$

$$u_0(x) = \int_0^1 G(x, s) ds = \frac{2}{\kappa^2} \cdot \frac{sh \frac{\kappa x}{2} sh \frac{\kappa(1-x)}{2}}{ch \frac{\kappa}{2}}.$$

Остання нерівність приводиться до вигляду

$$\max_{x \in [0, 1]} \varphi_j(x) + \frac{B}{A} M e^{\beta_j} \leq \beta_j, \quad (11)$$

$$\text{де } M = \max_{x \in [0, 1]} u_0(x) = \frac{2}{\kappa^2} \cdot \frac{sh^2 \frac{\kappa}{4}}{ch \frac{\kappa}{2}}.$$

Ітераційний процес методу двобічних наближень матиме вигляд

$$v^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \frac{B}{A} \int_0^1 G(x, s) e^{v^{(k)}(s)} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$w^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \frac{B}{A} \int_0^1 G(x, s) e^{w^{(k)}(s)} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(x) = 0, \quad w^{(0)}(x) = \beta_j. \quad (12)$$

Оскільки для методу двобічних наближень на кожній ітерації величина  $\frac{1}{2} \|w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)\|$  оцінює похибку, то проводити ітераційний процес (12) з заданою точністю  $\varepsilon > 0$  слід до виконання нерівності

$$\max_{x \in [0, 1]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon,$$

після чого можна записати як розв'язок вихідної задачі вздовж прямої  $t = t_j$  з точністю  $\varepsilon$

$$\Theta^*(x, t_j) \approx \Theta_j^{(k_j)}(x) = \frac{1}{2} (w^{(k_j)}(x) + v^{(k_j)}(x)).$$

Результатом застосування запропонованого методу двобічних наближень до крайових задач методу прямих на кожному часовому шарі, буде набір функцій

$$\Theta_0(x) = 0, \quad \Theta_1^{(k_1)}(x), \quad \Theta_2^{(k_2)}(x), \quad \dots, \quad \Theta_m^{(k_m)}(x),$$

за яким можна побудувати наближений розв'язок задачі у вигляді неперервної функції, зокрема, застосуванням апарату теорії інтерлінації [4].

Збіжність запропонованої схеми до розв'язку задачі (1) – (4) при  $\tau \rightarrow 0$  впливає зі збіжності двобічних наближень відповідно до загальних теорем збіжності метода Роте [5]. Враховуючи викладення в [3], можемо вказати, що достатньою умовою збіжності ітераційного процесу (12) є виконання хоча б однієї з нерівностей  $M \cdot \frac{B}{A} e^{\beta_j} < 1$  або  $\beta_j < 1$ .

#### IV. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Покладемо час моделювання  $t_0 = 1$ , крок сітки  $\tau = 0.2$ , та  $A = 1$ ,  $B = 2$ . Задаємо точність  $\varepsilon = 10^{-4}$ . При обраному кроці сітки необхідно послідовно розв'язати  $m = 5$  крайових задач вигляду (5) – (7).

Графіки послідовних наближень та наближеного розв'язку, отриманого на першому часовому шарі  $t = \tau$ , зображено на рис. 1 (точковим пунктиром зображено верхні наближення, чорною лінією – наближений розв'язок  $\Theta_1(x)$ , пунктиром – нижні наближення).

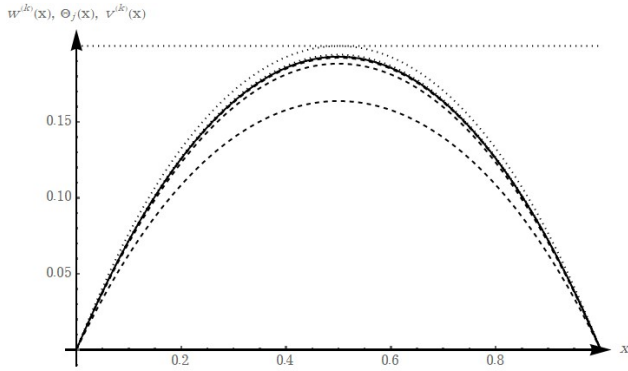


Рис. 1. Графіки верхніх та нижніх наближень до  $\Theta_1(x)$

Аналогічно будуюмо наближення  $\Theta_j(x)$  до функції  $\theta(x, t)$  на часових шарах  $t = \tau \cdot j$ ,  $j = \overline{2, 5}$ . Кількість ітерацій, кінець конусного відрізка  $\beta_j$ , величину  $M \frac{B}{A} e^{\beta_j}$ , оцінку похибки та показник збіжності наведені в табл. 1.

TABLE I. ДАНІ ПРО ІТЕРАЦІЙНИЙ ПРОЦЕС НА КОЖНОМУ ШАРІ

$j$	Кількість ітерацій	$\beta_j$	$M \frac{B}{A} e^{\beta_j}$	Оцінка похибки	$\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$
1	4	0,199954	0,19995	$0,76 \cdot 10^{-4}$	0,166
2	5	0,284618	0,21762	$0,24 \cdot 10^{-4}$	0,176
3	5	0,319482	0,22534	$0,31 \cdot 10^{-4}$	0,180
4	5	0,333770	0,22858	$0,34 \cdot 10^{-4}$	0,182
5	5	0,339621	0,22993	$0,35 \cdot 10^{-4}$	0,183

З табл. 1 бачимо, що аналіз відношень оцінок похибок на кожній ітерації дає можливість стверджувати про збіжність двобічних наближень зі швидкістю геометричної прогресії з показником  $Q \approx 0,177$ .

На рис. 2 наведено графіки наближень на часових шарах  $t = \tau \cdot j$ ,  $j = \overline{0, 5}$ , а на рис. 3 – розв'язок, інтерпольований по часовій змінній за допомогою вбудованих методів математичного пакету Mathematica 13.

#### V. ВИСНОВКИ

У роботі вперше було використано метод Рунге та метод двобічних наближень для розв'язання початково-крайової задачі для напівлінійного рівняння теплопровідності, що виникає при моделюванні процесів самозаймання. Згідно з

методом Рунге після дискретизації було отримано послідовність крайових задач, кожна з яких була зведена до рівняння Гаммерштейна, для якого побудували ітераційний процес двобічного методу з використанням функції Гріна та дослідили умови його збіжності. Розроблений алгоритм реалізували в системі символьної математики Mathematica 13 та провели обчислювальний експеримент за допомогою сервісу Wolfram Cloud. Отримані у роботі результати можна поширити на задачі з іншими крайовими умовами та використати при дослідженні реальних процесів. Це визначає наукову новизну та практичну значущість отриманих результатів.

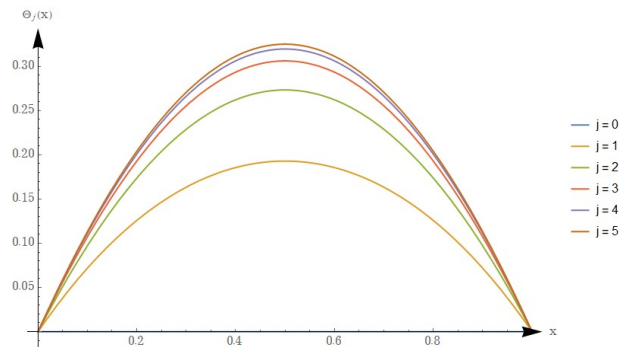


Рис. 2. Графіки наближених розв'язків  $\Theta_j(x)$

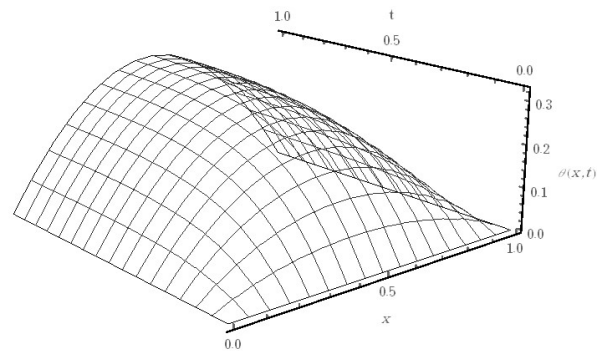


Рис. 3. Графік наближеного розв'язку задачі (1) – (4)

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Mullins B. P. Spontaneous ignition of liquid fuels. / Brian Percival Mullins. – London : Published for and on behalf of the Advisory Group for Aeronautical Research and Development, North Atlantic Treaty Organization, by Butterworths Scientific Publications, 1955. 117 p.
- [2] Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
- [3] Сидоров М. В. Метод двобічних наближень і метод прямих розв'язання задач для одновимірного напівлінійного рівняння теплопровідності // Дослідження в математиці і механіці. 2018. Т. 23, № 2 (32). С. 70-85.
- [4] Литвин О. М. Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В.Л. Рвачова // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2007. Т. 50. № 4. С. 61-82.
- [5] Ладженская О. А. Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений. Труды Московского математического общества. 1958. Т. 7. С. 149-177.

# Моделювання безпекових та економічних ефектів кіберзлочинності

Ковальчук Ольга Ярославівна  
Кафедра прикладної математики  
Західноукраїнський національний університет  
Тернопіль, Україна  
olhakov@gmail.com

## Modeling of Safety and Economic Impact of Cybercrimes

Olha Kovalchuk  
Department of Applied Mathematics  
West Ukrainian National University  
Ternopil, UKRAINE  
olhakov@gmail.com

**Анотація.** У роботі розглянуто вплив безпекових та економічних ризиків кіберзлочинності на безпеку держави. Побудовано візуальні моделі для оцінювання взаємозв'язку між рівнем кіберзахисту країн світу та рівнем державної безпеки. Досліджено загрози використання ресурсів даркнет для кібербезпеки країни. Для оцінювання впливу вартості різних видів кібератак та їх наслідків на загальну вартість кібератак розроблено багатофакторну регресійну модель. Для виявлення основних взаємозалежностей між оцінками рівня кіберзлочинності країн світу та вимірниками економічного розвитку країн побудовано канонічну модель.

**Abstract.** Cybercrimes and the effects that they cause became one of the most risks for the personal safety of citizens, organizations, internal state security, and global security. Cyberattacks are tools in political, economic, and interstate conflicts. The impact of safe and economic cyber-crimes risks on state safety is considered in this research. Estimation visual models for the relation between the cyber safety level of countries and state safety level are created. Threats of utilizing Worldwide Anonymous Internet resources to the cyber security level of countries are researched. The multifactor regression model for evaluation of the impact of the cost of different types of cyber-attacks and their effects on total cost is assembled. The canonical model for the determination main dependence between the cybercrime estimation of countries and economic development measures is created. The obtained results can provide significant information to support decision-making regarding the adoption of an effective cyberspace protection strategy at the national and international levels.

**Ключові слова:** кіберзлочини; кібербезпека; державна безпека; економічний вплив; моделювання.

**Keywords:** cybercrimes; cybersecurity; state security; economic impact; modeling.

I.

ВСТ

УП

Стрімкий розвиток інформаційно-комунікаційних технологій та глобальний перехід людства у віртуальний простір спровокували зростання кіберзлочинності. Цей процес прискорила і пандемія COVID-19. Зросли частота та ефективність кібератак. Нові технології надали нові можливості розширити ландшафт кіберзагроз і становлять виклики для безпеки окремих осіб, держав, бізнесу та світової спільноти загалом. Темпи інновацій у таких сферах, як штучний інтелект (AI), Інтернет речей (IoT) та біотехнології створюють нові виклики, які будуть посилюватися у світі, де зростає геополітична напруга, нерівність та соціальна нестабільність. Серед найбільших глобальних ризиків у 5-річній перспективі вже кілька років поспіль сьоме місце займають проблеми кібербезпеки [1]. Кіберзлочинність становить більшу небезпеку для сучасного суспільства, ніж економічні та геополітичні проблеми, і надалі залишатиметься одним із найбільш складних викликів глобальній безпеці XXI століття.

Рівень безпеки держав світу є зваженою оцінкою кожного із трьох факторів: особиста безпека, ризик стихійних лих, війна та мир. В сучасному цифровому суспільстві більшість даних, подій та розмов зберігаються у кіберпросторі. Навіть війни, зокрема й інформаційні, відбуваються у віртуальній реальності. Кібертероризм став звичним явищем для цифрового суспільства [2]. Кіберзлочини приносять значні збитки економікам та інфраструктурі регіонів, є серйозною загрозою для сталого розвитку країн та геополітичної моделі світу загалом

## II. МОДЕЛЮВАННЯ ЕФЕКТИВ КІБЕРЗЛОЧИННОСТІ: БЕЗПЕКОВИЙ ВИМІР

Інтернет-технології надають поштовх для розвитку економік та демократій, особливо в країнах, що розвиваються. Масштаби поширення IoT та сумісності різноманітних електронних датчиків і пристроїв створили небезпечне середовище, яке є надзвичайно вразливим до витоків особистої інформації. Порухення конфіденційності даних стає більш серйозним і становить небезпеку критичній кількості людей у всьому світі. Кібератаки, які раніше вважали великомасштабними, сьогодні сприймають як норму. Інформаційні загрози постійно ускладнюються. Сучасні хакери стали більш професійними та гнучкими. Вони використовують для здійснення атак передові технології, такі як машинне навчання та big data [3].

Регулярні хвилі гучних кібератак з широким спектром завдань – від руйнування критичної інфраструктури до впливу на президентські вибори в США та Брекзїт – привернули увагу суспільства до необхідності посилення заходів інформаційної безпеки. Технологічний прогрес також сприяв значному посиленню промислового шпигунства, яке може розвиватися далі в епоху використання кібертехнологій, що фінансуються державами [4]. Серйозну загрозу глобальній безпеці становить і впровадження штучного інтелекту в системи озброєння держав світу та можливе використання робототехніки окремими державами чи терористами, несанкціонований доступ до супутникових систем та сховищ даних.

Світова злочинна спільнота значно виграє від експоненційного зростання технологій big data та проривів четвертої промислової революції. IT підживлюють нові кримінальні моделі, створюючи проблеми для правоохоронних органів. Однією з найбільших кібератак, спрямованих на компанії у Європі, Близькому Сході та США, стала кібератака, яка відбулася у червні 2017 року, і відома під назвою "вірус Петя". Це створило загрозу як для працівників, так і для клієнтів компаній. Атака спричинила припинення роботи комп'ютерів і торкнулася глобальних та національних організацій, включаючи Український національний банк, британську рекламну фірму "WPP" та логістичну компанію "Maersk" [5].

Хакери успішно атакують великі міста, уряди, підприємства, лікарні та школи у всьому світі. Вони блокують тисячі користувацьких комп'ютерів і вимагають значні суми викупу. Вартість збитків від таких атак складає мільйони доларів і впливає на багато критичних систем. Міста та уряди змушені підписувати вартісні поліси на кіберстрахування. Вразливими до кібератак є й дані соцмереж, які зберігаються у хмарних сховищах [6]. Надмірність даних ускладнює шифрування, становить серйозну загрозу конфіденційності інформації. Глобалізація спілкування в режимі реального часу спричиняє розповсюдження онлайн-підробок та масової дезінформації. Конвергенція експоненціальних технологій прискорює появу великої загрози: дефіциту правдивості даних, а отже, дефіциту довіри [3]. Фальшиві новини, як правило, викликають потужні емоції, а дезінформація впливає на віру чи поведінку громадян через цілеспрямовані підробки. Все це становить серйозну загрозу для особистої безпеки громадян та суспільства в цілому.

Одним із базових показників, що надають інформацію про стан національної безпеки, є Індекс Глобальної Безпеки (Global Safety Index, GSI) [7]. Це орієнтир для розробки безпекових стратегій і вибору правових та політичних векторів держав світу на національному рівні.

Для моніторингу стану кібербезпеки країн традиційно використовують Індекс Глобальної Кібербезпеки (Global Cybersecurity Index, GCI). Це комплексний показник, що відображає 5 аспектів забезпечення стратегії захисту від кіберзлочинності: правовий, технічний, організаційний, розбудову потенціалу та міжнародну співпрацю [8]. По суті це так званий негативний індекс – він вимірює рівень ризику. Чим меншим є його значення, тим безпечніша країна. За допомогою методів візуального моделювання встановлено пряму кореляцію між рівнем кіберзахисту та рівнем безпеки для більшості аналізованих країн (Fig. 1).

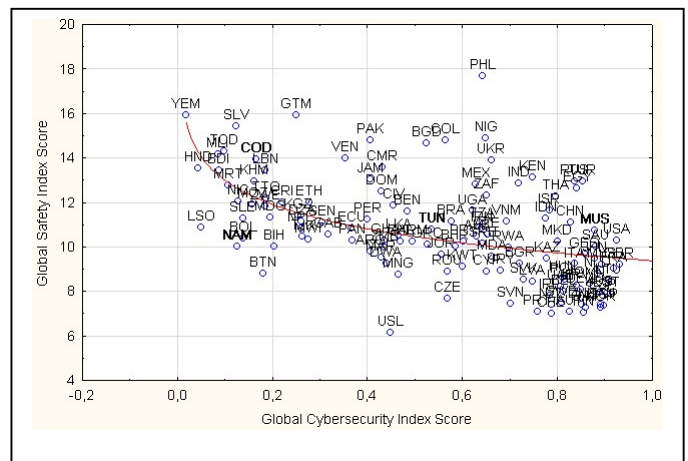


Fig. 1. Графік залежності значень GCI та GSI для країн світу

Для дослідження залежності рівня безпеки держави від рівня кіберзахисту використано аналіз відповідності GSI та GCI для 128 країн світу [9]. Отримані результати дають можливість пояснити 91,84% відмінностей між групами. Виявлено щільну залежність між рівнем кіберзахисту країни та рівнем її загальної безпеки (Fig. 2).

Інформаційні технології становлять ризики і для особистої безпеки громадян. Сьогодні соціальними мережами користуються 3 млрд. людей. Це майже половина населення планети [10]. Вони щоденно публікують замітки, обмінюються фото, реагують на дописи друзів, а ще слідкують за життям чужих людей. Дуже важко зберегти анонімність у такому світі. Це складає суттєву загрозу особистій безпеці кожного з користувачів Internet

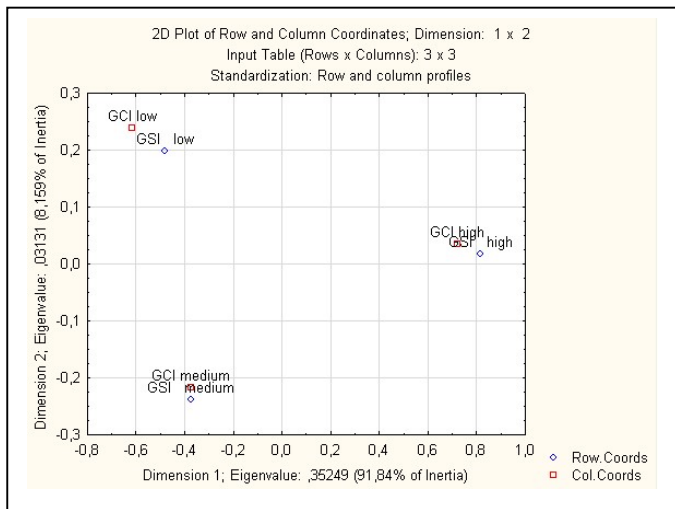


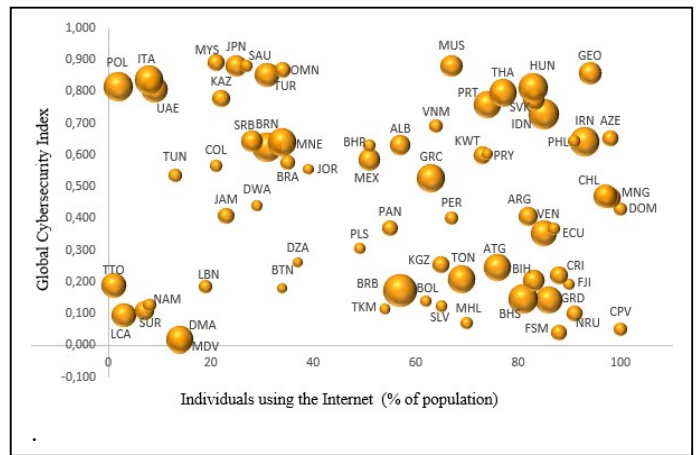
Fig. 2. Діаграма залежності рівнів GCI та GSI для країн світу

Насправді більша частина інформації в Інтернеті захована далеко на сайтах, і звичайні пошукові системи не мають доступу до неї. Контент on the Всесвітньої мережі (World Wide Web), який не індексується стандартними пошуковими системами, називають Invisible Web, Deep Net, Deep Web and Dark Web. Dark Web – це зашифрована мережа веб-сайтів, доступ до яких можливий лише за допомогою спеціального захищеного браузера, наприклад Tor. Tor – система проксі-серверів, яка дає можливість встановлювати анонімне мережеве з'єднання, захищене від прослуховування. Вона не регулюється жодним урядом і не цензурується [11].

Dark Web став майданчиком для розповсюдження фальшивих новин та дезінформації, скоєння економічних злочинів, неправомірних дій та навіть терактів. Найкращий спосіб забезпечити безпеку - це використовувати VPN (онлайн-сервіс віртуальна приватна мережа, що створює безпечно з'єднання з іншою мережею через Інтернет, приховує IP-адресу та шифрує трафік, щоб ефективно захистити користувача від провайдера та уряду) і Tor, щоб приховати свою IP, активність в Інтернеті та своє реальне місцезнаходження. Таким чином, інші користувачі Dark Web не можуть простежити вас, а ваш провайдер та уряд не можуть бачити, що користувачі роблять онлайн.

Кіберзлочинність активізувалась у 2020, однак цього пандемічного року весь світ був онлайн, і першочергове значення мала безпека віртуального світу. Для дослідження можливої залежності рівня кіберзахисту країни від кількості користувачів Всесвітнього Анонімного Інтернету (Worldwide Anonymous Internet) застосовано методи візуального моделювання інтенсивності та географії використання простору Dark Net у 2020 році для 234 країн світу [12].

Щоб оцінити безпечність Анонімного Інтернету, побудовано діаграму використання Tor у 2020 році в розрізі індивідуального використання Інтернету (у % до загальної кількості населення) у 2020 році та Індекс Глобальної Кібербезпеки 2020 [13] (Fig. 3). Розмір бульбашки відповідає середньому значенню кількості користувачів Tor на день у розрахунку на 100 тисяч користувачів Інтернет у 2020 році для кожної окремої країни.



Побудована візуальна модель свідчить, що інтенсивність використання сайтів Anonymus Інтернету

Fig. 3. Середня денна кількість користувачів Tor на 100 тис. користувачів Інтернет у 2020 році

громадянами конкретної країни не корелює ні з чисельністю їх присутності у глобальній мережі, ні з кібербезпекою цієї країни. Це підтверджує той факт, що Dark Web не є основним плацдармом для кіберзлочинців. Вони можуть здійснювати свої атаки і прозора. Більшість клієнтів Tor є легальними і використовують Dark Web, в основному, для забезпечення анонімності своїх дій, що так важливо у сучасному небезпечному цифровому світі.

### III. МОДЕЛЮВАННЯ ЕФЕКТІВ КІБЕРЗЛОЧИННОСТІ: ЕКОНОМІЧНИЙ ВИМІР

Щороку світ потерпає від тисяч кіберзлочинів, збитки від яких оцінюють від кількох сотень до мільйонів доларів. Вартість та фінансові ризики глобальної кіберзлочинності продовжують стрімко зростати і оцінюються мільярдами доларів на рік. Затримка світової економіки через кіберзлочини щорічно складає не менше трильйона доларів. Це більше одного 1% світового ВВП. Грошові втрати від кіберзлочинності вже сягають трильйона доларів та додаткових сотні мільярдів долаоів на глобальні витрати на кібербезпеку [14]. Методи сучасних кіберзлочинців стали більш досконалими, а схеми викупів та фішингу – таргетованими та більш дієвими. і найбільшим мотиватором для більшості кібератак є фінансова вигода.

Замість торгівлі на торгових майданчиках, злочинці перейшли на "закриті" форуми чатів, спільноти лише для запрошених та зашифровані програми. Загальний обсяг продажів Dark Net-ринку зріс у рази. Кіберзлочинна підпільна економіка змінюється щохвилини. Постійно розвивається інструменти та методи кіберзлочинців, які можуть за частку секунди поставити когось під загрозу.

У роботі здійснено спробу оцінити деякі аспекти економічного ефекту сучасної кіберзлочинності [15]. За даними Cost of Cybercrime Study [16] побудовано багатофакторну регресійну модель для встановлення внеску у загальні втрати (TC) кібератак вартості наслідків IT-інцидент: збитки бізнесу (BD), втрата інформації (IL), втрата доходів (RS) та пошкодження обладнання (ED), спричинених різними видами кібератак (шкідливе програмне забезпечення, веб-атаки, відмова в обслуговуванні, шкідливі інсайтери, фішинг і соціальна

інженерія, викрадені пристрої, програми-вимагачі та ботнети). Отримано наступну економетричну модель:

$$TC = 0,001 + 0,54 \cdot IL + 0,12 \cdot RS + 0,13 \cdot ED + 0,33 \cdot BD.$$

Втрата інформації чинить основний вплив на загальну вартість кібератак, завжди спричиняє зменшення доходів та додаткові витрати для бізнесу.

Проведено аналіз залежностей між основними показниками економічного розвитку країн: внутрішній валовий продукт (*GDP*) загальний державний борг у % від ВВП (*GGD*) та вимірниками кіберзлочинності: інфляція споживчих цін, у % (*CPI*), імпорт (*I*), експорт (*E*), прямі іноземні інвестиції, у дол. США (*FDI*), загальна вартість кіберзлочинів, у дол. США (*TC*) та загальна кількість запитів від програм-вимагачів (*TS*) для 10 країн з найбільшими збитками від кіберзлочинів [16]. Отримано наступну канонічну модель:

$$Z_y = 0,31 \cdot GDP + 0,19 \cdot GGD + 0,29 \cdot CPI + 0,28 \cdot FDI +$$

$$0,6 \cdot E + 0,23 \cdot I,$$

$$Z_x = 0,98 \cdot TC + 0,19 \cdot TS.$$

Побудована модель дає підстави стверджувати, що загальна вартість кіберзлочинів суттєво впливає на найважливіші показники економічного розвитку країн. У той же час базові економічні вимірники чинять окремі впливи на досліджувані ефекти кіберзлочинності: IT-інциденти спрямовані, в більшості, на багаті високорозвинені країни, на атаках на які можна більше заробити. Однак, для бідних країн з низьким рівнем розвитку економіки кіберзлочини становлять значно більшу небезпеку. Вони не можуть виділити достатню кількість коштів на кібербезпеку і знешкодження наслідків таких злочинів.

#### IV. ВИСНОВКИ

Сьогодні як ніколи нам потрібний безпечний цифровий світ. Кіберзлочинність підриває національну безпеку країн світу завдає шкоди громадській безпеці, та спричиняє значні збитки економіці. Результати проведених досліджень свідчать, що рівень кіберзахисту держави є важливим фактором національної безпеки для країн світу. Dark Web став майданчиком для розповсюдження фальшивих новин та дезінформації, скоєння економічних злочинів, неправомірних дій та терактів. Однак Dark Web не є основним плацдармом для кіберзлочинців. Вони можуть здійснювати свої атаки і прозоро. З аналітичного запису розробленої регресійної моделі можна зробити висновок, що основну частку загальної вартості втрат від кібератак складає вартість та наслідки втрати інформації. Побудована канонічна модель дає підстави стверджувати, що економічні ефекти кіберзлочинності корелюють з базовими вимірниками економічного розвитку країн.

Отримані результати є важливими для розуміння динаміки та масштабів загроз кіберзлочинності і можуть бути використані для формування стратегій національної безпеки державами світу. Запропонована багатofакторна регресійна модель може бути використана, наприклад, компаніями при розподілі коштів за різними видами кіберзахисту, а канонічна модель – для прийняття дієвої політики щодо кіберпростору та формування надійної бази для законодавчих актів та регуляторних дій на національному та міжнародному рівнях. Подальші

дослідження з цієї тематики можуть надати правоохоронним органам та урядам важливу інформацію для розробки законодавчих актів щодо інтернет-безпеки та формування адекватної безпекової політики у сфері кіберзахисту.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] World Economic Forum, "The Global Risks Report 2019," World Economic Forum, 2021. [Online]. Available: <https://www.weforum.org>.
- [2] O. Kovalchuk, and M. Shynkaryk, "The Macroeconomic Model of Modern Global Terrorism," Proceedings of the 10th International Conference "Advanced Computer Information Technologies", pp. 657-661, 2020.
- [3] O. Kovalchuk, and M. Masonkova "Big Data Technologies in Big Political Game," Proceedings of the International Scientific Young Scientists Conference "Computer Science, Information Technologies and Management Systems", 2018.
- [4] Europol, "Internet Organised Crime Threat Assessment (IOCTA) 2019," Report IOCTA.
- [5] "Petya cyber attack EY response to the global cybersecurity incident," June 2017. EYGM Limited [Online]. Available: <https://www.ey.com/cybersecurity>.
- [6] Gordon Flesh Company. Inc. "World 5 Biggest Cyberattacks of 2019 (So Far) and Lessons Learned," [Online]. Available: <https://www.gflesh.com/biggest-cyberattacks-2019>.
- [7] Numbeo. "Safety Index by Country 2022," [Online]. Available: [https://www.numbeo.com/crime/rankings\\_by\\_country.jsp](https://www.numbeo.com/crime/rankings_by_country.jsp)
- [8] International Telecommunication Union. Global Cybersecurity Index 2020. ITU <https://www.itu.int/en>.
- [9] O. Kovalchuk, M. Shynkaryk, M. Masonkova, and S. Banakh, "Cybersecurity: technology vs safety," Proceedings of the 10th International Conference "Advanced Computer Information Technologies", pp. 765-768, 2020.
- [10] The World Bank, "Individuals using the Internet (% of the population)," The World Bank, 2022. [Online]. Available: <https://data.worldbank.org>.
- [11] K. Shubhdeep, and R. Sukhchandan, "Dark Web: A Web of Crimes," Wireless Personal Communications, vol. 112(4), 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s11277-020-07143-2>.
- [12] O. Kovalchuk, M. Masonkova, and S. Banakh, "The Dark Web Worldwide 2020: Anonymous vs Safety," Proceedings of the 11th International Conference "Advanced Computer Information Technologies", pp. 526-530, 2021.
- [13] The World Bank, "Global Cybersecurity Index 2020," The World Bank, 2020. [Online]. Available: <https://data.worldbank.org>.
- [14] McAfee. Z.M. Smith, Eugenia Lostri, and J.A. Lewis. Report. The Hidden Costs of Cybercrime. 2020. <https://www.mcafee.com>.
- [15] O. Kovalchuk, M. Shynkaryk, and M. Masonkova, "Econometric models for estimating the financial effect of cybercrimes," Proceedings of the 11th International Conference "Advanced Computer Information Technologies", pp. 361-384, 2021.
- [16] Accenture. The Cost of Cybercrime. Night Annual Cost of Cybercrime Study. Accenture. 33 p. 2021. <https://www.accenture.com>.

# Mathematical model of multiobjective combinatory optimization problem and practical application

Koliechkina L.M.  
Liudmyla Koliechkina  
Algorithms and Databases Department  
University of Lodz,  
lkoliechkina@gmail.com

Khovben S.V.  
Department of Computer Sciences and Information  
Technologies  
Poltava University of Economics  
and Trade  
Poltava, Ukraine  
hovben1996@gmail.com

**Abstract**—The setting of multiobjective problems on the combinatorial configuration of placements and their properties are given. A mathematical model of the combinatorial optimization problem and its practical use are proposed. An algorithm for solving a multiobjective extremal problem on a combinatorial configuration of placements has been developed.

**Keywords**— configuration of placements, multiobjective optimization, grid-graph.

## I. INTRODUCTION

As you know, modeling is the process of analyzing and studying a system by building and research its model, which is carried out to achieve a certain goal. This systems is a set of interconnected mathematical and logical expressions that usually reflect real phenomena or processes. According to the form of representation, the following groups of models are distinguished: numerical, formal-logical and analytical. There are a large number of industries that require the creation of mathematical models. When solving a specific applied problem, it is necessary to describe a mathematical model and analyze its properties [1].

Multiobjective optimization problems with various constraints are quite well-known and often used.

The article considers the problem of combinatorial optimization, which can be a model for applied problems [2]. In particular, the tasks of selecting parameters of computer networks, software and optimizing information systems.

## II. THEORETICAL KNOWLEDGE

Combinatorial configuration is a certain set of elements formed from the elements of a given basic set  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Let us denote it by an ordered set  $w^k = (w_1^k, \dots, w_\eta^k)$ , where  $\eta \in \{1, \dots, n\}$  – the number of elements in  $w^k$ ,  $W = \{w^k\}_1^q$  – set of combinatorial configurations [3, 4].

$C$  - set of the form  $E = \{x \in R^N : x\}$ , where  $x$  –  $e$ -configuration view  $\langle \psi, \phi, A^*, \Lambda \rangle$ , are called a set of  $e$ -configurations of placements, if it contains elements whose inducing sets are different:

$$\exists x, y \in E \quad \tilde{A}(x) \neq \tilde{A}(y).$$

## A. Methods of multiobjective optimization

Among the methods of multiobjective optimization, those that are classified from the point of view of determining the advantage in solving engineering tasks should be singled out [5]. Let's consider some approaches in solving multi-criteria optimization problems.

Method of branches and bounds. The first publications on the branch-and-bound method date back to the early 1960s. The method of branches and bounds is one of the main methods used in the numerical solution of discrete optimization problems. The essence of the method is to sequentially divide the set of admissible solutions into subsets with subsequent screening of subsets that do not contain a solution [6].

The method of successive exclusion of possibilities is one of the most common methods of decision-making. It boils down to the following actions:

- the set of alternatives is divided into subsets by introducing additional statements characterizing each separate subset;
- part of these subsets is sought to be excluded, using the conditions of incompatibility (logical contradiction) of statements relating to the elements of the subset and statements characterizing the requirements for the solution;
- with the remaining sets, do a similar procedure of division and exclusion.

Based on the experience of mathematically using the principle of sequential exclusion of possibilities when solving a number of optimization problems of planning and design in 1961, V.S. Mikhalevich together with N.Z. Shor proposed a scheme of sequential analysis of options, which was further developed when solving the problems of optimal design of roads, electric and gas networks, determining the shortest paths on networks and critical paths in network graphs, solving problems of production placement, the theory of schedules and calendar planning, as well as a number of other discrete problems.

The basis of the method of sequential analysis of options is the idea of presenting the solution process in the form of a multi-stage structure, which resembles the structure of a complex experience. Each degree is associated with checking the presence of certain properties of a subset of options and leads either to a direct reduction of the initial set of options, or

sets the possibility of such reduction in the future. Based on the theoretical and practical analysis of the given task, it is first necessary to clearly formulate what special properties the desired option should possess. Then it is necessary to identify as many signs as possible, which make it possible to establish that this option is not the desired one. Among these signs, those that are the easiest to check and are characteristic of as many options as possible are selected at the same time. After that, the construction of the numerical scheme of the solution consists in choosing a rational order of checking the signs, which allows you to filter out unsuitable options and find the optimal solution in the shortest possible time.

**Cutting methods.** Among the exact methods of widespread development, various methods of clipping, the idea of which was first proposed by Danzig, and then developed in many other works, in particular, by Gomorrah, were acquired. The idea of problem regularization is used for the group of cutting plane methods. It consists in immersing the initial discrete region of admissible solutions into the corresponding continuous convex region, that is, in temporarily discarding the discreteness conditions. Next, standard optimization methods are applied to the obtained regular problem. It should be noted that the efficiency of the cutting method is directly dependent on the efficiency of the method of constructing the cuttings, and this causes certain difficulties [7].

#### B. Optimization problems on the combinatorial configuration of placements

There are a large number of problems that are considered on the combinatorial configuration of placements. A grid graph can be constructed for certain optimization problems of the described configuration [8, 9, 10].

Let  $Gr(X', Y)$  – graph, whose vertices correspond to the elements of the set  $X' \subseteq X$  – a subset of some  $e$ -configuration, and  $Y$  – view conditions:

$$\langle \tilde{v}_i^j, \tilde{p}^h \rangle, \tilde{v}_i^j \in V_i, \tilde{p}^h \in p^h \quad A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}.$$

Then if the conditions are fulfilled for the vertex  $Gr(X', Y)$ :

$$\begin{aligned} t + h &< m, \\ x_{j_1} &\leq x_{j_2} \leq \dots \leq x_{j_t}, \\ \text{at } j_1 &\leq j_2 \leq \dots \leq j_h, \\ \tilde{p}^h &= \{x'_{m-h+j}\}, j \in J_h, \\ x_{t+1} &\leq x_{t+1} \dots \leq x_{m-h}, \end{aligned}$$

and for the main vertex – the condition:

$$\begin{aligned} x_{j_1} &\leq x_{j_2} \leq \dots \leq x_{j_t} \leq x_{t+1} \leq x_{t+1} \dots \leq x_{m-h}, \\ \text{at } j_1 &\leq j_2 \leq \dots \leq j_h, \end{aligned}$$

and each of them is generated by a sequence of transpositions:

$$x_{i'} \leftrightarrow x_{i'-1} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow x_{h+1} \leftrightarrow x_{j_i} \leftrightarrow x_{j_i-1} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow x_{j_2} \leftrightarrow x_{j_1},$$

then we will call this graph a grid graph of euclidean combinatorial configuration.

#### C. Properties of the structural graph for combinatorial configuration of placements.

Let  $X$  – the set of  $e$ -configurations of placement  $A_m^m$ , for which is constructed a set of grid graphs:

$$Gr_i^X(X_i, Y_i),$$

$$i \in J\gamma, \text{ that } G^X = Gr_1 \cup Gr_2 \cup \dots \cup Gr_\gamma,$$

and for which is fulfilled the conditio:

$$t_i = \tilde{t}, h_i = \tilde{h}, i \in J\gamma,$$

then the number of grid graphs is determined by the formula:

$$\gamma = \frac{\tilde{t}! \cdot m'}{(m - \tilde{h})! (m' - m)!}$$

Structural graphs  $e$ -configurations of permutations and placements are built according to the same rules and the number of vertices in the structural graph from  $\tilde{h}$  fixed coordinates depends not so much on the number of elements of the creative base  $e$ -configurations.

Із правил побудови структурного графу  $e$ -конфігурацій впливає така теорема.

From rules for constructing a structural graph of  $e$ -configurations define the following theorem.

*Theorem 1 [11].* Let  $G_S^X(\tilde{V}, \tilde{U}, \tilde{h})$  – structural graph of the set of  $e$ -configurations  $X$ , the basis of which contains  $m'$  elements, then cardinality of the set of vertices  $G_S^X(\tilde{V}, \tilde{U}, \tilde{h})$  is calculated by the formula:

$$|\tilde{V}| = \frac{2 \cdot m'}{(m' - \tilde{h})!}.$$

The obtained properties help to estimate the number of vertices of grid graphs and structural graphs, necessary for consideration, which allows us to draw conclusions about the complexity of the methods, that use the corresponding graphs of  $e$ -configurations.

Using grid graphs and structural graphs allows to build new methods solving the vector problem of linear combinatorial optimization.

#### III. FORMULATION OF THE MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION METHOD

This paper considers the problem of multiobjective optimization, which can be formulated as follows:

$$\min \left\{ f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x}) \right\},$$

$$\vec{x} \in S, \text{ where } f_i: R^n \rightarrow R \text{ ue } k(k \geq 2)$$

target functions. Solution vectors  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  belong to the non-empty space of  $S$ .

The task of multicriteria optimization consists in finding a vector of target variables, which satisfies the imposed constraints and optimizes the vector function, elements of which correspond to the target functions [11, 12].



Let  $Z' = X \subseteq R^m$  the set of euclidean combinatorial configurations in the space  $R^m$ , and  $Z = D \subseteq X$  – set of valid values of  $e$ - configurations, which is distinguished from  $X$  by means of additional constraints.

The display of  $\varphi_i : \Pi' \rightarrow R^1, i \in J_n$  will correspond functions  $f_i : X \rightarrow R^1, i \in J_n (f_i(x))$ . Then the task will take shape:

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \rightarrow extr, \quad (1)$$

$$x \in D \subseteq X. \quad (2)$$

Problem (1)-(2) is a vector Euclidean combinatorial optimization problem (ECOP).

Assume that all components of the vector optimality criterion are linear functions, namely:

$$f_i(x) = \langle c_{ij}x_j \rangle, i \in J_n, j \in J_m, \quad (3)$$

and  $D$  stands out from  $X$  using linear constraints.

Then problem (1)-(2) takes the form: provided (4) find the set  $X^*$  of optimal values of the functions:

$$f_i(x) = \langle c_{ij}x_j \rangle \rightarrow extr, i \in J_n, j \in J_m, \quad (4)$$

where  $extr = \{\min, \max\}$  – direction of optimization,  $D$  is formed by the constraints of the view:

$$\langle a_{ij}x_j \rangle \leq b_i, i \in N_k, j \in N_m. \quad (5)$$

Problem (2)-(4) is called a multiobjective problem of linear Euclidean combinatorial optimization (MPLECO).

#### IV. MATHEMATICAL MODEL OF THE MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION PROBLEM ON THE COMBINATORY CONFIGURATION

The problem of building a mathematical model that optimizes the process of distributing computer network elements is relevant. Such a network is understood as a group of computers connected to each other by means of network equipment. Thus, it will be appropriate to model the organization of interaction between computer network elements using a graph on a combinatorial configuration of placements.

Consider a network containing a large amount of hardware and software that needs to be distributed. The main characteristics for ensuring the maximum speed of the network will be considered the load on the system and the time until the network elements are fully loaded.

Modern computer hardware and software require an appropriate maximum input data threshold and minimum download speed to transmit information.. Fast and productive operation of network equipment is ensured by checking the  $n$  parameters. To check such parameters, used  $k$  restrictions, which regulate the optimality and expediency of using certain parameters. The given optimality condition for the  $i$ - th characteristic  $c_i, i \in N_k$  and matrix  $\|x_{ij}\|$ , each element of which is either zero or one depending on whether the maximum download speed of the  $j$ - th parameter  $i$ -th characteristic. For assessment  $j$ -th parameter  $i$ -th

characteristic used the value  $q_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$  ( $\alpha_{ij}$  – the probability of exceeding the maximum data input threshold, error of the 1 st kind,  $\beta_{ij}$  – the probability of overloading the network with redundant hardware, error of the 2 nd kind).

It is necessary to distribute the parameters in such a way that the total load on the computer network under the condition of its maximally productive operation approaches the minimum and does not exceed the given value  $Q$ .

According to the nature of the task, it can be formed as a task on placements.

**Mathematical model.** Must be determined:

$$C = \sum_{i=1}^k c_i y_i \rightarrow \min,$$

$$Y = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k q_{ij} z_{ij} \rightarrow \min$$

with additional restrictions on the amount of hardware and network load:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k z_{ij} &= 1, \quad j \in N_n \\ z_{ij} &\leq x_{ij} y_i, \quad i \in N_k, j \in N_n \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k q_{ij} z_{ij} &\leq Q \\ y_i &= \{0, 1\}, \quad i \in N_k. \end{aligned}$$

This mathematical model is multiobjective and can be interpreted as a problem on multiple placements. During its development, 2 parameters were applied - the amount of hardware and the time until all system elements are fully connected, which are necessary to optimize the speed of the computer network.

#### V. CONCLUSIONS

The problem of solving multiobjective problems on the combinatorial configuration of placements is relevant. A general solution algorithm has been developed for this type of problem, which will allow to optimize the calculations and numerical experiments have been carried out. This algorithm uses a routine based on the modified coordinate method with search optimization. During the operation of the algorithm, the points of reaching the extremum for the corresponding values of the function are analyzed and cutting off types of graph vertices that do not satisfy the constraint conditions. Therefore, the research direction of this issue and deepening into the optimization component of the algorithm is promising.

#### REFERENCES

- [1] Emmerich, M., Deutz, A., 2018. A tutorial on multiobjective optimization: fundamentals and evolutionary methods. Nat. Comput. 17.
- [2] Di Puglia Pugliese, L., Granat, J., Guerriero, F., 2020. Two-phase algorithm for solving the preference-based multicriteria optimal path problem with reference points. Comput. Oper. Res. 121, 104977.
- [3] Böckler, F. K., 2018. Output-Sensitive Complexity of Multiobjective Combinatorial Optimization with an Application to the Multiobjective Shortest Path Problem (Ph.D. thesis). Technische Universität Dortmund.
- [4] Bernhard Korte and Jens Vygen. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms. Springer, 5th edition, 2012.
- [5] Odu G. O. and Charles-Owaba O. E. (2013). Review of Multi-criteria Optimization Methods – Theory and Applications. IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN), vol. 3, Issue 10, pp. 01 – 14.

- [6] Pardalos P.M. Handbook of combinatorial optimization / P.M. Pardalos, D-Z. Du, R.L.Graham. – New York: Springer, 2013. – 3409 p.
- [7] Panos M. Pardalos, Antanas ilinskas, and Julius ilinskas. Non-Convex Multi-Objective Optimization. Springer Optimization and Its Applications. Springer International Publishing, 2017.
- [8] Kolietchkina, L.N., Dvirna, O.A. & Khovben, S.V. A Two-Step Method for Solving Vector Optimization Problems on Permutation Configuration. Cybern Syst Anal57, 442–454 (2021).
- [9] Pichugina O., Kolietchkina L. (2021) Linear constrained combinatorial optimization on well-described sets. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 1099 (2021) 012064 IOP Publishing doi:10.1088/1757-899X/1099/1/012064
- [10] Kolietchkina L., Pichugina O. Mathematical modeling in the optimization of telecommunication networks. Information technologies and computer modeling: materials of the International Scientific and Practical Conference. Ivano-Frankivsk: Suprun V.P., 2016. – 232p.
- [11] Dvirna O. A. (2019). The models and methods of solving's of vector problems of discrete optimization on combinatorial configurations [Dissertation for the degree the Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Kharkiv National University of Radio Electronics]. <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/7650>
- [12] Kolietchkina L., Pichugina O. A Horizontal Method of Localizing Values of a Linear Function in Permutation-Based Optimization. Optimization of Complex Systems: Theory, Models, Algorithms and Applications. Cham, Springer 2020 Vol. 991, P. 355-364.

# Two-sided approximations analysis for the generalized nanoelectromechanical systems using the Green-Rvachev's quasi-function method

Oksana Konchakovska  
Department of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
oksana.konchakovska@nure.ua

## Двобічний апроксимаційний аналіз узагальнених наноелектромеханічних систем методом квазіфункцій Гріна-Рвачова

Оксана Кончаковська  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Харків, Україна  
oksana.konchakovska@nure.ua

**Abstract**—The application of the method of two-sided approximations based on the use of the Green-Rvachev's quasi-function for the numerical analysis of the mathematical model of the nanoelectromechanical system is considered.

**Анотація**—Розглянуто застосування методу двобічних наближень на основі використання квазіфункцій Гріна-Рвачова для чисельного аналізу математичної моделі наноелектромеханічної системи.

**Keywords**—two-sided approach method; Green-Rvachev's quasi-function method; strongly invariant cone segment; heterotone operator; nanoelectromechanical system

**Ключові слова**—метод двобічних наближень; метод квазі-функцій Гріна-Рвачова; сильно-інваріантний конусний відрізок; гетеротонний оператор; наноелектромеханічна система

### I. INTRODUCTION

The development of technologies makes for microelectromechanical systems with electrostatic control (MEMS) are becoming increasingly used in many devices, in particular switches, micromirrors, and microresonators, due to the possibility of the electrostatic control dominating other types of control [1].

In reducing device sizes from the micro- to the nanoscale, additional forces acting on nanoelectromechanical systems (NEMS), such as the Casimir force, should be considered. The

Casimir force is determined by the force of attraction of two uncharged material bodies due to the modification of zero energy. The existence of the Casimir force imposes severe restrictions on the miniaturization of electrostatic devices. At the nanoscale, the Casimir force can overcome the elastic force in the device and lead to the sticking of the device components during the manufacturing process [2].

Modifications of the simplest mathematical model of electrostatic MEMS/NEMS and their numerical analysis have been considered in many works, this work continues the research started in [3], where the relevant one-dimensional problem was considered.

The purpose of this work is to extend the application of the method of two-sided approximations to the numerical analysis of problems arising in the mathematical modeling of generalized NEMS.

### II. STATEMENT OF THE PROBLEM

Let us consider a nonlinear boundary value problem, which is a generalized model of an electrostatic NEMS:

$$-\Delta u = \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u)^2} + \frac{\mu g(\mathbf{x})}{(1-u)^4} + P(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (3)$$

where  $\Omega$  is a flat domain with a piecewise smooth boundary  $\partial\Omega$ ;  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ;  $u$  – membrane deflection value;  $P(\mathbf{x})$  – external pressure; functions  $f(\mathbf{x})$  and  $g(\mathbf{x})$  describe the dielectric properties of the membrane; parameters  $\lambda$  and  $\mu$  characterize Coulomb forces and Casimir forces, respectively

$$\lambda = \frac{\varepsilon_0 V^2 L^2}{2\sigma_0 h g_0^3}, \quad \mu = \frac{\eta c \pi^2 L^2}{240\sigma_0 h g_0^5},$$

$\sigma_0$  is a voltage in the membrane,  $g_0$  is the distance between the two electrodes in the absence of membrane deformation,  $h$  is the thickness of the deformed membrane,  $\varepsilon_0$  is a vacuum dielectric constant,  $L$  is a membrane length,  $V$  is an applied voltage,  $\eta$  is a Planck constant,  $c$  is the speed of light in vacuum.

According to their physical meaning, the functions  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$  and  $P(\mathbf{x})$  are continuous and non-negative when  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ .

### III. METHOD OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS

Problem (1) – (3) is equivalent to Hammerstein's integral equation

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} + \frac{\mu g(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^4} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s}, \quad (4)$$

where  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ ;  $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  is the Green's function of the first boundary value problem for the Laplace operator in the domain  $\Omega$ .

The practical implementation of the method of two-sided approximations based on equation (4) faces certain difficulties because in its finite form Green's function (even under the condition of its existence) can be constructed only for domains of a fairly simple, classical geometry. An alternative is to use the Green-Rvachev's quasi-function, which can also be used to construct a nonlinear integral equation equivalent to problems (1) – (3). The Green-Rvachev's quasi-function is based on the constructive apparatus of the theory of  $R$ -functions and can be constructed in an explicit form for domains of fairly arbitrary geometry.

Let the boundary  $\partial\Omega$  of the domain  $\Omega$  consists of a finite number of pieces of lines  $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , where each  $\sigma_i(\mathbf{x})$  is an elementary function. Then, using the method of  $R$ -functions [4], it is possible to construct an elementary function  $\omega(\mathbf{x})$  describing the geometry of the domain  $\Omega$  in the form of a single analytical expression, i.e.:

- $\omega(\mathbf{x}) > 0$  in  $\Omega$ ;
- $\omega(\mathbf{x}) = 0$  on  $\partial\Omega$ ;
- $|\nabla \omega(\mathbf{x})| \neq 0$  on  $\partial\Omega$ .

In addition, the function  $\omega(\mathbf{x})$  can have certain differentiability properties, due to the use of various sufficiently complete systems of  $R$ -functions [4].

The Green-Rvachev's quasi-function of the first boundary value problem for the operator  $-\Delta$  in the domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  is called the function [5]

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}{r^2}}, \quad (5)$$

where  $\omega(\mathbf{x})$  is a function describing the geometry of the domain  $\Omega$ ;  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2}$ ;  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ;  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ .

Note [4] that for the case when  $\Omega$  is a circle of radius  $R$ , and  $\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2R}(R^2 - x_1^2 - x_2^2)$ , the Green-Rvachev's quasi-function (5) turns into the exact Green's function of the first boundary value problem for the Laplace operator considered in the circle  $\Omega$ .

The Green-Rvachev's quasi-function has the following properties [5]:

- $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 0$  on  $\partial\Omega$ ;
- is a symmetric function:  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = Q(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ ;
- has the same feature at  $\mathbf{x} = \mathbf{s}$ , as the classical Green's function;
- positive in the domain  $\Omega$ :  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) > 0$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ .

Let  $u$  is the classical solution of the problem (1) – (3), and a function

$$\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}.$$

Then [5] the function  $u(\mathbf{x})$  satisfies the integral equation

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} + \frac{\mu g(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^4} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s}, \quad (6)$$

where denoted  $K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\Delta_{\mathbf{s}} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\left( \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \right) \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ .

The nonlinear integral equation (6) can be presented in the form of the Urysohn equation

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} P(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s},$$

where

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u(\mathbf{s})) = K(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s}) + \\ + Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} + \frac{\mu g(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^4} + P(\mathbf{s}) \right].$$

Therefore, if problem (1) – (3) has a classical solution, then it also satisfies equation (6). If the classical solution of the problem does not exist, then equation (6) can be used to introduce the concept of a generalized solution of the problem (1) – (3).

Equation (6) will be considered in the Banach space  $C(\bar{\Omega})$  of functions continuous in  $\bar{\Omega}$ . The norm in  $C(\bar{\Omega})$  is entered according to the rule  $\|u\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})|$ . In space  $C(\bar{\Omega})$  we select the cone  $K_+$  of non-negative functions.

The cone  $K_+$  in  $C(\bar{\Omega})$  is normal (and even sharp). Using a cone  $K_+$  in space  $C(\bar{\Omega})$ , we introduce semi-ordering according to the rule [4]: for  $u, v \in C(\bar{\Omega})$   $u, v$ , if  $v - u \in K_+$ .

**Definition.** The (generalized) solution of the boundary value problem (1) – (3) will be called the function  $u^* \in K_+$ , which is the solution of the integral equation (6).

Let us construct a process of two-sided approximations for finding the solution of the integral equation (6) (and, therefore, the solution of the boundary value problem (1) – (3)), using the methods of the theory of nonlinear operators in semi-ordered spaces [4].

Let us consider the nonlinear operator  $T$  acting in  $C(\bar{\Omega})$  according to the rule

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} P(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u(\mathbf{s})) ds. \quad (7)$$

Let us denote

$$K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \quad K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}.$$

Then the operator  $T$  of the form (7) will take the form

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s}) ds + \\ + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} + \frac{\mu g(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^4} + P(\mathbf{s}) \right] ds. \quad (8)$$

Since the function

$$F(\mathbf{x}, u) = \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u(\mathbf{x}))^2} + \frac{\mu g(\mathbf{x})}{(1-u(\mathbf{x}))^4} + P(\mathbf{x})$$

increases monotonically  $u$  for all  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ , then the operator  $T$  of the form (8) will be heterotone with the accompanying operator

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s}) ds + \\ + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-v(\mathbf{s}))^2} + \frac{\mu g(\mathbf{s})}{(1-v(\mathbf{s}))^4} + P(\mathbf{s}) \right] ds. \quad (9)$$

The operators  $T$  and  $\hat{T}$  are completely continuous.

Let us identify a strongly invariant cone segment  $<v^0, w^0>$  in the cone  $K_+$  with the following conditions: for all  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^0(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^0(\mathbf{s}) ds + \\ + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-v^0(\mathbf{s}))^2} + \frac{\mu g(\mathbf{s})}{(1-v^0(\mathbf{s}))^4} + P(\mathbf{s}) \right] ds \geq v^0(\mathbf{x}), \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^0(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^0(\mathbf{s}) ds + \\ + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-w^0(\mathbf{s}))^2} + \frac{\mu g(\mathbf{s})}{(1-w^0(\mathbf{s}))^4} + P(\mathbf{s}) \right] ds \leq w^0(\mathbf{x}). \quad (11)$$

Next, let us form an iterative process according to the scheme

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s}) ds + \\ + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-v^{(k)}(\mathbf{s}))^2} + \frac{\mu g(\mathbf{s})}{(1-v^{(k)}(\mathbf{s}))^4} + P(\mathbf{s}) \right] ds, \quad (12)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s}) ds - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s}) ds + \\ + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[ \frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-w^{(k)}(\mathbf{s}))^2} + \frac{\mu g(\mathbf{s})}{(1-w^{(k)}(\mathbf{s}))^4} + P(\mathbf{s}) \right] ds, \quad (13)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Let us denote

$$\gamma = M_1 + \frac{2\lambda \tilde{M}_f}{(1-M_0)^3} + \frac{4\mu \tilde{M}_g}{(1-M_0)^5},$$

where

$$M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} w^0(\mathbf{x}), \quad M_0 < 1,$$

$$M_1 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} [K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})] ds,$$

$$\tilde{M}_f = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}) d\mathbf{s},$$

$$\tilde{M}_g = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) g(\mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

**Theorem.** Let  $\langle v^0, w^0 \rangle$  is a strongly invariant cone segment for the heterotone operator  $T$  of the form (8) with the accompanying operator  $\hat{T}$  of the form (9) and the condition  $\gamma < 1$  holds. Then the iterative process (12) – (14) two-sided converges in the norm of space  $C(\bar{\Omega})$  to a unique on  $\langle v^0, w^0 \rangle$  continuous positive solution  $u^*$  of the boundary value problem (1) – (3).

The two-sided convergence of the iterative process (12) – (14) to  $u^*$  is understood in the sense of the fulfillment of a chain of inequalities

$$v^0 = v^{(0)}, v^{(1)}, \dots, v^{(k)}, \dots, u^*, \dots, w^{(k)}, \dots, w^{(1)}, w^{(0)} = w^0.$$

If the  $k$  iterations are performed, then the approximate solution of the boundary value problem (1) – (3) should be taken as

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}. \quad (15)$$

Then, for the error for the approximate solution (15), we obtain a convenient posterior estimate:

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})).$$

#### IV. RESULTS OF THE COMPUTATIONAL EXPERIMENT

The computational experiment for problem (1) – (3) was conducted in the domain

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < \sqrt{\pi}, 0 < x_2 < \sqrt{\pi}\},$$

with the following values of model parameters:  $P = 0.25$ ,  $f(\mathbf{x}) = 1$ ,  $g(\mathbf{x}) = 1$ ,  $\lambda = 0.1$  and  $\mu = 0.1$ .

Then the Green-Rvachev's quasi-function  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  of problem (1) – (3) in a rectangle  $\Omega$  is determined by formula (5), where the function  $\omega(\mathbf{x}) = \omega(x_1, x_2)$  will have the form

$$\omega(x_1, x_2) = \frac{(\sqrt{\pi} - x_1)x_1}{\sqrt{\pi}} + \frac{(\sqrt{\pi} - x_2)x_2}{\sqrt{\pi}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{\pi} - x_1)^2 x_1^2}{\pi} + \frac{(\sqrt{\pi} - x_2)^2 x_2^2}{\pi}}.$$

The initial values of a strongly invariant cone segment will be sought in the form  $v^0(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x})$ ,  $w^0(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x})$ , where  $0 < \alpha < \beta$ ,  $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$ . It is chosen that the functions satisfy the conditions (10) – (11), if  $\alpha = 0.4$ ,

$\beta = 1.3$ . Then we find  $M_0 = 0.1672$ ,  $M_1 = 0.7082$ ,  $\tilde{M}_f = 0.1286$ ,  $\tilde{M}_g = 0.1286$  and  $\gamma = 0.8811$ . Therefore,  $\gamma < 1$  according to the theorem, successive approximations formed according to the scheme (12) – (14) coincide two-sided to the solution of the problem (1) – (3), which is considered in the rectangle  $\Omega$ .

Since

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(12)}(\mathbf{x}) - v^{(12)}(\mathbf{x})) = 0.11 \cdot 10^{-3},$$

then with accuracy  $0.55 \cdot 10^{-4}$  we have

$$u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(12)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(12)}(\mathbf{x}) + v^{(12)}(\mathbf{x})}{2}.$$

In this case  $\|u^{(12)}\| = 0.115692$ . The two-sided nature of the convergence of successive approximations is illustrated in Fig. 1, which shows the graph of the cross-sections of the upper (solid line) and lower (dashed line) approximations at  $x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . The surface of the approximate solution  $u^{(12)}(\mathbf{x})$  and its contour lines are shown in Figs. 2 and 3 respectively.

$$W^{(k)}(x_1, \frac{\sqrt{\pi}}{2}), V^{(k)}(x_1, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$$

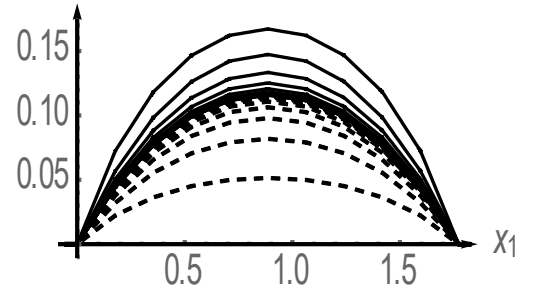


Fig. 1. The cross-sections of upper and lower approximations at  $x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

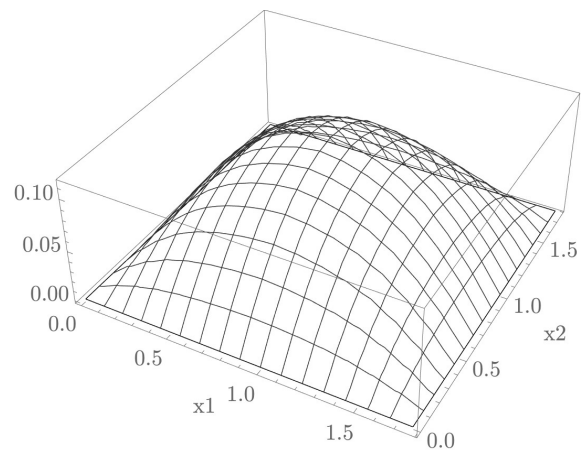


Fig. 2. The surface of the approximate solution

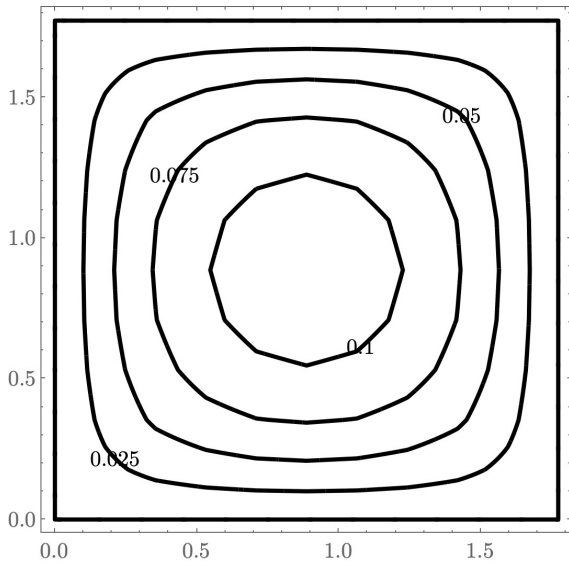


Рис. 3. The contour lines of the approximate solution

### V. CONCLUSIONS

The application of two-sided method based on the Green-Rvachev's quasi-function for a boundary value problem, which is a mathematical model of the generalized electrostatic nanoelectromechanical system, was considered for the first

time. The proposed mathematical model was refined by taking into account the Casimir force and external pressure. The developed method has shown its effectiveness in solving test problems and can be applied in engineering practice in the study of electrostatic nanoelectromechanical systems, which is the reason for the scientific novelty and practical significance of this work.

### REFERENCES ЛІТЕРАТУРА

- [1] R. C. Batra, M. Porfiri, and D. Spinello, "Effects of Casimir force on pull-in instability in micromembranes," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 77, no. 2, Jan. 2007, Art. no. 20010.
- [2] B. Lai, "On the partial differential equations of electrostatic MEMS devices with effects of Casimir force," *In Annales Henri Poincaré*, vol. 16, no. 1, pp. 239253, Jan. 2015.
- [3] O. Konchakovska, M. Sidorov, "Numerical analysis of the one-dimensional nonlinear boundary value problem that modeling an electrostatic nems by two-sided approximations method," *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*, vol. 14, no. 34, pp. 1726, Nov. 2020.
- [4] V. L. Rvachev, T. I. Sheiko, "R-functions in boundary value problems in mechanics," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 48, pp. 151188, Apr. 1995.
- [5] M. V. Sidorov, "Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems," *Carpathian Mathematical Publications*, vol. 10, no. 2, pp. 360375, Dec. 2018, DOI: 10.15330/cmp.10.2.360-375.

# Метод R-функцій та нелінійний метод Гальоркіна у задачах математичного моделювання нестаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини

Євген Курлов  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний  
університет радіоелектроніки  
Харків, Україна  
kurlovevgeniy@gmail.com

Нікіта Здорик  
кафедра комп'ютерно-інтегрованих  
технологій, автоматизації та  
мехатроніки  
Харківський національний  
університет радіоелектроніки  
Харків, Україна  
nikita.zdoryk@nure.ua

Максим Сидоров  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний  
університет радіоелектроніки  
Харків, Україна  
maxim.sidorov@nure.ua

## R-functions method and the nonlinear Galerkin method for solving problems of mathematical modeling of non-stationary flows of a viscous heat-conducting liquid

Yevhen Kurlov  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio  
Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
kurlovevgeniy@gmail.com

Zdoryk Nikita  
dept. of Computer-Integrated  
Technologies, Automation and  
Mechatronics  
Kharkiv National University of Radio  
Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
nikita.zdoryk@nure.ua

Maxim Sidorov  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio  
Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
maxim.sidorov@nure.ua

*Анотація*—В роботі розглянуто задачу математичного моделювання нестаціонарної плоскопаралельної течії в'язкої теплопровідної рідини у плоскій однозв'язній обмеженій області з кусково-гладкою межею. Для її чисельного дослідження запропоновано використати структурний метод (метод R-функцій) у поєднанні з нелінійним методом Гальоркіна. Проведено обчислювальні експерименти для тестової задачі.

*Abstract*—The paper is considered to the problem of mathematical modeling of unsteady plane-parallel flow of a viscous heat-conducting fluid in a flat one-connected bounded region with a piece-smooth boundary. For its numerical study, it

is proposed to use the structural method (R-function method) in combination with the nonlinear Galerkin method. Computational experiments for the test problem are carried out.

*Ключові слова*—в'язка теплопровідна рідина, наближення Бусінеска, функція течії, температура, метод R-функцій, нелінійний метод Гальоркіна.

*Keywords*—viscous heat-conducting fluid, *Businesque approximation, flow function, temperature, R-function method, nonlinear Galerkin method.*



## I. ВСТУП

Багато явищ, що спостерігаються в атмосфері й океані, а також деякі задачі гідромеханіки, фізіології кровообігу, організації технологічних процесів тощо можна вивчати у рамках моделі нестационарної плоскопаралельної течії нестисливої в'язкої рідини.

Сучасний апарат обчислювальної гідродинаміки в основному базується на використанні скінченно-різницевого [1, 2] і скінченно-елементних схем [3]. Їх головними недоліками є складнощі, що пов'язані з апроксимацією крайових умов та громіздке представлення сіткового розв'язку в областях складної геометрії. Усунути ці недоліки можна, якщо скористатися методом R-функцій, що був розроблений академіком НАН України В.Л. Рвачевим і його учнями [4, 5]. Основною ідеєю цього методу у застосуванні до розв'язання крайових задач є побудова жмуктів функцій), що враховуватимуть геометрію області та точно задовольнятимуть крайовим умовам досліджуваної задачі. Отже, розробка нових та вдосконалення існуючих методів математичного моделювання та чисельного аналізу гідродинамічних процесів є актуальною задачею.

Метою даної роботи є застосування структурного методу (методу R-функцій) та нелінійного методу Гальоркіна для розв'язання задачі математичного моделювання плоскопаралельної нестационарної течії в'язкої теплопровідної рідини в плоскій однозв'язній обмеженій області з кусково-гладкою межею.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У плоскій однозв'язній обмеженій області  $\Omega$  з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$  розглянемо нестационарний рух плоскопаралельної течії в'язкої теплопровідної рідини у наближенні Бусінеска.

Система рівнянь Нав'є-Стокса в наближенні Бусінеска в природних змінних «швидкість  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  – тиск  $p$  – температура  $\theta$ » має вигляд

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \vec{v} + \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{v} - \beta \vec{e} \theta = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \theta - \kappa \operatorname{div} \operatorname{grad} \theta = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (3)$$

де  $\nu$  – кінематична в'язкість,  $\beta$  – коефіцієнт об'ємного розширення,  $\kappa$  – коефіцієнт теплопровідності,  $\vec{e} = (0, 1)$  – вектор, який задає напрям виштовхуючої сили.

Якщо ввести функцію течії  $\psi(x, y)$  за допомогою співвідношень

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4)$$

то від задачі для системи (1) – (3) можна перейти до задачі

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \nu \Delta^2 \psi - \beta \frac{\partial \theta}{\partial x} = \\ & = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \kappa \Delta \theta = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (7)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = f_0(s, t), \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = g_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (8)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (9)$$

$$\theta|_{\partial\Omega} = h_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad t > 0. \quad (10)$$

Тут  $\psi_0$  – початкове значення функції течії,  $\frac{\partial f_0}{\partial s}$ ,  $g_0$  – деякі розподіли нормальної і дотичної складової швидкості потоку відповідно,  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до  $\partial\Omega$ ,  $\theta_0$  – початковий розподіл температури,  $h_0$  – розподіл температури на межі  $\partial\Omega$ .

## III. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ R-ФУНКЦІЙ ТА НЕЛІНІЙНОГО МЕТОДУ ГАЛЬОРКІНА

Для розв'язання задачі (5) – (10) використаємо структурний метод (метод R-функцій) та нелінійний метод Гальоркіна.

Нехай  $\omega(x, y) = 0$  – нормалізоване рівняння  $\partial\Omega$ , тобто

$$\begin{aligned} \omega(x, y) > 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1, \\ \omega(x, y) < 0, \quad (x, y) \in \square^2 \setminus \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

У роботах [6, 7] доведено, що крайовим умовам (8), (10) задовольняють наступні жмуктки функцій

$$\begin{aligned} \psi &= f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2 \Phi, \\ \theta &= h + \omega \Upsilon, \end{aligned}$$

де  $\Phi = \Phi(x, y, t)$  та  $\Upsilon = \Upsilon(x, y, t)$  – невизначені компоненти структур,  $f = ECf_0$ ,  $g = ECg_0$ ,  $h = ECh_0$  – продовження в область  $\Omega$  відповідно функцій  $f_0$ ,  $g_0$ ,  $h_0$ .

Нехай  $\Phi$  та  $\Upsilon$  достатньо гладкі. У задачі (5) – (10) можна зробити заміну

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi + u, \\ \theta &= h + v, \end{aligned}$$

де  $\varphi = f - \omega(D_1 f + g)$ .

Тоді функції  $u$  і  $v$  є розв'язками задачі:

$$-\frac{\partial \Delta u}{\partial t} + \nu \Delta^2 u - \beta \frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= J(\Delta(\varphi + u), \varphi + u) + F, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (12)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad s \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \kappa \Delta v = J(\varphi + u, h + v) + G, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (14)$$

$$v|_{t=0} = v_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (15)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad s \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (16)$$

$$\text{де } J(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad F = \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi - \nu \Delta^2 \varphi + \beta \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$G = -\frac{\partial h}{\partial t} + \kappa \Delta h, \quad u_0 = \psi_0 - \varphi|_{t=0}, \quad v_0 = \theta_0 - h|_{t=0}.$$

Введемо оператори  $A, E, B_1, B_2, J_1, J_2$ . Правила, за якими вони діють, їх області визначень та енергетичні норми і добутки такі:

$$Au = \Delta^2 u, \quad Ev = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad B_1 u = -\Delta u, \quad B_2 v = -\Delta v,$$

$$J_1(u) = J(\Delta(\varphi + u), \varphi + u), \quad J_2(u, v) = J(\varphi + u, h + v)$$

$$D_A = \left\{ u \mid u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^4(\Omega), u|_{\partial\Omega} = \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_E = \left\{ v \mid v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_{B_1} = \left\{ u \mid u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_{B_2} = \left\{ v \mid v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_{J_1} = \left\{ u \mid u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_{J_2} = \left\{ (u, v) \mid (u, v) \in C^1(\bar{\Omega}) \times (C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})), \right.$$

$$\left. u|_{\partial\Omega} = \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, v|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$\|u\|_A^2 = \iint_{\Omega} (\Delta u)^2 dx dy,$$

$$[u_1, u_2]_A = (Au_1, u_2)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} \Delta u_1 \cdot \Delta u_2 dx dy,$$

$$\|u\|_{B_1}^2 = \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy,$$

$$[u_1, u_2]_{B_1} = (B_1 u_1, u_2)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx dy,$$

$$\|v\|_{B_2}^2 = \iint_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dy,$$

$$[v_1, v_2]_{B_2} = (B_2 v_1, v_2)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} \nabla v_1 \cdot \nabla v_2 dx dy.$$

Відповідно до методу Гальоркіна наближення до функцій  $u$  та  $v$  шукатимемо у вигляді

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) \varphi_i, \quad (17)$$

$$v_n(t) = \sum_{i=1}^n d_i(t) v_i, \quad (18)$$

де  $c_i(t), d_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ , – невідомі функції,  $\{\varphi_i\}, \{v_i\}$  – координатні послідовності, тобто:

а)  $\varphi_i \in H_A, v_i \in H_{B_2}$  для будь-якого  $i$ ;

б)  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  та  $v_1, \dots, v_n$  є лінійно незалежними для будь-якого  $n$ ;

в)  $\{\varphi_i\}$  повна в  $H_A$ , а  $\{v_i\}$  повна в  $H_{B_2}$ .

Тут  $H_A, H_{B_2}$  – енергетичні простори відповідних операторів.

З умови ортогональності відхилю, який отримується підстановкою (17) і (18) до рівнянь (11), (14), координатним функціям  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  та  $v_1, \dots, v_n$  відповідно, дістанемо, що функції  $c_i(t), d_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ , є розв'язком системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} c_i(t) [\varphi_i, \varphi_j]_{B_1} + \nu \sum_{i=1}^n c_i(t) [\varphi_i, \varphi_j]_A -$$

$$- \beta \sum_{i=1}^n d_i(t) (E v_i, \varphi_j)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \left( J_1 \left( \sum_{i=1}^n c_i(t) \varphi_i \right), \varphi_j \right)_{L_2(\Omega)} + (F, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}, \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} d_i(t) (v_i, v_j)_{L_2(\Omega)} + \kappa \sum_{i=1}^n d_i(t) [v_i, v_j]_{B_2} =$$

$$= \left( J_2 \left( \sum_{i=1}^n c_i(t) \varphi_i, \sum_{i=1}^n d_i(t) v_i \right), v_j \right)_{L_2(\Omega)} + (G, v_j)_{L_2(\Omega)}, \quad (20)$$

Початкові дані для системи (19), (20) отримаємо як розв'язок систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^n c_i(0)(\varphi_i, \varphi_j)_{L_2(\Omega)} = (u_0, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n d_i(0)(v_i, v_j)_{L_2(\Omega)} = (v_0, v_j)_{L_2(\Omega)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Збіжність гальоркінських наближень впливатиме з загальних теорем про збіжність методу Гальоркіна та результатів, отриманих у [6].

#### IV. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Обчислювальний експеримент для задачі (5) – (10) було проведено для різних значень  $\nu$ ,  $\kappa$ ,  $\beta$  у квадратній області  $\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ .

Геометрія досліджуваної області описується функцією

$$\omega(x, y) = [x(1-x)] \wedge_0 [y(1-y)],$$

де  $\wedge_0$  – знак  $R$ -кон'юнкції.

Відповідно до того, що рух течії розпочинається зі стану спокою, початкові та крайові умови для функції течії мають наступний вигляд

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \psi|_{t=0} = 0.$$

Початкові та крайові умови для температури у зв'язку з підігрівом області  $\Omega$  зверху, такі:

$$\theta|_{\partial\Omega} = \begin{cases} x(1-x)(1-e^{-t}), & y=1, \\ 0, & x=0, x=1, y=0, \end{cases} \quad \theta|_{t=0} = 0.$$

Тоді шукатимемо розв'язок задачі у вигляді жмуктів функцій

$$\psi = \omega^2 \Phi, \quad \theta = h + \omega \Upsilon,$$

$$\text{де } h(x, y, t) = \frac{x^2(1-x)^2 y}{1-y+xy(1-x)}(1-e^{-t}).$$

Було використано 21 координатну функцію для апроксимації невизначених компонент структури розв'язку  $\Phi$  та  $\Upsilon$ .

На рис. 1 – 4, наведено лінії рівня функції течії, функції температури, векторне поле швидкостей та лінії рівня завихореності при  $\nu = 0.01$ ,  $\beta = 1$ ,  $\kappa = 100$  та  $t = 3$ .

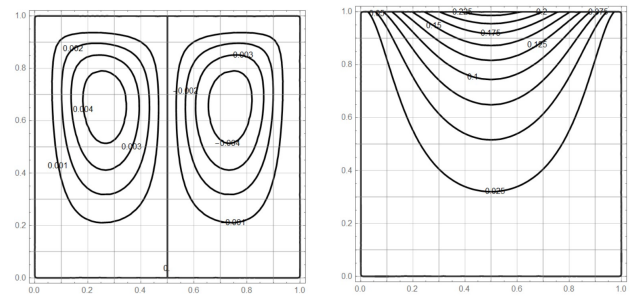


Рис. 1. Лінії рівня функції течії та температури

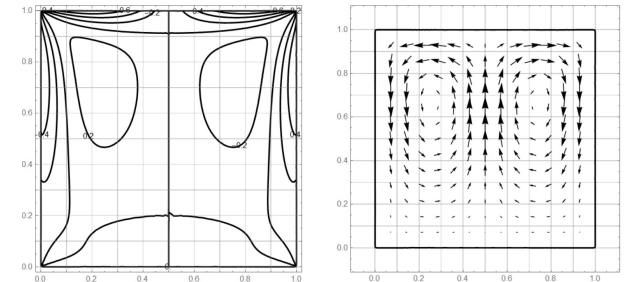


Рис. 2. Лінії рівня завихореності та векторне поле швидкостей

#### V. ВИСНОВКИ

У роботі були вперше сумісно застосовані структурний метод (метод  $R$ -функцій) та нелінійний метод Гальоркіна до розв'язання задачі математичного моделювання плоскопаралельної нестационарної течії в'язкої теплопровідної рідини в плоскій однозв'язній обмеженій області з кусково-гладкою межею. Запропонований чисельний метод показав свою ефективність при розв'язанні тестової задачі і може бути використаний для розрахунку різних практичних задач.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. Москва : Мир, 1980. 616 с.
- [2] Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. Москва : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. 258 с.
- [3] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва : Мир, 1988. 352 с.
- [4] Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев : Наук. думка, 1982. 552 с.
- [5] Стоян Ю. Г., Проценко В. С., Манько Г. П. Теория R-функций и актуальные проблемы прикладной математики. Киев : Наук. думка, 1986. 264 с.
- [6] Артюх А. В. Математичне моделювання та чисельний аналіз методом R-функцій нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини : дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2015. 251 с.
- [7] Сидоров М. В. Математичне моделювання та чисельний аналіз течій в'язкої рідини в однозв'язних і багатозв'язних областях методом R-функцій : дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2008. 202 с.

# Використання зонування в системах водопостачання

Ольга Матвієнко  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет  
радіоелектроніки  
Харків, Україна  
olha.matviienko@nure.ua

Наталія Манчинська  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет  
радіоелектроніки  
Харків, Україна  
natali.manchinska@nure.ua

## Use of Zoning in Water Supply Systems

Olha Matviienko  
Department of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
olha.matviienko@nure.ua

Nataliia Manchynska  
Department of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
natali.manchinska@nure.ua

**Анотація**— В цій роботі розглядається зонування водопровідних мереж як один із способів підвищення ефективності роботи систем розподілу води. Пропонуються підходи до зонування та методи створення зон.

**Abstract**— This paper considers the zoning of water supply networks as one of the ways to improve the efficiency of water distribution systems. Water network zoning is one of the leak and pressure management tools to control water loss. Zoning is used when there is a significant difference in the geodetic marks of consumers and, accordingly, there are significant excess pressures in the nodes of the water supply network. Approaches to zoning and methods of creating zones are proposed.

**Ключові слова**— водопровідна мережа; зонування; надлишковий напір; витоки; регулятори тиску; кластери.

**Keywords**— water supply network; zoning; excess pressure; leaks; pressure regulators; clusters.

### I. ВСТУП

Системи водопостачання мають величезне значення для функціонування великих та малих населених пунктів. Своєчасне постачання населенню питної води необхідної якості і в достатньому обсязі є найважливішою їх задачею.

Однією з найбільших проблем систем водопостачання є втрати води – реальні та приховані. Реальні втрати води – це витоки в результаті аварій, переповнення резервуарів чистої води. Приховані – це втрати води в результаті корозії труб, несправності обладнання, несанкціонований відбір води, неправильно встановлені лічильники. Втрати води є результатом неефективної роботи системи водопостачання.

Збільшуються експлуатаційні витрати, енергетичні ресурси витрачаються марно, доходи від води скорочуються. Для боротьби із втратами води використовується ряд заходів, таких як моніторинг, виявлення, локалізація витоків, вчасне реагування, а також керування тиском, керування витоками та попитом [1, 2]. Підвищити ефективність системи розподілу води можливо розподіливши її на частини, або зони.

### II. СПОСОБИ ЗОНУВАННЯ ВОДОПРОВІДНИХ МЕРЕЖ

Зонування водопровідної мережі є одним із інструментів управління витоками та тиском для контролю втрат води. Зонування застосовується, коли присутня значна різниця геодезичних відміток споживачів і, відповідно, є значні надлишкові напори. Вимоги зонування складаються з визначення розміру зони, загального попиту, визначення її меж, моніторингу цих меж засобами обліку води [3, 4].

Способи використання зонування для підвищення ефективності роботи водопровідної мережі:

1. якщо у всіх вузлах виділеної зони присутній надлишковий напір, то з метою підвищення ефективності роботи окремої виділеної зони на входах в зону ставлять регулятори тиску, за допомогою яких можна зменшити надлишковий тиск всередині виділеної зони, а значить, зменшити вірогідність аварій і витоків, пов'язаних з надлишковим тиском.

2. якщо у всіх вузлах виділеної зони недостатній напір, то на вході у виділену зону можливо встановити станцію підкачки, якщо це буде економічно обґрунтованим.

Існують декілька підходів до виділення зон водопровідних мереж. Будемо розглядати систему водопостачання у вигляді орієнтованого графа  $G=G(V, E)$ , вузлам якого  $V$  відповідають споживачі, а ребрам  $E$  труби. Граф може характеризуватися вузловими вагами  $w_i, i \in V$  (витрати, напір, геодезична відмітка), та вагами ребер  $w_j, j \in E$  (довжина, діаметр, напрямок потоку) і матрицею інцидентцій  $A$  на основі топології мережі. Розбиття графа на зони, або кластери позначається множиною  $C=(c_1, \dots, c_b, \dots, c_k)$  [5, 6].

Пропонується підхід, за допомогою якого можна було б автоматично створювати зони, тобто із орієнтованого графа водопровідної мережі виділяються зони, в яких більш висока щільність ребер всередині зони, ніж між зонами.

Критерії, яким повинні задовольняти зони:

- в усіх вузлах однієї зони надлишковий тиск повинен належати певному діапазону, для сусідніх зон ці діапазони повинні відрізнятися;
- в одній зоні повинні знаходитися труби одного діаметру;
- усі вузли однієї зони повинні бути пов'язані між собою та географічно знаходитися близько;
- зони не повинні перетинатися, а об'єднання всіх зон складає повний граф [7].

### III. МЕТОДИ ЗОНУВАННЯ

Методи, які використовуються для зонування водопровідних мереж:

- кластеризація;
- структурування множин;
- розбиття.

Ці методи тісно пов'язані між собою, включають в себе різні алгоритми і націлені на те, щоб розділити набір даних на кластери таким чином, щоб елементи, що належать конкретному кластеру, були схожі або краще пов'язані в деякому визначеному сенсі, ніж з елементами інших кластерах.

Глобальна кластеризація пов'язана з групуванням наборів точок, які близькі одна до одної, відносно міри подібності, визначеної для кожної пари точок. Алгоритм глобальної кластеризації створює багаторівневу або ієрархічну структуру графа, де кожен рівень ієрархії кластеризації визначає іншу підмножину. Кожен кластер верхнього рівня складається з підкластерів. Ієрархічний алгоритм починається з того, що кожен вузол формує унікальний кластер, далі відбувається послідовне групування двох найбільш схожих кластерів та обчислення центроїда нового кластеру. Ця процедура може повторюватися, поки усі вузли не будуть поєднані в єдиний кластер.

Основною мірою подібності вузлів у водопровідній мережі є їх географічне положення. При цьому не очікується, що віддалені вузли будуть поєднані між собою,

тому відстань між парою вузлів можна використовувати як міру їх подібності. Якщо відомі координати  $(u_x, u_y)$  і  $(v_x, v_y)$  двох вузлів  $u$  та  $v$ , то міра подібності між ними обчислюється як евклідова відстань:

$$d(u, v) = \sqrt{(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2}. \quad (1)$$

Міра подібності між двома кластерами  $c_i$  та  $c_j$  обчислюється як середнє мір подібностей вузлів, що належать кластерам:

$$D(c_i, c_j) = \frac{1}{|c_i| \cdot |c_j|} \sum_{u \in c_i, v \in c_j} d(u, v), \quad (2)$$

де  $|c_i|$  – розмір кластера  $c_i$

Алгоритми структурування розкривають природно структуру множини, використовуючи концепцію щільності ребер, тобто щільність внутрішньокластерних ребер у порівнянні із щільністю міжкластерних ребер. Структурування множин теж представляє собою ієрархічний алгоритм, що використовує властивість модульності мережі як міру якості поділу. Алгоритм базується на порівнянні щільності ребер в базовому поділі на підграфи із щільністю ребер, якби граф був поділений на підграфи з однаковим вузловим ступенем (тобто кількістю інцидентних ребер). Оскільки випадковий граф не повинен мати кластерну структуру, хороша структура множини буде мати більш високе значення модульності. Модульність завжди менша одиниці і може бути від'ємною. Модульність визначається так:

$$Q(G, C) = \frac{1}{2m} \sum_{i,j} (A_{ij} - P_{ij}) \delta(c_i, c_j), \quad (3)$$

де  $m$  – кількість ребер графа,  $A$  – матриця суміжності,  $A_{ij}$ ,  $P_{ij}$  – фактична та очікувана кількість зв'язків між вузлами  $i$  та  $j$ ,  $\delta$  вказує, чи належать вузли  $i$  та  $j$  одному кластеру.

$$\delta(c_i = c_j) = 1, \delta(c_i \neq c_j) = 0. \quad (4)$$

Очікувана кількість ребер у випадковому графі між вузлами  $i$  та  $j$  відносно однакових ступенів вузлів  $k_i, k_j$  дорівнює:

$$P_{ij} = \frac{k_i k_j}{2m}. \quad (5)$$

Практично модульність можна обчислити так:

$$Q(G, C) = \sum_{i \in C} e_{ii} - \sum_{i \in C} a_i^2, \quad (6)$$

де  $e_{ii}$  – кількість внутрішньокластерних ребер, а  $a_i$  – кількість кінців внутрішньокластерних ребер. Зміну модульності можна обчислити так:

$$\Delta Q(G, C_{c_i, c_j}) = Q(G, C - c_i - c_j + c_i \cup c_j) - Q(G, C). \quad (7)$$

Для максимізації модульності послідовно з'єднують по два кластери, поки усі вузли не будуть згруповані в один кластер.

Розбиття графа ділить граф на задану кількість груп таким чином, щоб кількість ребер між кластерами була мінімальною. Задача розбиття графа складається з розподілу  $n$  вузлів графу на задане число  $k$  кластерів приблизно однакового розміру, так щоб кількість ребер, що поєднують кластери, була мінімальною. Також бажано, щоб кластери мали однаковий розмір.

Задача розбиття графа розв'язується послідовним поділом навпіл графа  $G=G(V,E)$ ,  $w_i, \forall i \in V$ ,  $w_j, \forall j \in E$ . Спочатку виходить два підграфи, потім кожен з них також ділиться навпіл. Після серії таких поділів отримуємо  $k$  підграфів. Для спрощення обчислень граф скорочується шляхом поєднання його вузлів та ребер, потім вихідний граф відтворюється для остаточного розбиття.

#### IV. ВИСНОВКИ

Наведені вище методи розбиття водопровідної мережі на зони відрізняються необхідними вхідними даними, основною метою і вихідними даними.

Зонування систем розподілу води є важливим інструментом для управління витратами та тиском, а також контролю втрат води. Застосування підходів теорії графів до проблеми зонування водопровідних мереж є предметом подальших досліджень.

Запропоновані методи можуть надати водоканалам інструмент підтримки прийняття рішень для управління мережею та контролю втрат води.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] L. S. Perelman, M. Allen, A. Preis, M. Iqbal, A. J. Whittle, "Automated Sub-Zoning of Water Distribution Systems." *Environmental Modelling & Software* vol. 65, 2015, pp. 1–14.
- [2] K. Diao, D. Jung, R. Farmani, G. Fu, D. Butler, K. Lansey, "Modular interdependency analysis for water distribution systems." *Water Research*. vol. 201, 2021, 117320.
- [3] F. Zheng, A.C. Zecchin, A.R. Simpson, "A decomposition and multi-stage optimization approach applied to the optimization of water distribution systems with multiple supply sources." *Water Resources Research*, vol. 49, 2013, pp. 1–20.
- [4] K. Diao, Y. Zhou, W. Rauch, "Automated Creation of District Metered Area Boundaries in Water Distribution Systems." *Journal of Water Resources Planning and Management*, march/april 2013, pp. 184-190.
- [5] A. D. Nardo, M. D. Natale, G. F. Santonastaso, S. Venticinque, "Graph Partitioning for Automatic Sectorization of a Water Distribution System." , 2011, 841.
- [6] A.D. Nardo, M.D. Natale, C. Giudicianni, "Weighted Spectral Clustering for Water Distribution Network Partitioning." *Appl Netw Sci* vol 2, 2017, 19.
- [7] А. Д. Тевяшев, О. И. Матвиенко, "Стохастическая модель и метод зонирования водопроводных сетей" *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*, vol 1(67), 2014, сс. 17–24.

# One Model of Growing Random Forest

Andrey A. Dorogovtsev  
Department of Stochastic Processes  
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine  
Kyiv, Ukraine  
adoro@imath.kiev.ua

Iryna Nishchenko, Daria Kalytiuk  
Department of Mathematical Methods of Information  
Security  
Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute  
Kyiv, Ukraine  
nishchenkoii-ipt@im.kpi.ua, darkal-ipt22@im.kpi.ua

**Abstract**—We present a model of a growing random forest on finite number of vertices that turns into a final maximum tree. In order to establish the properties of the distribution of the final tree, we introduce the notion of a forest complexity, which characterizes the shape of the final tree. The asymptotics of the average complexity of the final tree is established, when the number of vertices tends to infinity.

**Keywords**— random forest, random tree, coalescence, complexity.

## I. INTRODUCTION

The theory of random graphs is a rapidly developing area of mathematics, which finds more and more applications in the study of complex networks of physical, biological or social nature, in modelling large systems of interacting particles and in the analysis of spatial patterns in random evolutions [1,2].

A random forest over a vertex set is a graph whose connected components form a collection of trees, where each tree is a graph without cycles. The coalescent construction of a sequence of random forests, related to a model for a physical process of clustering or coagulation, was proposed in [3]. This construction can be described in terms of a discrete-time forest-valued Markov chain. Namely, starting from the trivial graph with no edges, every subsequent forest is obtained from the current one by adding a single edge picked uniformly at random from the set of all edges which, when added to the current forest, yield a new forest. The distribution and asymptotic behaviour of some features of the final random tree, obtained by this coalescent construction, were studied in [4].

In [5] the growth of the random forest into the final tree was described by a lazy discrete-time forest-valued Markov chain. In this chain self-transitions are allowed, when an edge, being picked uniformly at random from the set of all not yet drawn edges and being added to a current graph, does not yield a new forest. Considering the final tree as an absorbing state of such a chain, the distribution of the time required to obtain the final tree was found.

In this paper we introduce the notion of complexity of a random forest and establish the asymptotic behaviour of the mathematical expectation of the complexity of the final random tree for large number of vertices.

## II. MODEL DESCRIPTION

The model of growing random forest under consideration can be described as follows. It is a random sequence of forests  $G_0, G_1, \dots, G_k$  on the set  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  of vertices such that 1)  $G_0 = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$  is a trivial forest with no edges. 2) Given  $G_k$ , we pick an edge uniformly at random from the set of edges

not yet drawn. If adding this edge to  $G_k$  yields a new forest, we assign this new forest to be  $G_{k+1}$ , otherwise we put  $G_{k+1} = G_k$ .

By this procedure we get a final maximum tree  $G_\infty$  on  $n$  vertices.

## III. COMPLEXITY OF A RANDOM FOREST

In order to study the structure of the distribution on the set of trees on  $n$  vertices, let us introduce a measure of complexity of the forest  $G$ .

Define the distance  $\rho(i, j)$  between the vertices  $i$  and  $j$  in the forest  $G$  as the number of edges in the only path connecting these vertices in the given forest, or put  $\rho(i, j) = \infty$  if the vertices are not connected.

Then define the complexity of the forest  $G$  as the value 
$$h(G) = \sum_{i,j=1}^n e^{-\rho(i,j)}$$
 where  $e^{-\infty} = 0$ . It can be seen that the fewer connected components a forest has and the simpler the shapes of the trees forming it, that is, the fewer branches in them, the less the complexity of the forest.

Now for the final random tree  $G_\infty$  put  $H(n) = E(h(G_\infty))$ . One can check that for the mathematical expectation of the complexity of the final random tree the following relation holds

$$H(n_1 + n_2) \geq H(n_1) + H(n_2) + \frac{1}{n_1 n_2} H(n_1) H(n_2)$$

Moreover, the following statement can be proved.

**Theorem.** For some positive constant  $c > 0$

$$H(n) \geq n + c \ln(n)$$

## REFERENCES

- [1] B. Bollobas, Random Graphs. Academic Press, London, 1985.
- [2] R. van der Hofstad, Random Graphs and Complex Networks. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- [3] J. Pitman, Coalescent Random Forests, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Vol. 85, Issue 2, 1999, pp.165-193.
- [4] D. J. Aldous, A random tree model associated with random graphs, Random Struct. Algorithms 1, 1990, pp. 383-402
- [5] Калитюк Д.М., Ніщенко І.І. Особливості росту випадкових дерев – XX Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених “Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики”-15 червня 2022 р., Київ, Україна, С.228-232.

# Метод безпечного приземлення аварійного безпілотного квадрокоптера

Богдан Благітко

кафедра радіофізики та комп'ютерних технологій  
Львівський національний університет ім. Івана Франка  
Львів, Україна  
blagitko@mail.com

Ігор Заячук

Центр математичного моделювання  
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України  
Львів, Україна  
igorzajach@mail.com

## Safely landing method an emergency unmanned quadcopter

Bohdan Blagitko

dept. of Radiophysics and Computer Technologies  
Lviv's National University of name Ivan Franko  
Lviv, Ukraine  
blagitko@mail.com

Igor Zajachuk

Mathematical modeling Center  
IPPM of name Ya. S. Pidstrigacha of the NAS of Ukraine  
Lviv, Ukraine  
igorzajach@mail.com

**Анотація**— Шляхом математичного моделювання досліджені особливості процесу аварійного приземлення безпілотного квадрокоптера. Запропонований метод приземлення безпілотного квадрокоптера у випадку виходу з ладу однієї з чотирьох пар електродвигун-гвинт. Основою цього методу є застосування ефекту парашутування. Парашутування досягається шляхом примусового вимкнення живлення електродвигуна, який розміщується на протилежному кінці тієї самої траверси, що і несправний електродвигун. В результаті вертикальна швидкість безпілотного квадрокоптера в момент приземлення суттєво зменшується і наближається до порівняно безпечного значення.

**Abstract**— The peculiarities of the process of emergency landing of an unmanned quadcopter were investigated by means of mathematical modeling. The method of landing an unmanned quadcopter in case of failure of one of the four pairs of electric motor-propellers proposed. The basis of this method is the use of the parachuting effect. Parachuting is achieved by forcibly de-energizing the electric motor, which is located at the opposite end of the same traverse as the faulty electric motor. As a result, the vertical speed of the unmanned quadcopter at the moment of landing significantly decreases and approaches a relatively safe value.

**Ключові слова**— безпілотний аварійний квадрокоптер; пропорційно-диференціальний регулятор; керування

**Keywords**— unmanned emergency quadcopter; proportional-differential regulator; automatic control;

### I. ВСТУП

У всіх, без винятку, статтях із проблем безпілотного польоту безпілотного квадрокоптера неявно передбачається, що всі чотири пари електродвигун-гвинт і схема управління ними є справними [1-4]. На практиці можуть виникнути деякі несправності у послідовності ланок: схема управління - електродвигун-гвинт. Якщо несправність раптово появляється в процесі польоту безпілотного квадрокоптера, то виникає аварійна ситуація. Спостерігається повна втрата керованості польотом, в результаті чого безпілотний квадрокоптер падає на землю.

Стаття присвячена розробці математичної моделі процесу приземлення безпілотного квадрокоптера у випадку виходу з ладу однієї з чотирьох пар електродвигун-гвинт. Для керування процесом польоту використовується пропорційно-диференціальний (ПД) регулятор, на вхід якого від сенсорів поступають виміряні значення, а мікроконтролер реалізує алгоритм ПД регулятора і видає на вихід значення напруг живлення двигунів.

### II. МЕТОД УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСОМ БЕЗПЕЧНОГО ПРИЗЕМЛЕННЯ БЕЗПІЛОТНОГО АВАРІЙНОГО КВАДРОКОПТЕРА

Процес некерованого аварійного приземлення безпілотного квадрокоптера з несправністю однієї з чотирьох пар електродвигун-гвинт містить багато невизначеностей, зокрема: непрогнозоване місце приземлення, непрогнозована швидкість в момент



приземлення, непрогнозовані тривалість падіння та його характер, непрогнозований кут приземлення, тощо.

Положення безпілотного квадрокоптера із несправністю однієї з чотирьох пар електродвигун-гвинт, як і для безпілотного квадрокоптера без несправності, задається шістьма параметрами: просторовими координатами  $X, Y, Z$  та кутами  $\theta, \gamma, \psi$ . Але змінювати їх можна лише за допомогою трьох параметрів якими є швидкості обертання валів трьох справних пар електродвигун-гвинт квадрокоптера. Очевидно, що у всіх чотирьох випадках вони будуть різними, а висота польоту буде залишатися постійною.

Запропоновано метод управління процесом безпечного приземлення безпілотного квадрокоптера із несправністю однієї з чотирьох пар електродвигун-гвинт. Суть методу полягає у примусовому вимкненні електродвигуна, який у парі з несправним електродвигуном знаходиться на протилежному кінці тієї ж самої консолі. На валах обох електродвигунів закріплені однакові повітряні гвинти, праві або ліві. Степінь безпечного приземлення безпілотного квадрокоптера оцінюється за величиною вертикальної швидкості в момент приземлення. Проведено дослідження і зроблено порівняння отриманих результатів для процесу вільного падіння безпілотного квадрокоптера зі всіма чотирма вимкненими електродвигунами та його приземлення з одним несправним електродвигуном. Результати були отримані шляхом розв'язку системи диференціальних рівнянь, які є основою математичної моделі безпілотного квадрокоптера [5]. Окрім того в запропонованій моделі несправність однієї з чотирьох пар електродвигун-гвинт безпілотного квадрокоптера моделювали шляхом встановлення величини напруги, яка подається на несправний двигун безпілотного квадрокоптера, значення  $U_i=0$ , де  $i=1..4$ . Безпілотний квадрокоптер в момент виникнення несправності нерухомо зависає на заданій висоті  $Z_0$ .

### III. РЕЗУЛЬТАТИ МОДЕЛЮВАННЯ

Проведене моделювання безпечного приземлення аварійного квадрокоптера з висоти 50 м над точкою з координатами  $X=0, Y=0$ . Квадрокоптер при цьому «висить» нерухомо (кути тангажу і крену дорівнюють нулю). Основні параметри квадрокоптера: маса – 468 г, відстань від центру мас до двигуна – 22,5 см, ЕРС акумулятора – 11,1 В. Модель безпілотного квадрокоптера було представлено у вигляді матеріальної точки з масою  $m$ . Але безпілотний квадрокоптер має складну просторову конструкцію з заданими габаритами. Тому для оцінки переміщення центру мас безпілотного квадрокоптера необхідно мати уявлення про обертання безпілотного квадрокоптера в процесі аварійного приземлення. Для цього необхідно змоделювати переміщення ансамблю двох точок безпілотного квадрокоптера – центру мас і носового (хвостового) двигуна або лівого (правого) двигуна. На рис. 1а) зображені траєкторії приземлення безпілотного квадрокоптера за відмови носового (криві 1) або хвостового (криві 2) двигуна. Пунктирною лінією показана траєкторія руху центру мас безпілотного квадрокоптера, а квадратами

траєкторія руху носового двигуна. На рис.1б) зображені аналогічні траєкторії за відмови правого (криві 3) або лівого (криві 4) двигуна.

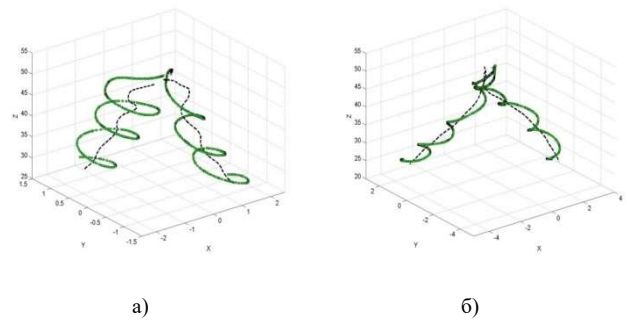


Рис. 3. Приземлення аварійного квадрокоптера за пропонуваним методом

Якщо одночасно з двигуном, який вийшов з ладу, вимкнута живлення електродвигуна, який розміщується на протилежному кінці тієї самої траверси, що і несправний електродвигун, то час падіння становить 11,7 с, а вертикальна швидкість приземлення становить 5,6 м/с. Горизонтальні складові швидкості весь час дорівнюватимуть нулю, тобто, квадрокоптер падатиме вертикально вниз. Крен і тангаж під час падіння дорівнюють нулю, тобто квадрокоптер завжди приземлиться на шасі.

### IV. ВИСНОВКИ

Для зменшення вертикальної складової швидкості приземлення аварійного квадрокоптера при відмові одного з двигунів необхідно якомога швидше відключити напругу від живлення двигуна, який розміщений на протилежному кінці консолі. При цьому горизонтальні складові швидкості приземлення дорівнюють нулю.

### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Huang H. Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering / H. Huang, G. M. Hoffmann, S. L. Waslander, and C. J. Tomlin // IEEE International Conference on Robotics and Automation, May 2009, pp. 3277–3282.
- [2] Wissiere D. Experimental autonomous flight of a small-scaled helicopter using accurate dynamics model and low-cost sensors / David Wissiere, Piere-Jean Bristeau, Alain Piere Martin, Nikolas Petit // Proceeding of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control, Seoul Korea, July 6-11, 2008, pp. 14642-14650.
- [3] Nartin P. The True Role of Accelerometer Feedback in Quadrotor Control / Philip Nartin, Erwan Salaun // IEEE International Conference on Robotics and Automation, Anchorage, May 2010, pp.1623-1629.
- [4] Marcelo B. In-Flight Collision Avoidance Controller Based Only on OS4 Embedded Sensors/ B.Marcelo, R.C.B.Sampaio, S.Bounabdallah, V.de Perrot, R.Siegwart// Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, vol.34 no.3 Rio de Janeiro July/Sept. 2012 – March 2012. – Vol. XXXIV, No.3, July-September 2012– С. 294–107.
- [5] Благітко Б. Математичне моделювання процесу стабілізації квадрокоптера у польоті / Б. Благітко, Ю. Мочульський // Електроніка та інформаційні технології. – 2013. – Вип. 3. –С. 96–107.

# Моделювання Масопереносу в Пористих Структурах Циліндричної Форми Скінченної Висоти

Ярослав П'янило

Центр математичного моделювання  
Інституту прикладних проблем механіки і  
математики ім. Я. С. Підстригача НАН України  
Львів, Україна  
danylo794@gmail.com

Ганна Лянце

Центр математичного моделювання  
Інституту прикладних проблем механіки і  
математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України  
Львів, Україна  
danylo794@gmail.com

Адріан Торський

Центр математичного моделювання  
Інституту прикладних проблем механіки і  
математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України  
Львів, Україна  
olebra31@gmail.com

Галина П'янило

Центр математичного моделювання  
Інституту прикладних проблем механіки і  
математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України  
Львів, Україна  
danylo794@gmail.com

## Modeling Mass Transfer in Porous Structures of Cylindrical Shape of Finite Height

Yaroslav Pyanylo

Center of Mathematical Modeling  
of Pidstryhach Institute for Applied Problems of  
Mechanics and Mathematics, National Academy of  
Sciences of Ukraine  
Lviv, Ukraine  
danylo794@gmail.com

Halyna Pyanylo

Center of Mathematical Modeling  
of Pidstryhach Institute for Applied Problems of  
Mechanics  
and Mathematics, National Academy of Sciences  
of Ukraine  
Lviv, Ukraine  
danylo794@gmail.com

Hanna Lyantse

Center of Mathematical Modeling  
of Pidstryhach Institute for Applied Problems of  
Mechanics  
and Mathematics, National Academy of Sciences  
of Ukraine  
Lviv, Ukraine  
danylo794@gmail.com

Adrian Torskyj

Center of Mathematical Modeling  
of Pidstryhach Institute for Applied Problems of  
Mechanics  
and Mathematics, National Academy of Sciences  
of Ukraine  
Lviv, Ukraine  
olebra31@gmail.com

I. ВСТУП

*Абстракт.* - Побудована математична модель масопереносу в складних пористих середовищах циліндричної форми. Досліджено вплив висоти циліндра на розподіл тиску. Проведено числовий експеримент.

*Ключові слова* – пористе середовище, математична модель, крайові задачі.

Значну частину порід можна розглядати як складні пористі середовища. До них відносяться і газ- та нафтоносні пласти. Пористу структуру мають і багато живих організмів та рослин. Математичному моделюванню процесів масопереносу в таких структурах присвячено багато робіт [1,2,3,6,7,11]. У

зв'язку з розвитком обчислювальної техніки підвищуються і вимоги до математичних моделей процесів масопереносу. Тому є необхідність в подальшому вивченні цих процесів.

З багатьох причин зросли вимоги до визначення параметрів процесів, що вивчаються. Тим самим виникають нові задачі при їх моделюванні. Зокрема при побудові математичної моделі фільтрації газу в пластах підземних сховищ останні розглядаються в плоскому варіанті.

## II. МАСОПЕРЕНОС В СУЦЬНОМУ ЦИЛІНДРІ.

Процес фільтрації газу в околі свердловини плату підземних сховищ газу доцільно розглядати в циліндричних координатах [6,7,8]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{D}{p_0} \frac{\partial p}{\partial \tau},$$

Враховуючи, що область свердловини порівняно із всім сховищем є невеликою, параметри рівняння можна вважати сталими за координатою на деякому проміжку часу. В останній формулі позначено:  $r$  - радіус-вектор, проведений з центру свердловини,  $p_0$ ,  $p_2$  - початкове значення тиску та значення тиску на границі області, за Лейбензоном

$$\tau = \frac{p_2}{p_0} t + \left(1 - \frac{p_2}{p_0}\right) \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta}, \quad \beta = \frac{p_0 k \lambda_m^2}{2m\mu}. \quad 1.$$

Розглянемо циліндричну область, в центрі якої знаходиться свердловина. Нехай радіус зовнішнього кола  $S_0$  рівний  $a$ , радіус концентричного йому внутрішнього кола  $\tilde{S}$  рівний  $b$ . Задаймо на зовнішній границі  $S_0$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0;$$

на внутрішній границі  $-P = P_2 \equiv const$ . Тут  $P = p^2$ ,  $P_2 = p_2^2$ ,  $P_0 = p_0^2$ . Початковий розподіл тиску є сталим і рівний  $P_0$ . За таких умов розв'язок поставленої задачі має вид

$$P = P_2 - 2(P_0 - P_2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(b\lambda_m) Z_1(b\lambda_m) Z_0(r\lambda_m) \exp\left(-\frac{p_0 \tau \lambda_m^2}{D}\right)}{(a\lambda_m)^2 Z_0^2(a\lambda_m) - (b\lambda_m)^2 Z_1^2(b\lambda_m)}$$

В останній рівності позначено

$$Z_0(\lambda_m r) = J_0(\lambda_m r) + A_m N_0(\lambda_m r),$$

$$Z_1(\lambda_m r) = J_1(\lambda_m r) + A_m N_1(\lambda_m r),$$

$$A_m = -\frac{J_0(\lambda_m b)}{N_0(\lambda_m b)} = -\frac{J_1(\lambda_m a)}{N_1(\lambda_m a)}, \quad D = \frac{m\mu}{k},$$

$$\tau = \frac{p_2}{p_0} t + \left(1 - \frac{p_2}{p_0}\right) \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta}, \quad \beta = \frac{p_0 k \lambda_m^2}{2m\mu},$$

$p_0$ ,  $p_2$  - початкове значення тиску та значення тиску на границі області,  $J_i(\lambda_m r)$  - функція Бесселя дійсного

аргументу порядку  $i$   $N_i(\lambda_m r)$  - функція Неймана порядку  $i$  [4,6,10,12],  $\lambda_m$  - корені рівняння

$$J_0(\mu x) N_1(x) - J_1(x) N_0(\mu x) = 0, \\ \mu = b/a, \quad a\lambda_m = x, \quad b\lambda_m = \mu x.$$

Одним з обґрунтувань цього є те, пласти мають порівняно незначну товщину. Спад тиску за товщиною малий в порівнянні з іншими напрямками. До цього часу є незначна кількість робіт дослідження цих проблем. Причиною цього є, в основному, в обчислювальних проблемах та проблемах точності вхідних даних.

Область свердловини на практиці розбивається на три зони: робочу колону; привибійну зону та власне пласт сховища. Надалі буде розглядатися область пласту у формі порожнистого циліндра. Радіус внутрішньої області визначається розміром привибійної зони, а тиск розраховується за даними тиску на газозбірному пункті. Будемо вважати, що тиск в порожнистому циліндрі залежить тільки від радіуса та висоти і не залежить від кута повороту.

## III. МАСОПЕРЕНОС В ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ.

**Формулювання задачі.** Знайти розподіл тиску в порожнистому циліндрі, який описується рівнянням

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2 p^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p^2}{\partial r} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2} \right),$$

за різних початкових та граничних умов.

Розглянемо випадок початку закачування газу. В цьому випадку тиски на торцевих поверхнях та зовнішній поверхні можна вважати сталими, рівним деякому значенню  $p_{00}$ . Тиск на внутрішній поверхні вважається заданим і визначається за значенням тиску на газозбірному пункті. Останнє рівняння лінеаризуємо наступним чином. Якщо  $p_1$  - значення тиску на попередньому кроці, то лінеаризоване рівняння буде мати вигляд

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa p_1 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right).$$

### Стационарний випадок.

Розглянемо пустотілий циліндр висотою  $l$   $a < r < b$ ,  $0 < z < l$ . Поверхня  $r = a$  підтримується при тиску  $f(z)$ . На інших поверхнях підтримується сталий тиск  $p_{00}$ . Якщо в останньому рівнянні зробити лінійну заміну  $p$  на  $p - p_{00}$ , то отримаємо нульові граничні умови. Розв'язок такої задачі має вигляд

$$p(r, z) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_0\left(\frac{n\pi r}{l}; \frac{n\pi b}{l}\right)}{F_1\left(\frac{n\pi a}{l}; \frac{n\pi b}{l}\right)} \sin \frac{n\pi z}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi.$$

В останній формулі позначено:

$$F_0(x, y) = I_0(x) K_0(y) - I_0(y) K_0(x),$$

$$F_1(x, y) = I_1(x) K_0(y) + I_0(y) K_1(x),$$

$I_i(x)K_i(y)$  - функції Бесселя  $i$ -го порядку. Оскільки функції  $I_i(x)$  мають експоненціальний ріст, то їх обчислення пов'язане з певними труднощами. У зв'язку з тим доданок під сумою доцільно перетворити таким чином, щоб уникнути експоненціального зростання. Для цього використаємо тотожності

$$I_j(x) = e^x e^{-x} I_j(x) = e^x I_{j1}(x) \quad K_j(x) = e^x e^{-x} K_j(x) = e^{-x} K_{j1}(x)$$

які дозволяють отримати наступну формулу

$$\frac{F_0(x, y)}{F_1(x, y)} = \exp\left(-\frac{n\pi(r-a)}{l}\right) \frac{F_{hys}}{F_{zn}},$$

$$F_{chys} = e^{-\frac{2n\pi(b-r)}{l}} I_{01}\left(\frac{n\pi r}{l}\right) K_{01}\left(\frac{n\pi b}{l}\right) - I_{01}\left(\frac{n\pi b}{l}\right) K_{01}\left(\frac{n\pi r}{l}\right),$$

$$F_{zn} = e^{-\frac{2n\pi(b-a)}{l}} I_{11}\left(\frac{n\pi a}{l}\right) K_{01}\left(\frac{n\pi b}{l}\right) + I_{01}\left(\frac{n\pi b}{l}\right) K_{11}\left(\frac{n\pi a}{l}\right).$$

#### IV. ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ.

Обчислювальний експеримент проводиться для наступних вхідних даних: початкове значення тиску – 40 атм; внутрішній діаметр 0.1 м; зовнішній – 2 м; коефіцієнт стиску - 0.91; температура газу -300 Кельвіна.

Результати обчислень подані на рисунках.

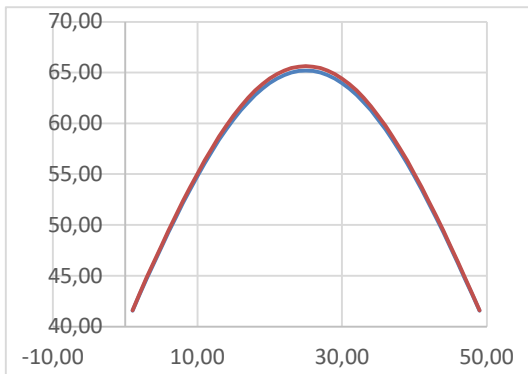


Рис.1. Залежність тиску від висоти циліндра висотою 50 метрів на відділі 2 м (синя лінія) та 6 метрів (червона лінія)

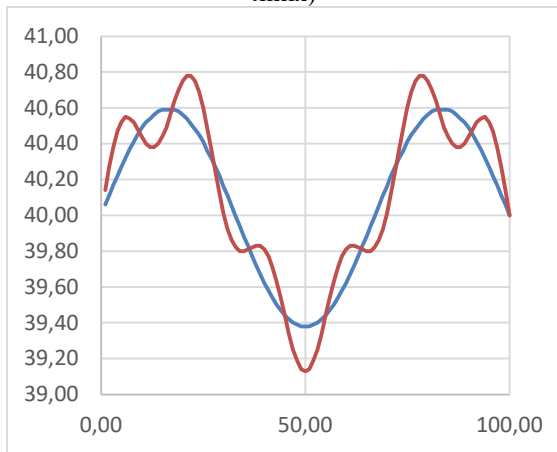


Рис.2. Залежність тиску від висоти циліндра висотою 100 метрів на відділі 2 м (синя лінія) та 6 метрів (червона лінія)

Таблиця 1.

Залежність розподілу тиску в пустотілому циліндрі від висоти  $l$  для різних радіусів  $r$  та висот  $z$ .

$l$	$z=20$		$z=50$	
	$r=2,1$	$r=4,1$	$r=2,1$	$r=4,1$
20	40	40	40,0786	40,0076
30	41,6574	41,7607	38,3426	38,2393
40	51,4222	51,5848	31,923	31,8084
50	56,3469	56,4622	40	40
60	56,4081	56,4814	49,4883	49,517
70	55,0172	55,09	55,0172	55,09
80	40,0359	40,0594	39,9354	39,9382
90	40,2218	40,2443	39,7332	39,7242
100	40,5593	40,5826	39,3803	39,3619
110	40,9592	40,9726	39,1216	39,0823

#### Нестационарний випадок.

Розв'язок шукається у вигляді

$$p(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r, t) \sin \frac{n\pi z}{l},$$

де

$$p_n(r, t) = \frac{1}{l} \int_0^l p(r, z, t) \sin \frac{n\pi z}{l} dz$$

За нульових граничних умов

$$p_n(r, t) = \frac{2l}{(n\pi)^2} \int_0^l p_{z^2}''(r, z, t) \sin \frac{n\pi z}{l} dz$$

З рівняння

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa p_1 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)$$

отримується наступне співвідношення для визначення невідомих коефіцієнтів

$$\frac{\partial p_n(r, t)}{\partial t} = \kappa p_1 \left( \frac{\partial^2 p_n(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_n(r, t)}{\partial r} + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 p_n(r, t) \right)$$

Розв'язок останнього рівняння шукаємо у вигляді

$$p_n(r, t) = u_n(r) \exp(-\kappa_1 \alpha_n^2 t) \quad \kappa_1 = \kappa p_1$$

Тоді функція  $u_n(r)$  визначається з диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} + \eta_n u_n = 0,$$

$$\eta_n = \alpha_n^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2.$$

За граничних умов на внутрішньому

$$p(a, z, t) = p_a(t) e^{-\sigma z}, \quad \sigma = \frac{2gh}{\chi RT}$$

та зовнішньому  $p(b, z, t) = p_b e^{\sigma z} \quad \sigma = \frac{1}{7999}$

контурах розв'язок рівняння має вигляд

$$p_n(r, t) = \frac{u_{na} \ln(b/r) + u_{nb} \ln(r/a)}{\ln(b/a)} - \pi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\{u_{na} J_0(a\eta_{ni}) - u_{nb} J_0(b\eta_{ni})\} J_0(a\eta_{ni}) U_0(r\eta_{ni})}{J_0^2(a\eta_{ni}) - J_0^2(b\eta_{ni})} \exp(-\kappa_i \eta_{ni} t)$$

$$u_{na} = \frac{p_a}{l} \frac{\sigma e^{\sigma z}}{\sigma^2 + (n\pi/l)^2} [(-1)^n - 1]$$

$$u_{nb} = \frac{p_b}{l} \frac{\sigma e^{\sigma z}}{\sigma^2 + (n\pi/l)^2} [(-1)^n - 1]$$

Тут  $\eta_{ni}$  корінь рівняння

$$J_0(a\eta_n) Y_0(b\eta_n) - J_0(b\eta_n) Y_0(a\eta_n) = 0.$$

## V. ВИСНОВКИ ТА ОБГОВОРЕННЯ

В роботі побудовані математичні моделі масопереносу в складних пористих середовищах. Отримані результати можна використати для моделювання фільтрації газу в пластах пористих середовищ, поширення крові в м'яких тканинах живих організмів, масопереносу в рослинах. На основі даних підземних сховищ газу проведений числовий експеримент, який підтверджує отримані теоретичні результати.

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] N. B. Lopuh and Ya. D. Pyanylo Numerical analysis of models with fractional derivatives for gas filtration in porous media //J. Coupled Syst. Multiscale Dyn. 2, 15-19 (2014).
- [2] Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. Springer, 1992. 408 p.
- [3] Pyanylo Ya., Bratash O., Pyanylo H. Solving of differential equations systems in the presence of fractional derivatives using the orthogonal polynomials. // Mathematical modeling and computing. – 2017. – Volume 4, Number 1. – pp. 87–95.
- [4] Ya. Pyanylo, V. Sobko, O. Bratash The mass transfer research in complex porous media and pipelines by spectral methods MMC. 2017; Volume 4, Number 2 pp. 187-196
- [5] А.Ф. Богомолова, Н. А. Орлова Количественная характеристика структуры порового пространства //Прикладная механика и техническая физика 1961, № 4, Москва с.77-81.
- [6] Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. – М: Издательство технико-теоретической литературы, 1947. – 245 с.
- [7] Н.М.Притула, Я.Д.П'янило, М.Г.Притула / Підземне зберігання газу (математичні моделі та методи) – Львів, Растр-7, 2015. - 266 с. - 30 іл .
- [8] Н.Б.Лопух, Я.Д.П'янило, М.Г.Притула, Н.М. Притула. Розрахунок початково– граничних умов в задачах фільтрації газу в пористих середовищах”. Вісник Національного університету “Львівська політехніка: Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, – 2009. – №638. – с.239-243 .
- [9] П'янило Я.Д. Використання інтегральних перетворень Якобі та Чебишева–Лагерра для розв'язування інтегральних рівнянь // Доп. НАН України – 1998. – № 8. – С. 41–46.
- [10] П'янило Я.Д., Притула М.Г., Притула Н.М. Неусталений рух газу в трубопроводах і пористих середовищах // Фізико – математичне моделювання і інформаційні технології. –2006.–Вип. 4.–С. 72–80.
- [11] Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика // М.: Государственное научно-техническое издательство нефтяной и горно-топливной литературы, 1963. - 397 с.
- [12] Г. Бейтмен и А. Эрдейи Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., 1965 г., 296 стр.

# Математичні Моделі Процесу Масопереносу в Складних Пористих Структурах

Ярослав П'янило

Центр математичного моделювання  
Інституту прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України  
Львів, Україна  
danylo794@

Галина П'янило

Центр математичного моделювання  
Інституту прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України  
Львів, Україна  
danylo794@gmail.com

## Mathematical Models of the Mass Transfer Process in Complex Porous Structures

Yaroslav Pyanylo

Center of Mathematical Modeling  
of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics  
and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine  
Lviv, Ukraine  
danylo794@gmail.com

Halyna Pyanylo

Center of Mathematical Modeling  
of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics  
and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine  
Lviv, Ukraine  
danylo794@gmail.com

**Анотація**—Побудовано та досліджено математичні моделі масопереносу в складних пористих середовищах з врахуванням історії процесу та капілярного підходу. Запропоновано методи розв'язування крайових задач з використанням похідних дробових порядків.

**Abstract**— Mathematical models of mass transfer in complex porous media were constructed and investigated, taking into account the history of the process and the capillary approach. Methods of solving boundary value problems using derivatives of fractional orders are proposed..

**Ключові слова**—процесм фільтрації, диференціальні рівняння; похідні дробових порядків; спектральні методи.

**Keywords**— filtering process, differential equations; derivatives of fractional orders; spectral methods.

### I. Вступ

Математичне моделювання природних процесів зводиться, як правило, до крайових задач математичної фізики. Рівняння які необхідно розв'язувати, залежать від

складності процесу, який вивчається. Досить часто це є звичайні диференціальні рівняння або диференціальні рівняння в частинних похідних. В більшості випадків вхідною інформацією служать експериментальні дані з невисокою точністю. Разом з тим крайові задачі є нелінійними. Адаптивність математичної моделі залежить від врахування параметрів процесів, що вивчаються та характеристик самих процесів. Крім того необхідно зауважити, що існує суттєвий зв'язок між точністю вхідної інформації та складністю математичної моделі. Як правило, чим складніша математична модель, тим більше і точнішої інформації необхідно мати.

Метою роботи є дослідження адаптивності математичних моделей масопереносу в складних пористих середовищах в залежності від їх складності та природи середовища.

II. ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ МАСОПЕРЕНОСУ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ.

Фільтрація газу в пласті пластах пористих середовищ (ПСГ) в нестационарному випадку описується нелінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних [1,3,4,7,8]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_x h}{\mu \chi} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k_y h}{\mu \chi} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k_z h}{\mu \chi} \frac{\partial p^2}{\partial z} \right) = 2\alpha_n m h \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\chi} \right) + 4m h q p_{st}, \quad (1)$$

яке має місце в трьохвимірній області  $\Omega_3 \subset R^3$ . На  $\Omega_3$  задана множина точок (множина свердловин) з координатами  $\{x_i, y_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  та значення тисків  $p(x_i, y_i, z_i, t_0)$  в цих точках в момент часу  $t_0$ . В рівнянні (1) позначено:  $k_u$  – проникність пласту в напрямі  $u$ ,  $\mu$  – динамічна в'язкість газу,  $\chi$  – коефіцієнт стисливості,  $h$  – товщина пласту,  $m$  – пористість пласту,  $\alpha_n$  – коефіцієнт газонасиченості,  $p_{st}$  – значення атмосферного тиску в стандартних умовах.

Густина відбору  $q$  визначається формулою

$$q = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^I q_i \delta(x - x_i^0) (y - y_i^0) [\eta(t - t_{1i}) - (t - t_{2i})]. \quad (2)$$

В останній формулі  $q_i$  – відбір газу з  $i$ -ої свердловини,  $\delta(x)$  – дельта-функція Дірака,  $\eta(t - t_{ji})$  – одинична функція Хевісайда.

Рівняння (1) є нелінійним за тиском і з розподіленими змінними. При розв'язуванні рівняння (1) параметри, які входять в нього входять, вважаються сталими і є усередненими значеннями в просторі і за часом. Очевидно, що в процесах фільтрації вони змінюються. Далі, процеси фільтрації вуглеводнів можна розглядати як процеси з пам'яттю. Одним з підходів врахування цієї особливості є застосування похідних дробових порядків. В термінах похідних дробових порядків рівняння фільтрації запишеться у вигляді [4,5,9,10]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{kh}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{kh}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{kh}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 2mh \left( \frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} + 2q p_{at} \right),$$

або в циліндричних координатах

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha}, \quad \kappa = \frac{k}{2\mu\alpha m}.$$

Тут  $\alpha$  - порядок дробової похідної. За Капутто дробова похідна порядку  $\alpha$  визначається формулою [1,4]

$$D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau.$$

Дробовою похідною Рімана-Ліувілля порядку  $\alpha$  для функції  $f(t)$ ,  $t \in [a, b]$  називають вираз

$$D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

III. МОДЕЛЮВАННЯ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩ СИСТЕМОЮ КАПІЛЯРІВ.

Змоделюємо пористе середовище системою капілярів з радіусом  $r$ . Будемо вважати, що в поперечному перерізі капіляри розподілені за логарифмічним законом [6,9,14,15]

$$f(r) = n_0 \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{r}{r_0} \right].$$

Очевидно, що параметри функції розподілу  $n_0$ ,  $r_0$ ,  $\sigma$  повинні визначатися через параметри пористого середовища. Для побудови математичної моделі фільтрації з використанням вказаного розподілу необхідно знайти зв'язок між параметрами середовища та параметрами функції розподілу. Знайдемо ці залежності.

Будемо розглядати одиничне січення. На інтервалі  $(r, r + \Delta r)$  кількість капілярів є  $dN = f(r) dr$ .

Тоді кількість капілярів в одиничному січенні буде

$$N = \int_0^\infty f(r) dr = \sqrt{2\pi} n_0 r_0 \sigma \exp(\sigma^2/2).$$

За вибраного розподілу капілярів ефективна пористість  $m$  середовища буде

$$m = \pi \int_0^\infty r^2 f(r) dr = \pi N r_0^2 \exp(4\sigma^2).$$

Згідно формули Гагена-Пуазеля витрата  $q$  через капіляр радіуса  $r$  визначається за формулою

$$q = -\frac{\pi r^4}{8\mu} \frac{dp}{dx}.$$

Тоді витрата  $Q$  через одиничний переріз буде

$$Q = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{dp}{dx} \int_0^\infty r^4 f(r) dr = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{dp}{dx} r_0^4 N \exp(12\sigma^2).$$

З іншої сторони за формулою Дарсі

$$Q = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx}.$$

З останніх двох формул отримаємо

$$k = \frac{\pi}{8} \int_0^\infty r^4 f(r) dr = \frac{\pi}{8} r_0^4 N \exp(12\sigma^2).$$

Оскільки

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8\mu}{\pi} Q r_0^{-4} N^{-1} \exp(-12\sigma^2),$$

то інтегрування вздовж капіляра довжини  $l$  приводить до формули

$$p_1 - p_2 = -\frac{8\mu}{\pi} l Q r_0^{-4} N^{-1} \exp(-12\sigma^2).$$

Таким чином система для визначення невідомих параметрів має вигляд

$$p_1 - p_2 = -\frac{8\mu}{\pi} l Q r_0^{-4} N^{-1} \exp(-12\sigma^2),$$

$$m = \pi N r_0^2 \exp(4\sigma^2),$$

$$k = \frac{\pi}{8} r_0^4 N \exp(12\sigma^2),$$

де

$$N = \sqrt{2\pi n_0} r_0 \sigma \exp(\sigma^2/2).$$

Зокрема

$$\sigma^2 = \frac{1}{8} \ln \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi r_0^2}{8k}.$$

Знайшовши параметри функції  $f(r)$ , можна знайти

розподіл тиску вздовж капілярів, які розміщені за раніше поданим законом. Вхідними параметрами для розв'язання цієї задачі є: значення пористості та проникності, об'ємний розхід та значення тисків на границях пористого середовища.

Розподіл тиску в усталеному режимі масопереносу задається формулою

$$p(x) = p_0 - \frac{8\mu}{\pi} Q r_0^{-4} N^{-1} x \exp(-12\sigma^2).$$

#### IV. ОСНОВНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ

ЗАДАЧ В ТЕРМІНАХ ПОХІДНИХ ДРОБОВИХ ПОРЯДКІВ.

##### 1. Основними методами розв'язування

диференціальних рівнянь в частинних похідних є застосування інтегрального перетворення Лапласа та зведення інтегро-диференціального рівняння до схеми Грюнвальда-Летнікова. Суть схеми полягає в тому, що дробова похідна  $\partial^\alpha p / \partial t^\alpha$  дискретизується наступним

$$\text{чином } \frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lceil \tau/\Delta t \rceil} (-1)^j \binom{\alpha}{j} p(\tau - j\Delta t).$$

Оператор Грюнвальда-Летнікова апроксимується на проміжку  $[0, \tau]$  з підінтервальним кроком  $\Delta t$  сумою

$$\sum_{j=0}^{\lceil \tau/\Delta t \rceil} c_j^{(\alpha)} p(\tau - j\Delta t). \quad \text{З використанням процесу}$$

дискретизації знаходження розв'язку зводиться до розв'язування алгебраїчної системи рівнянь відносно значень шуканої функції у вузлових точках [1].

##### 2. Іншим ефективним методом є застосування

ортогональних многочленів, зокрема Чебишева-Лагерра, який полягає в наступному [12,16,17].

Нехай функції, які входять в інтегральну згортку

$$D_{0+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t k(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

подаються у вигляді ряду Фур'є-Лагерра. Функцію  $f(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$  розвинемо у ряд за многочленами Лагерра  $L_m(t)$

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x) L_m(t),$$

де

$$f_m = \int_0^{\infty} e^{-t} L_m(t) f(t) dt.$$

Якщо  $k_n$  та  $f_m$  — коефіцієнти Фур'є-Лагерра функцій  $k(t)$  й  $f(t)$ , то для коефіцієнтів Фур'є-Лагерра функції

$D_{0+}^\alpha f(t)$  має місце рекурентна формула

$$c_n = \sum_{m=0}^n k_m f_{n-m} = \sum_{m=0}^n k_{n-m} f_m.$$

#### V. ЗВ'ЯЗОК ПОХІДНИХ ДРОБОВИХ ПОРЯДКІВ З ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ.

$$D_\tau^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} \varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \tau^{m+1}} \int_0^\tau \frac{\varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{\alpha-m}} d\xi$$

Не зменшуючи загальності можемо вважати, що в операторі дробової похідної у термінах Рімана-Ліув'єля  $\tau \in [0, 1]$ , оскільки довільний скінченний проміжок  $t \in [0, T]$  лінійною заміною можна звести до одиничного проміжку. Введемо заміну змінних  $\xi = \tau x \quad d\xi = \tau dx$ .

Тоді

$$D_\tau^\alpha = \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \tau^{m+1}} \tau^{m-\alpha+1} \int_0^1 \frac{\varphi(\tau x)}{(1-x)^{\alpha-m}} dx.$$

Функцію  $\varphi(x)$  розкладемо в ряд за зміщеними

многочленами Лежандра

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n P_n(2x-1), \quad \varphi_n = \int_0^1 \varphi(x) P_n(2x-1) dx.$$

Многочлени Лежандра пов'язані з гіпергеометричною функцією

$$P_n(x) = (-1)^n F\left(-n, n+1; 1; \frac{1+x}{2}\right).$$

Враховуючи останні формули, отримуємо співвідношення

$$D_\tau^\alpha = \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \tau^{m+1}} \tau^{m-\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \int_0^1 \frac{P_n(2\tau x-1)}{(1-x)^{\alpha-m}} dx$$



та

$$D_{\tau}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \tau^{m+1}} \tau^{m-\alpha+1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (-1)^n \int_0^1 (1-x)^{m-\alpha} F(-n, n+1; 1; \tau x) dx$$

Має місце рівність

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(s)\Gamma(c-s)} \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{c-s-1} F(a, b; s; xz) dx$$

З останніх двох формул отримуємо

$$D_{\tau}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \tau^{m+1}} \tau^{m-\alpha+1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi_n}{m+1-\alpha} F(-n, n+1; m+2-\alpha; \tau)$$

або

$$D_{\tau}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi_n}{m+1-\alpha} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \tau^{m+1}} \left[ \tau^{m-\alpha+1} F(-n, n+1; m+2-\alpha; \tau) \right]$$

Оскільки

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial \tau^{m+1}} \left[ \tau^{m-\alpha+1} F(-n, n+1; m+2-\alpha; \tau) \right] = \\ (1-\alpha)_{m+1} \tau^{-\alpha} F(-n, n+1; 1-\alpha; \tau)$$

то

$$D_{\tau}^{\alpha} = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi_n F(-n, n+1; 1-\alpha; \tau).$$

## VI. ОБГОВОРЕННЯ ТА ВИСНОВКИ.

Аналіз отриманих числових результатів показує, що математичні моделі процесу фільтрації, побудовані на застосуванні похідних дробових порядків, описують якісну картину розподілу тиску в особливих точках. Застосування похідних дробових порядків (рис.1-3,  $\alpha < 1$ ) тиск змінюється плавно. Це відповідає реальній його поведінці. Результати обчислень показують, що значення порядку часткової похідної не впливає на середнє значення тиску в пласті. Такий підхід не може врахувати всіх особливостей процесу фільтрації. Зокрема, не враховується траєкторія руху речовини, реальна та абсолютна пористість тощо.

Значення усередненого параметру пористості середовищ на практиці змінюється від 0.25 до 0.36. Очевидно, що якщо проходить процес руху вуглеводнів, то пори не можуть бути закритими і рух відбувається певними відкритими каналами (капілярами) Тому доцільно побудувати капілярну модель фільтрації вуглеводнів в природних пористих середовищах.

Поряд з логарифмічним розподілом капілярів для побудови математичної моделі фільтрації речовин можна

використати і інші види розподілів. Однак їх вибір повинен бути практично обґрунтованим. В природі пористі середовища є анізотропними. Математичне моделювання процесів фільтрації в складних пористих середовищах системою капілярів дозволяє врахувати їх ізотропність. Якщо будувати математичні моделі фільтрації на базі усереднених даних параметрів пористого середовища, то важко врахувати цю анізотропність. Отримані результати за рахунок вибору функцій розподілу капілярів дозволяють в деякій мірі врахувати наявну анізотропність. Моделювання процесу фільтрації системою капілярів дозволяє врахувати геометрію та фізичні властивості капілярів, зокрема звивистість та еластичність. Це може бути успішно застосовано для математичного моделювання процесу руху крові в м'яких тканинах живих організмів, руху поживних речовин в рослинах тощо.

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] N. B. Lopuh and Ya. D. Pyanylo Numerical analysis of models with fractional derivatives for gas filtration in porous media //J. Coupled Syst. Multiscale Dyn. 2, 15-19 (2014).
- [2] Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. Springer, 1992. 408 p.
- [3] Pyanylo Ya., Bratash O., Pyanylo H. Solving of differential equations systems in the presence of fractional derivatives using the orthogonal polynomials. // Mathematical modeling and computing. – 2017. – Volume 4, Number 1. – pp. 87–95.
- [4] Ya. Pyanylo, V. Sobko, O. Bratash The mass transfer research in complex porous media and pipelines by spectral methods MMC. 2017; Volume 4, Number 2 pp. 187-196
- [5] А.Ф. Богомолова, Н. А. Орлова Количественная характеристика структуры порового пространства //Прикладная механика и техническая физика 1961, № 4, Москва с.77-81.
- [6] Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. – М: Издательство технико-теоретической литературы, 1947. – 245 с.
- [7] Н.М.Притула, Я.Д.П'янило, М.Г.Притула / Підземне зберігання газу (математичні моделі та методи) – Львів, Растр-7, 2015. - 266 с. - 30 іл .
- [8] Н.Б.Лопух, Я.Д.П'янило, М.Г.Притула, Н.М. Притула. Розрахунок початково– граничних умов в задачах фільтрації газу в пористих середовищах”. Вісник Національного університету “Львівська політехніка: Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, – 2009. – №638. – с.239-243 .
- [9] П'янило Я.Д. Використання інтегральних перетворень Якобі та Чебишева–Лагерра для розв’язування інтегральних рівнянь // Доп. НАН України – 1998. – № 8. – С. 41–46.
- [10] П'янило Я.Д., Притула М.Г., Притула Н.М. Неусталений рух газу в трубопроводах і пористих середовищах // Фізико – математичне моделювання і інформаційні технології. –2006.–Вип. 4.–С. 72–80.
- [11] Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика // М.: Государственное научно-техническое издательство нефтяной и горно-топливной литературы, 1963. - 397 с.
- [12] Г. Бейтмен и А. Эрдейи Высшие трансцендентные функции.
- [13] Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., 1965 г., 296 стр.

# Застосування методу двобічних наближень до аналізу рівноваги балки під дією нелінійної зовнішньої сили

Антон Савченко  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет  
радіоелектроніки  
Харків, Україна  
anton.savchenko@nure.ua

Максим Сидоров  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний університет  
радіоелектроніки  
Харків, Україна  
maxim.sidorov@nure.ua

## Application of the method of two-sided approximations to the analysis of the equilibrium of the beam under the action of non-linear external force

Anton Savchenko  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
anton.savchenko@nure.ua

Maxim Sidorov  
dept. of Applied Mathematics  
Kharkiv National University of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
maxim.sidorov@nure.ua

*Анотація*—У роботі розглянуто застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна до знаходження додатного розв'язку нелінійної крайової задачі, що описує процес деформації балки під дією нелінійної зовнішньої сили. Вихідна крайова задача зведена до нелінійного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке було досліджено методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах.

*Abstract*—This paper is dedicated to use the method of two-sided approximation based on the use of Green's functions to find positive solution of the nonlinear boundary value problem, which describes the process of deformation of beams under the action of nonlinear external force. The initial boundary value problem is reduced to the nonlinear Hammerstein integral equation, which was investigated by the methods of the theory of nonlinear operators in semiordered Banach spaces.

*Ключові слова*—гетеротонний оператор; крайова задача; метод двобічних наближень; нелінійне диференціальне рівняння четвертого порядку; прогин; сильно інваріантний конусний відрізок; функція Гріна

*Keywords*—heterotone operator; boundary value problem; method of two-sided approximations; nonlinear differential equation of the fourth order; deflection; strongly invariant segment; Green's function

### I. ВСТУП

Балка є спільним елементом конструкцій мостів, веж, будівель, літаків, кораблів тощо. Дослідження механіки балок бере свій початок у роботах Леонардо да Вінчі та Галілео Галілея. У XVII–XVIII ст. завдяки роботам Леонардо Ейлера, Якоба та Даніеля Бернуллі зароджується нова теорія, яка згодом буде названа класичною теорією балок. Нажаль, до кінця XIX століття їй не приділялась особлива увага і лише після розробки проекту Ейфелевої вежі та оглядового колеса вона стала наріжним каменем інженерії та інструментом реалізації другої промислової революції. Подальший розвиток ця теорія набула завдяки роботам видатного вченого у галузі механіки Степана Тимошенка [1, 2].

Математичною моделлю процесу рівноваги балки є нелінійне диференціальне рівняння четвертого порядку

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x) \cdot I(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right] = f(x, u), \quad 0 < x < l,$$

де  $E(x)$  – модуль пружності Юнга,  $I(x)$  – момент інерції поперечного перерізу,  $f(x, u)$  – нелінійна функція, що описує дію зовнішньої сили.

Для різних способів закріплення кінців балки ми отримуємо різні крайові умови і, як наслідок, нелінійну крайову задачу.

Дослідження задач даного класу аналітичними методами у більшості випадків неможливе, а тому виникає необхідність використовувати чисельні методи. Для розв'язання цієї задачі можуть бути використані метод скінчених різниць (метод сіток), метод лінеаризації Ньютона-Канторовича, варіаційні методи, метод двобічних наближень тощо. Метод двобічних наближень дає змогу не лише провести дослідження існування та єдиності розв'язків операторного рівняння, а й фактично їх знайти. Варто також відзначити, що даний метод має зручну апостеріорну оцінку наближеного розв'язку. Отже, актуальним є дослідження рівноваги балки під дією нелінійної зовнішньої сили методами з двобічним характером збіжності до шуканого розв'язку.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо крайову задачу, що описує прогин балки одиничної довжини, яка просто підтримується, та на яку діє нелінійна зовнішня сила і вважатимемо, що модуль пружності Юнга  $E(x)$  та момент інерції поперечного перерізу  $I(x)$  сталі й  $EI = 1$ . Таким чином, отримуємо наступну крайову задачу [7]

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \sigma \frac{u}{1+u} + q(x), \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$u(x) > 0, \quad x \in (0, 1), \quad (2)$$

$$u(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad u''(1) = 0, \quad (3)$$

де  $q(x) = \left( \pi^4 - \frac{\sigma}{1 + \sin \pi x} \right) \sin \pi x$ ,  $0 < \sigma \leq \pi^4$  (умова  $\sigma \leq \pi^4$  гарантує, що  $q(x) \geq 0$  при  $x \in [0, 1]$ ).

## III. ПОБУДОВА ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Нехай  $C[0, 1]$  – банахів простір неперервних на відрізьку  $[0, 1]$  функцій з нормою  $\|u\| = \max_{x \in [0, 1]} |u(x)|$ . Виділимо у  $C[0, 1]$  конус невід'ємних функцій  $K_+$ , тобто  $K_+ = \{u \in C[0, 1] : u(x) \geq 0, x \in [0, 1]\}$ . Конус  $K_+$  у  $C[0, 1]$  є нормальним (і навіть гострим) [3, 4].

За допомогою конуса  $K_+$  у просторі  $C[0, 1]$  введемо напівупорядкованість за правилом: для  $u, v \in C[0, 1]$   $u \leq v$ , якщо  $v - u \in K_+$ , тобто

$$u \leq v, \quad \text{якщо } u(x) \leq v(x) \text{ для всіх } x \in [0, 1].$$

Від задачі (1) – (3) перейдемо до інтегрального рівняння Гаммерштейна

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s) \left( \sigma \frac{u(s)}{1+u(s)} + q(s) \right) ds, \quad (4)$$

де  $G(x, s)$  – функція Гріна задачі (1) – (3), яка має вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} \left( \frac{1}{6} s^3 - \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{3} s \right) x + \left( \frac{1}{6} s - \frac{1}{6} \right) x^3, & 0 \leq x \leq s, \\ \left( \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x \right) s + \left( \frac{1}{6} x - \frac{1}{6} \right) s^3, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

З результатів роботи [5] випливає, що функція Гріна задачі (1) – (3) невід'ємна, причому у середині квадрату  $0 \leq x, s \leq 1$  строго додатна.

Сенс еквівалентності крайової задачі (1) – (3) та інтегрального рівняння (4) полягає у тому, що узагальненим розв'язком крайової задачі (1) – (3) називатимемо функцію  $u^* \in C[0, 1]$ , яка є розв'язком інтегрального рівняння (4).

З рівнянням (4) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор, що діє у  $C[0, 1]$  за правилом

$$T(u)(x) = \int_0^1 G(x, s) \left( \sigma \frac{u(s)}{1+u(s)} + q(s) \right) ds. \quad (5)$$

Враховуючи останнє співвідношення, рівняння (4) матиме вигляд  $u = T(u)$ .

Очевидно, що оператор  $T$  вигляду (5) є додатним.

Функція  $f(x, u)$  дозволяє діагональне подання

$$\hat{f}(x, v, w) = \sigma \frac{v}{1+w} + q(x). \text{ Оскільки } \hat{f}'_v(x, v, w) = \frac{\sigma}{1+w} > 0 \text{ і}$$

$$\hat{f}'_w(x, v, w) = -\frac{v\sigma}{(1+w)^2} < 0 \text{ при } v > 0, w > 0, \sigma > 0, \text{ то}$$

функція  $\hat{f}(x, v, w)$  монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$ . Таким чином, інтегральний оператор (5) буде гетеротонним оператором зі супровідним оператором вигляду

$$\hat{T}(v, w)(x) = \int_0^1 G(x, s) \left( \sigma \frac{v(s)}{1+w(s)} + q(s) \right) ds.$$

Оскільки  $f(x,0) > 0$ ,  $x \in (0, 1)$ , то кінці сильно інваріантного конусного відрізка шукатимемо у вигляді  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$  [6]. Тоді умови, що виділяють сильно інваріантний конусний відрізок, набувають вигляду

$$\int_0^1 G(x,s) \left( \sigma \frac{v_0(s)}{1+w_0(s)} + q(s) \right) ds \geq v_0(x) \quad \forall x \in [0, 1],$$

$$\int_0^1 G(x,s) \left( \sigma \frac{w_0(s)}{1+v_0(s)} + q(s) \right) ds \leq w_0(x) \quad \forall x \in [0, 1],$$

або

$$\int_0^1 G(x,s) q(s) ds \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

$$\int_0^1 G(x,s) \left( \sigma \beta + \left( \pi^4 - \frac{\sigma}{1+\sin \pi s} \right) \sin \pi s \right) ds \leq \beta \quad \forall x \in [0, 1].$$

Перша з цих нерівностей завжди виконується, оскільки  $G(x,s) \geq 0$  для всіх  $0 \leq x, s \leq 1$  і  $q(x) \geq 0$  для всіх  $0 \leq x \leq 1$ . Другу нерівність можемо записати у вигляді

$$\sigma \beta M_1 + \pi^4 M_2 - \sigma M_3 \leq \beta, \quad (6)$$

$$\text{де } M_1 = \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 G(x,s) ds = \frac{5}{384},$$

$$M_2 = \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 G(x,s) \sin \pi s ds = \frac{1}{\pi^4},$$

$$M_3 = \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 G(x,s) \frac{\sin \pi s}{1+\sin \pi s} ds = \frac{5\pi^4 + 48\pi^2 \ln 2 - 504\zeta(3)}{384\pi^4},$$

а  $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$  – дзета-функція Рімана.

Тоді  $\pi^4 M_2 - \sigma M_3 > 0$  при  $0 < \sigma \leq \pi^4$ ,  $1 - \sigma M_1 > 0$  при  $\sigma < \frac{384}{5}$  і з нерівності (6) отримуємо, що

$$\beta \geq \frac{\pi^4 M_2 - \sigma M_3}{1 - \sigma M_1}. \quad (7)$$

Для більш швидшої збіжності ітерацій величина  $\max_{x \in [0,1]} (w_0(x) - v_0(x)) = \beta$  має бути якомога меншою, тому необхідно взяти найменше  $\beta$ , що задовольняє умові (7), тобто

$$\beta = \frac{384\pi^4 - \sigma[5\pi^4 + 48\pi^2 \ln 2 - 504\zeta(3)]}{(384 - 5\sigma)\pi^4}. \quad (8)$$

Отже, гетеротонний оператор  $T$  вигляду (5) при  $0 < \sigma < \frac{384}{5}$  має сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle 0, \beta \rangle$ , де стала  $\beta$  визначається рівністю (8).

Ітераційний процес методу двобічних наближень сформулюємо за формулами

$$v^{(k)}(x) = \int_0^1 G(x,s) \left( \sigma \frac{v^{(k-1)}(s)}{1+w^{(k-1)}(s)} + q(s) \right) ds, \quad k = 1, 2, K,$$

$$w^{(k)}(x) = \int_0^1 G(x,s) \left( \sigma \frac{w^{(k-1)}(s)}{1+v^{(k-1)}(s)} + q(s) \right) ds, \quad k = 1, 2, K,$$

$$v^{(0)}(x) = v_0(x) = 0, \quad w^{(0)}(x) = w_0(x) = \beta. \quad (9)$$

Враховуючи викладене у [4] можемо сформулювати умову збіжності ітераційного процесу (9).

Маємо, що конус  $K_+$  нормальний, оператор  $\hat{T}$  цілком неперервний та на сильно інваріантному конусному відріжку  $\langle v_0, w_0 \rangle$  для нього справджується умова

$$\|\hat{T}(v, w) - \hat{T}(w, v)\| \leq \gamma \|v - w\|,$$

де  $\gamma = \sigma M_1 = \frac{5\sigma}{384}$ . Тоді, якщо  $\gamma < 1$ , тобто  $\sigma < \frac{384}{5}$ , то ітераційний процес (9) двобічно збігається до єдиного додатного розв'язку задачі (1) – (3), причому мають місце ланцюг нерівностей

$$v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(n)} \leq \dots \leq v^* \leq \dots \leq w^{(n)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)}.$$

Отримані дві послідовності  $\{v^{(n)}\}$ ,  $\{w^{(n)}\}$ , які знизу та зверху наближають шуканий розв'язок  $u^*$  як раз і характеризують ітераційний процес (9) як метод двобічних наближень.

Якщо за наближений розв'язок рівняння  $u = T(u)$  на  $k$ -ій ітерації обрати  $u^{(k)} = \frac{v^{(k)} + w^{(k)}}{2}$ , то буде мати місце оцінка  $\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \|w^{(k)} - v^{(k)}\|$ .

Звідси випливає, що ітерації потрібно проводити до виконання нерівності  $\|w^{(k)} - v^{(k)}\| \leq 2\varepsilon$  і тоді з точністю  $\varepsilon$  можна покласти, що  $u^* \approx u^{(k)}$ .

#### IV. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Покладемо  $\sigma = 30$ . Задаємо точність  $\varepsilon = 10^{-5}$ . В результаті проведеного дослідження у п. 3 сильно інваріантний конусний відрізок шукаємо у вигляді  $\langle \theta, \beta \rangle$ , де  $\beta$  – визначається з рівності (8). Обчисливши отримуємо, що  $\beta = 1,36519$ .

Проводимо ітераційний процес (9). Процес зійшовся із заданою точністю за дев'ять ітерацій. На рис. 1 наведено графіки верхніх  $w^{(k)}(x)$  та нижніх  $v^{(k)}(x)$  наближень,  $k = \overline{0, 9}$ . На рис. 2 наведено графік наближеного розв'язку  $u^{(9)}(x)$ .

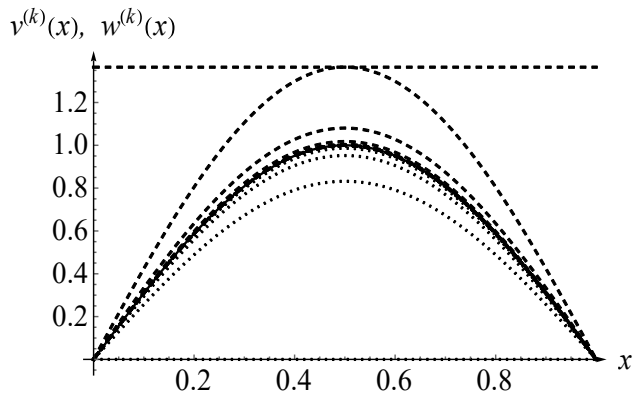


Рис. 1. Графіки верхніх та нижніх наближень

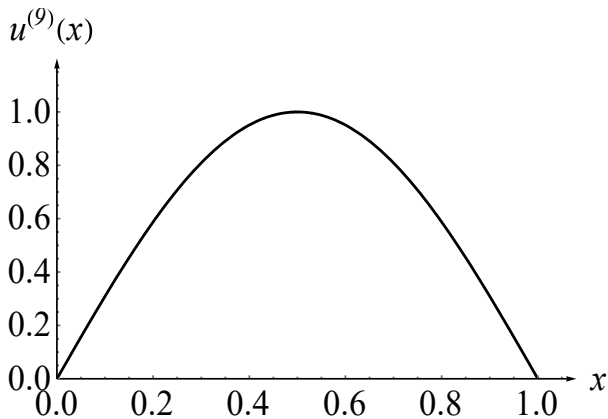


Рис. 2. Графік наближеного розв'язку

У табл. 1 наведено значення оцінки похибки

$$\varepsilon_k = \max_{x \in [0, 1]} |w^{(k)} - v^{(k)}|, \quad (10)$$

де  $k$  – номер ітерації.

TABLE I. ЗНАЧЕННЯ ОЦІНКИ ПОХИБКИ

Ітерація	Оцінка похибки
0	$0,68 \cdot 10^0$
1	$0,27 \cdot 10^0$

2	$0,64 \cdot 10^{-1}$
3	$0,16 \cdot 10^{-1}$
4	$0,38 \cdot 10^{-2}$
5	$0,92 \cdot 10^{-3}$
6	$0,22 \cdot 10^{-3}$
7	$0,54 \cdot 10^{-4}$
8	$0,13 \cdot 10^{-4}$
9	$0,32 \cdot 10^{-5}$

Аналізуючи дані табл. 1, бачимо, що у наближеному розв'язку один знак після коми встановлюється за дві ітерації.

Для оцінки швидкості збіжності ітераційного процесу можемо скористатися величиною  $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$ , де  $\varepsilon_k$  визначається рівністю (10). Встановили, що процес збігається зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником  $Q \approx 0,244$ .

#### V. ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто крайову задачу, що описує процес деформації балки, яка просто підтримується, під дією нелінійної зовнішньої сили. За допомогою методу функцій Гріна крайова задача була зведена до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна. Отримане інтегральне рівняння вперше було досліджено методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах та отримано умови збіжності ітераційного процесу методу двобічних наближень до єдиного додатного розв'язку задачі. Побудовано алгоритм методу двобічних наближень для розглядуваної задачі та виконано його програмну реалізацію в хмарі Wolfram Cloud. За допомогою розробленого програмного продукту було проведено низку обчислювальних експериментів для тестової задачі. Розглянутий у роботі метод може бути використаний при дослідженні методом математичного моделювання процесу рівноваги балки з іншою нелінійною зовнішньою силою та типами закріплення кінців. Цим визначається наукова новизна та практична значущість отриманих результатів.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Gere J. M., Timoshenko S. P. Mechanics of Materials 4th Edition. Boston : PWS Publishing Company, 1997. 914 p.
- [2] Timoshenko S. History of Strength of Materials: With a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures. York : McGraw-Hill, 1953. 452 p.
- [3] Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Москва : Физматгиз, 1962. 394 с.
- [4] Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
- [5] Покорный Ю. В., Мустафокулов Р. О позитивной обратимости некоторых краевых задач для уравнения четвертого порядка // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, №10 (33). С. 1358-1365.
- [6] Сидоров М. В. Методи двобічних наближень розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики : дис. на здобуття наук. ступеня д-ра. фіз.-мат. наук : 01.05.02 / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2019. 486 с.
- [7] Pao C. V. Numerical methods for fourth-order nonlinear elliptic boundary value problems // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2001. № 17 (4). P. 347-368.

# Моделювання хвильових процесів у неоднорідних періодичних середовищах

Геннадій Сандраков  
факультет комп'ютерних наук та кібернетики  
Київський національний університет  
імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
gsandrako@mail.com

## Modeling of wave processes in heterogeneous periodic media

Gennadiy Sandrakov  
Faculty of Computer Science and Cybernetics  
Taras Shevchenko National University of Kyiv  
Kyiv, Ukraine, gsandrako@mail.com

**Анотація** — Розглядається моделювання хвильових процесів у неоднорідних середовищах. Як моделі таких середовищ обираються періодичні середовища з малим коефіцієнтом мікромасштабності. Враховується, що відповідні моделі для хвильових рівнянь залежать від малих параметрів, що характеризують мікромасштабність та проникність таких середовищ. Наведено осереднені рівняння та алгоритм визначення асимптотичних розв'язків для хвильових рівнянь. Презентовані оцінки точності таких розв'язків, які дозволяють значно спростити чисельне розв'язання і комп'ютерне моделювання для таких процесів. Такі оцінки відображають появу осцилюючих доданків, що характеризують суттєве поглинання енергії, яке може бути використане для проектування хвилепоглинаючих композиційних матеріалів.

**Abstract** — Modeling of wave processes in heterogeneous media are considered. Periodic media with a small microscale coefficient are chosen as models of such media. It is taken into account that the appropriate models for wave equations depend on small parameters characterizing the microscale and penetration of the media. Homogenized equations and an algorithm for determining asymptotic expansions for wave equations are given. Accuracy estimates of the expansions are presented, which make it possible to significantly simplify the numerical solution and computer modeling for such processes. The estimates reflect the appearance of oscillating terms, which characterizes the significant absorption of energy, which can be used for the design of wave-absorbing composite materials.

**Ключові слова**—хвильові рівняння; осереднені задачі; композиційні матеріали; перетворення Лапласа.

**Keywords**—wave equations; average problems; composite materials; Laplace transform.

### I. ВСТУП

Досліджуються початково-крайові задачі для хвильових рівнянь в неоднорідних середовищах, які утворені великою кількістю «блоків», що мають низьку проникність, та розділені зв'язною системою «розламів» з високою проникністю. Такі середовища природно назвати *слабко пористими*. Як моделі таких середовищ обираються періодичні середовища з малим коефіцієнтом мікромасштабності, який природно виникає через велику кількість блоків. Будуть визначені осереднені задачі, розв'язки яких визначають наближені асимптотичні розв'язки цих задач. Осереднені задачі є або задачами зі згортками, які прийнято називати *моделями з пам'яттю* [1], або задачами зі сталими коефіцієнтами для однорідних середовищ, що значно спрощує чисельне розв'язання і комп'ютерну симуляцію для таких задач, які моделюють хвильові процеси у таких середовищах. Наведені оцінки точності презентованих асимптотичних розв'язків. Іноді такі оцінки відображають появу сильно осцилюючих доданків в асимптотиці, що характеризує суттєве поглинання енергії, яке може бути використане для проектування хвилепоглинаючих композиційних матеріалів та штучних пористих середовищ.

Метод осереднення первинно ґрунтувався на асимптотичних розв'язках відповідно до [2, 3]. Згодом з'ясувалося, що набагато простіше довести збіжність або багатомасштабну збіжність розв'язків до розв'язку деякої осередненої багатомасштабної задачі, подальші подробиці можна знайти, наприклад, у [4, 5, 6]. Проте, такі

Робота виконана за підтримки Міністерства освіти і науки України: проект 0122U002026 та грант МОН України на перспективний розвиток наукового напрямку «Математичні науки та природничі науки» у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

багатомасштабні задачі залежать від додаткових змінних і тип відповідних рівнянь таких задач не є очевидним. Крім того, точність апроксимацій у цьому випадку не була доведена у контраст з асимптотичними методами.

Алгоритм визначення асимптотичних розв'язків для нестационарних задач із декількома параметрами було представлено та обґрунтовано у [7, 8]. Для такого визначення використовувалося перетворення Лапласа для ізоморфного переведення (відповідно до [9]) нестационарних задач у стаціонарні задачі з параметром, до яких застосовувалися асимптотичні методи, що запропоновані у [10] для еліптичних рівнянь довільного порядку. Такий підхід буде використовуватися і тут для більш загальних задач. Точне формулювання проблеми, що розглядатиметься, наведено в наступному розділі.

## II. ПОСТАНОВКА ПОЧАТКОВО КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Періодичні середовища з малим мікромасштабом  $\varepsilon$  визначаються наступним чином. Нехай для цілого  $n \geq 2$  множина  $F_1$  є відкритою зв'язною 1-періодичною (періодичною з періодом 1 за кожною з незалежних змінних) підмножиною  $\mathbb{R}^n$  з локально ліпшицевою межею і  $F_0 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{F_1}$  є множиною з локально ліпшицевою межею. Для додатного  $\varepsilon$  позначимо

$$F_1^\varepsilon = \varepsilon F_1 = \{\varepsilon x : x \in F_1\}, \quad F_0^\varepsilon = \varepsilon F_0 = \{\varepsilon x : x \in F_0\}.$$

Таким чином, множини  $F_1 = F_1^1$  і  $F_0 = F_0^1$  зі спільною межею  $\partial F_1$  визначаються через  $Y_1 = F_1 \cap Y$  і  $Y_0 = F_0 \cap Y$  з межею  $\Gamma = \partial F_1 \cap Y$ , де  $Y$  позначає комірку періодичності. Припускається, що  $Y_1$  та  $Y_0$  мають додатну міру Лебега.

Нехай також задано обмежену область  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Множини  $F_1^\varepsilon$  і  $F_0^\varepsilon$  для досить малого фіксованого  $\varepsilon$  визначають моделі  $\Omega_1^\varepsilon = F_1^\varepsilon \cap \Omega$  та  $\Omega_0^\varepsilon = F_0^\varepsilon \cap \Omega$  для періодичних середовищ з  $\varepsilon$ -періодичною структурою. Приклади моделей таких середовищ наведено на Рис. 1.

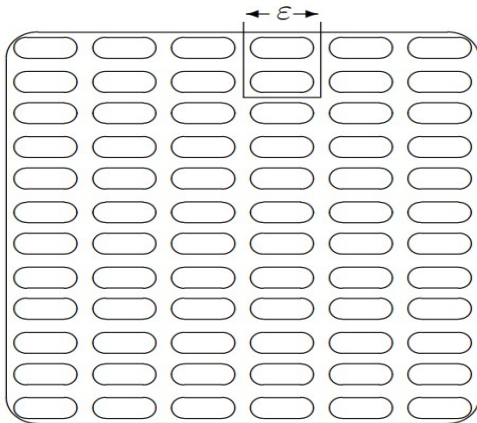


Рис. 1. Моделі неоднорідних періодичних середовищ

Визначимо дійсні матриці проникності цих середовищ  $\Omega_1^\varepsilon$  та  $\Omega_0^\varepsilon$  в області  $\Omega = \Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_0^\varepsilon$  рівностями

$$\lambda_\sigma^\varepsilon = \lambda_1 \quad \text{в} \quad \Omega_1^\varepsilon \quad \text{та} \quad \lambda_\sigma^\varepsilon = \sigma \lambda_0 \quad \text{в} \quad \Omega_0^\varepsilon$$

де  $\sigma$  є додатним параметром,  $\varepsilon$  є малим параметром, й сталі матриці  $\lambda_1$  і  $\lambda_0$  є симетричними та еліптичними.

Нехай задано функцію  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , де додатне  $T$  є фіксованим. Тут і надалі використовуються простори дійсних функцій, визначення яких наведено, наприклад, у [1]. Визначимо  $u = u(t, x)$  як розв'язок у сенсі розподілів наступної початково-крайової задачі

$$u''_{tt} - \operatorname{div} \lambda_\sigma^\varepsilon (\nabla u) = f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0, T).$$

Така задача моделює хвильові процеси в неоднорідних періодичних середовищах. Для фіксованих параметрів  $\sigma$  і  $\varepsilon$  задача (1) має єдиний розв'язок, наприклад, відповідно до [1]. Отже, можна спробувати побудувати асимптотичні розв'язки такого розв'язку.

## III. РЕГУЛЯРНІ АСИМПТОТИЧНІ РОЗВИНЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ

Рівняння задачі (1) є гіперболічним для фіксованих  $\sigma$  і  $\varepsilon$ . Однак, при дуже малих  $\sigma$  ця гіперболічність може вироджуватися на множині  $\Omega_0^\varepsilon$ . Тому для початку розглянемо простий випадок  $\sigma = 1$ , який є регулярним.

Введемо позначення  $U = \hat{u}$  та  $F = \hat{f}$  для перетворень Лапласа розв'язків та даних із задачі (1). Наприклад, за визначенням маємо

$$\hat{u}(t) = \int_0^\infty e^{-zt} u(t) dt = U(z)$$

де  $x \in \Omega$  є параметром та комплексна змінна  $z$  належить зазвичай півплощині  $C_0 = \{z \in \mathbb{C} : z = z_1 + iz_2, z_1 > 0\}$ .

Застосовуючи перетворення Лапласа до задачі (1), маємо для  $U \in H_0^1(\Omega)$  таку еквівалентну задачу

$$z^2 U - \operatorname{div} \lambda_\sigma^\varepsilon (\nabla U) = F \quad \text{в} \quad \Omega. \quad (2)$$

Подробиці про таку еквівалентність можна знайти у [9].

Для фіксованого  $z \in C_0$  слідуючи [2, 3] асимптотичне наближення до розв'язку (2) будемо обирати у вигляді

$$U_a = V(x) + \varepsilon N(x/\varepsilon) \nabla_x V(x), \quad (3)$$

де вектор функція  $N = N(y)$  є 1-періодичним розв'язком задачі  $-\operatorname{div}_y (\lambda_1^1 \nabla_y N) = \operatorname{div}_y \lambda_1^1$  на  $Y$  (яку прийнято називати задачею на комірці  $Y$ ), де за визначенням  $\lambda_1^1 = \lambda_1$  в  $Y_1$  та  $\lambda_1^1 = \lambda_0$  в  $Y_0$ . Відомо [2, 3], що такий розв'язок існує

$i$  є визначеним із точністю до сталої, яку фіксуватимемо умовою  $\int_Y N(y) dy = 0$ .

Перевіряється, що наближення (3) задовольняє задачу (2) з точністю до  $O(\varepsilon)$ , якщо  $V = V(z, x)$  є розв'язком осередненої задачі, зворотне перетворення Лапласа від якої, має наступну форму для визначення  $v = v(t, x)$ :

$$v''_t - \operatorname{div} \Lambda(\nabla v) = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (4)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v'_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T),$$

де  $\Lambda = \int_Y (\lambda_1^1(y) + \lambda_1^1(y) \nabla_y N(y)) dy$  є сталою матрицею.

Відомо [2, 3], що матриця  $\Lambda$  є еліптичною та симетричною і тому єдиний регулярний розв'язок задачі (4) існує і є регулярним для достатньо регулярних даних. Слідуючи [7, 8] і використовуючи зворотне перетворення Лапласа від  $U_\varepsilon = U_\varepsilon(x, x/\varepsilon)$  перевіряється енергетичними методами, що виконана наступна оцінка точності

$$\|u - v\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega))} \leq C\varepsilon, \quad (5)$$

де  $u$  є розв'язком задачі (1),  $v$  є розв'язком осередненої задачі (4) та стала  $C$  не залежить від  $\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  для відповідного  $\varepsilon_0$ .

Таким чином, при моделюванні хвильових процесів у слабо пористих середовищах замість розв'язання задачі (1) (наприклад, комп'ютерного) можна розв'язувати осереднену задачу (4) з гарантованою точністю для малих  $\varepsilon$ . Природно, що чисельне розв'язання задачі (1) значно складніше розв'язання задачі (4), оскільки потрібна дуже дрібна розрахункова сітка, щоб врахувати геометрію дуже великого числа блоків або включень в області  $\Omega$ .

#### IV. СИНГУЛЯРНІ АСИМПТОТИЧНІ РОЗВИНЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ

Припустимо далі, що  $\sigma$  є малим параметром у задачі (1). Тут можна розглядати випадок  $\sigma = \varepsilon^2$ , який прийнято називати моделлю подвійної пористості відповідно до [4]. У такому випадку втрачається гіперболічність задачі (1) на частині області  $\Omega_0^\varepsilon$ , яка відповідає блокам. Це призводить до необхідності заміни 1-періодичної задачі (яку прийнято називати задачею на комірці) на задачу Неймана на частині комірці  $Y_1$ , що відповідає розламам.

Для фіксованого  $z \in C_0$  слідуючи [7, 8] асимптотичне наближення до розв'язку (2) будемо обирати у вигляді

$$U_\varepsilon = V(x) + \varepsilon N_1(x/\varepsilon) \nabla_x V(x) + V_0(x, x/\varepsilon), \quad (6)$$

де останній доданок дорівнює нулю на  $\bar{\Omega}_1^\varepsilon$ , а вектор функція  $N_1 = N_1(y)$  є 1-періодичним розв'язком задачі

$$\operatorname{div}_y (\lambda_1 \nabla_y N_1) = 0 \quad \text{в } Y_1, \quad -Y \cdot (\lambda_1 \nabla_y N_1) = Y \cdot \lambda_1 \quad \text{на } \Gamma$$

для  $\Gamma = \partial F_1 \cap Y$ , де  $Y$  позначає зовнішню нормаль до  $\Gamma$ . Відомо [11], що такий розв'язок існує і є визначеним із точністю до сталої, яку фіксуватимемо умовою  $\int_{Y_1} N_1(y) dy = 0$ . Надалі продовжимо таку вектор функцію на  $Y_0$  як 1-періодичний розв'язок задачі

$$\operatorname{div}_y (\lambda_0 \nabla_y N_1) = 0 \quad \text{в } Y_0, \quad N_1 = N_1 \quad \text{на } \bar{Y}_1$$

Перевіряється, що асимптотичне наближення (6) задовольняє задачу (2) з точністю до  $O(\varepsilon)$ , якщо обрати  $V_0 = V_0(z, x, y)$  у наступному вигляді

$$V_0 = P(z, y)F(z, x) - P(z, y) z^2 V(z, x), \quad (7)$$

де  $P = P(z, y)$  є 1-періодичним розв'язком такої задачі

$$(z^2 P - 1) - \mathcal{G} \operatorname{div}_y (\lambda_0 \nabla_y P) = 0 \quad \text{в } Y_0, \quad P = 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1, \quad (8)$$

тут  $\mathcal{G} = \sigma / \varepsilon^2$  розглядається як параметр.

Нарешті,  $V \in H_0^1(\Omega)$  є розв'язком осередненої задачі

$$z^2 V - Q z^2 V - \operatorname{div}_x \Lambda_1(\nabla_x V) = F - QF, \quad (9)$$

де  $\Lambda_1 = |Y_1|^{-1} \int_{Y_1} (\lambda_1 + \lambda_1 \nabla_y N_1(y)) dy$  є сталою матрицею і функція  $Q(z) = |Y_0|^{-1} \int_{Y_0} (z^2 P(z, y) - 1) dy$  залежить тільки від  $z \in C_0$  та визначається розв'язком задачі (8).

Зазначимо, що зворотне перетворення Лапласа від задачі (8) визначає еквівалентну 1-періодичну нестационарну задачу на комірці наступного виду

$$(p)''_t - \mathcal{G} \operatorname{div}_y (\lambda_0 \nabla_y p) = 0 \quad \text{в } Y_0 \times (0, \infty), \quad (10)$$

$$p|_{t=0} = 0, \quad p'_t|_{t=0} = 1 \quad \text{в } Y_0, \quad p = 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1 \times (0, \infty).$$

Відомо [1], що єдиний розв'язок такої задачі існує і є визначеним для фіксованого  $\mathcal{G}$ . Таким чином, існує і є визначеним розв'язок задачі (8) для фіксованих  $\mathcal{G}$  і  $z$ , оскільки перетворення Лапласа є ізоморфізмом [9].

Задача (9) визначає осереднену проблему для задачі (1) у випадку, що розглядається. Дійсно, застосовуючи зворотне перетворення Лапласа до цієї рівності маємо для  $v = v(t, x)$  наступну осереднену початково-крайову задачу

$$v''_t - q^*(v''_t) - \operatorname{div} \Lambda_1(\nabla v) = f - q^* f, \quad (11)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v'_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T)$$



де  $*$  позначає оператор згортки відносно  $t \in [0, \infty)$ , наприклад, за визначенням маємо таку рівність

$$q * (v''_t) = \int_0^t q(t-\tau)(v''_{\tau\tau}(\tau, x)) d\tau$$

і  $q$  є зворотним перетворенням Лапласа від  $Q$  із (9), яке визначається через розв'язок задачі (10) рівністю

$$q(t) = |Y_1|^{-1} \int_{Y_0} p''_t(t, y) dy.$$

Перевіряється, що така функція визначена і  $q \in L^1(0, \infty)$ . З останнього включення випливає, що функція  $Q = Q(z)$  є неперервною та обмеженою для  $z \in C_0$ .

Слідуючи [8] можна перевірити, що  $-\operatorname{Re} z Q(z) > 0$  для  $z \in C_0$ . Дійсно, помножуючи рівняння з (8) на  $z \overline{z^2 P}$  та інтегруючи по  $Y_1$ , отримуємо таку рівність

$$z \int_{Y_0} \overline{z^2 P} (z^2 P - 1) dy + \mathcal{G} |z|^2 \overline{z} \int_{Y_0} (\lambda_0 \nabla_y P, \nabla_y \overline{P}) dy = 0.$$

За визначенням  $Q |Y_1| = \int_{Y_0} (z^2 P(z, y) - 1) dy$  і тому маємо

$$-z Q |Y_1| = z \|z^2 P - 1\|_{L^2(Y_0)}^2 + \mathcal{G} |z|^2 \overline{z} \int_{Y_0} (\lambda_0 \nabla_y P, \nabla_y \overline{P}) dy.$$

Складаючи цю рівність із спряженою, укладаємо, що  $-\operatorname{Re} z Q(z) \geq 0$  для  $z \in C_0$ . оскільки матриця  $\lambda_0$  є еліптичною та симетричною. Крім того, рівність  $z Q(z) = 0$  виконується тільки, якщо  $z^2 P = 1$ , що є неможливим, оскільки  $P$  є регулярним (через еліптичну регулярність задачі (8) для фіксованого  $z$ ) і  $P = 0$  на  $\partial Y_0$ .

Отже, у зображенні Лапласа щільність для осередненої задачі (9) визначається обмеженою ненульовою функцією  $1 - Q(z)$  і, так би мовити, розподіляється не тривіально по всій півплощині  $C_0$ . На контраст з задачею (4), де щільність осередненої задачі дорівнює 1. Відповідно, осереднену задачу (11) зі згортками прийнято називати нелокальною проблемою з ефектом пам'яті [1].

Представлені властивості функції  $Q(z)$  дозволяють довести апріорні оцінки розв'язків задачі (9), такі ж як і для перетворення Лапласа від задачі (4). Безпосередньо для проблеми (4) такі апріорні оцінки добре відомі [1]. З іншого боку, для фіксованого  $z$  задача (9) є крайовою задачею для еліптичного рівняння з комплексними коефіцієнтами в молодших доданках. Тому [9], така задача розв'язна для всіх  $z$ , крім, можливо, дискретної множини в  $C$ . Таким чином, для доведення розв'язності задачі (9) буде достатньо відокремитися від такої дискретної множини за допомогою апріорних оцінок, які збігаються зі зворотним перетворенням Лапласа від класичних оцінок для задачі (4).

Отже, слідуючи [8] та використовуючи зворотне перетворення Лапласа можна довести, що єдиний розв'язок задачі (11) існує і є регулярним для достатньо регулярних даних, що визначає доданки в (6) та (7).

Зазначимо, що зворотне перетворення Лапласа від асимптотичного наближення (6) та (7) має такий вигляд

$$u_a = v + \varepsilon N_1^\varepsilon \nabla v + p^\varepsilon * f - p^\varepsilon * (v''_t),$$

де  $N_1^\varepsilon = N_1(x/\varepsilon)$  і  $p^\varepsilon = p(t, x/\varepsilon)$  визначаються задачею на коміріці та (10),  $v$  є розв'язком осередненої задачі (11).

Для так визначеного асимптотичного наближення  $u_a$ , слідуючи [8] можна перевірити енергетичними методами, що виконана наступна оцінка точності

$$\|u - u_a\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega))} \leq C(\varepsilon + \sigma), \quad (12)$$

де  $u$  є розв'язком задачі (1) та стала  $C$  не залежить від  $\varepsilon$  і  $\sigma$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $0 < \sigma \leq \sigma_0$  для відповідних  $\varepsilon_0$  і  $\sigma_0$ .

Таким чином, при моделюванні хвильових процесів у слабо пористих середовищах замість розв'язання задачі (1) (наприклад, чисельного) можна розв'язувати осереднену задачу (11) з гарантованою точністю для малих  $\varepsilon$  і  $\sigma$ . Крім того, наведена оцінка точності відображають появу сильно осцилюючих доданків у розвиненні розв'язків задачі (1), що характеризує суттєве поглинання енергії на блоках з низькою проникністю і може бути використане для проектування хвиле-поглинаючих композиційних матеріалів.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les inequations en mecanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [2] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolau, *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, Amsterdam 1978.
- [3] N. S. Bakhvalov, G. P. Panasenko, *Homogenization: averaging processes in periodic media*. Kluwer, Dordrecht 1989.
- [4] T. Arbogast, J. Douglas, U. Hornung, "Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory," *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 21:4, pp. 823-836, 1990.
- [5] H. Mechkour, "Two-scale homogenization of piezoelectric perforated structures," *Mathematics*, vol. 10, pp. 1455-1473, 2022.
- [6] S. Gartner, P. Frolovic, P. Knabner, N. Ray, "Efficiency of micro-macro models for reactive two-mineral systems," *Multiscale Modeling and Simulation*, vol. 20:1, pp. 433-461, 2022.
- [7] G. V. Sandrakov, "The homogenization of nonstationary equations with contrast coefficients," *Dokl. Mathematics*, vol. 56:1, pp. 586-589, 1997.
- [8] G. V. Sandrakov, "Multiphase homogenized diffusion models for problems with several parameters," *Izvestiya: Mathematics*, vol. 71:6, pp. 1193-1252, 2007.
- [9] M. S. Agranovich, M. I. Vishik, "Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type," *Soviet Math. Surveys*, vol. 19:3, pp. 53-157, 1964.
- [10] G. V. Sandrakov, "Averaging principles for equations with rapidly oscillating coefficients," *Mathematics of the USSR - Sbornik*, vol. 68:2, pp. 503-553, 1991.
- [11] M. Mitrea, M. Taylor, "Boundary layer methods for Lipschitz domains in Riemannian manifolds," *J. Functional Analysis*, vol. 163:2, pp. 181-251, 1999.

# Дослідження поширення механоелектромагнітних хвиль у пористих тіл під дією зовнішнього електричного поля з використанням дробових похідних за часом

П'янило Ярослав

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.  
Я. С. Підстригача НАН України  
Львів, Україна  
danylo794@gmail.com

Твардовська Софія

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України  
Львів, Україна  
sofi.lviv@gmail.com

## The studies of the propagation of mechano-electromagnetic waves in porous bodies under the action of an external electric field using by fractional time derivatives

Pyanulo Yaroslav

Pidstryhach Institute for Applied Problems  
of Mechanics and Mathematics,  
National Academy of Sciences of Ukraine  
Lviv, Ukraine  
danylo794@gmail.com

Tvardovska Sofiya

Pidstryhach Institute for Applied Problems  
of Mechanics and Mathematics,  
National Academy of Sciences of Ukraine  
Lviv, Ukraine  
sofi.lviv@gmail.com

**Анотація**— У роботі з використанням дробових похідних за часом розглянуто поширення механоелектромагнітних хвиль у пористому насиченому розчині електроліту середовищі під дією зовнішнього електричного поля. Застосовано перетворення Лапласа-Карсона для дробових похідних та теорему Ефроса.

**Abstract**— The paper considers the propagation of mechano-electromagnetic waves in a porous medium saturated with an electrolyte solution under the action of an external electric field using by fractional time derivatives. The Laplace-Carson transformation for fractional derivatives and the Efros theorem are applied.

**Ключові слова** — пористе насичене середовище, постійне електричне поле, механоелектромагнітна плоска хвиля, дробова похідна

**Keywords** — porous saturated medium, constant electric field, mechano-electromagnetic plane wave, fractional derivative.

### I. ВСТУП

В останні десятиліття значну увагу вчені надають проблемі взаємодії механічних та електромагнітних процесів в реальних тілах з урахуванням їх складної внутрішньої структури. Особливо це важливо для багатьох природних (грунти, гірські породи, дерево тощо) та штучних (бетон, цегла, композити, кераміка тощо) матеріалів. Дослідження стосовно наявності корисних копалин (газу, нафти, тощо) у пористих середовищах проводиться сейсмо-, магніто-, електро-, гравітаційними, радіометричними та ядерно-геофізичними методами. Вивчення швидкості розповсюдження хвиль у різних пористих середовищах дає можливість зробити висновки про природу речовини, через яку розповсюджуються хвилі,

а також виконувати літологічне розчленування розрізів свердловин та виділяти в них інтервали корисних копалин, а також визначати фізичні властивості гірських порід. Для отримання достовірних і точних результатів каротажу будуються математичні моделі відповідних процесів. Встановлено, що створене у земній корі зовнішнє електричне поле сприяє підвищенню інформативності сейсмічних досліджень [1]. Параметри механічних коливань, які спричинюються електричним полем, пов'язані як із структурними, так і з фізико-механічними характеристиками пористого тіла [2, 3]. Таким чином ми отримуємо додаткову інформацію про параметри пористого середовища: проникність, пористість, звивистість тощо.

## II. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПОШИРЕННЯ МЕХАНОЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ У ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Розглянемо пористе насичене розчином електроліту середовище, віднесене до декартової системи координат  $(x, y, z)$ . Матеріалом скелета є діелектрик. Пористість вважаємо відкритою. У середовищі, яке є статистично однорідним та ізотропним, зовнішніми джерелами створено однорідне постійне електричне поле напруженості  $\vec{E}_0$ .

Система рівнянь, яка описує механоелектромагнітні процеси у пористому середовищі за нехтування електроосмосу записана у роботах [2 – 5]. Внаслідок дії зовнішнього електричного поля. Поширення плоскої механоелектромагнітної хвилі вздовж осі  $Ox$ , описується системою рівнянь

$$\begin{aligned} & a_1 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + a_3 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + a_4 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} + \\ & + a_5 \left( \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \right) + a_6 E = 0, \\ & a_2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + a_4 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + b_4 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \\ & c_1 \left( \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \right) + c_2 \frac{\partial E}{\partial t} + c_3 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + c_4 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - E = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де коефіцієнти системи (1) визначаються формулами

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\alpha_{10}^2}{\beta}; \quad a_2 = \frac{\alpha_{10} \alpha_{20} (1 - \nu_f)}{\beta}; \\ a_3 &= -(\alpha_{10} \rho_0^{(1)} + \rho_{12}); \quad a_4 = \rho_{12}; \quad a_5 = A; \quad a_6 = \alpha_{10} f_{e0}^{(1)} \rho_{e0}^{(1)}; \\ b_2 &= \alpha_{20} \left[ K_f + \frac{4}{3} G_f - \frac{\alpha_{20} (1 - \nu_f)^2}{\beta} \right]; \quad b_4 = -(\alpha_{20} \rho_0^{(2)} + a_4); \\ b_6 &= -\alpha_{10} f_{e0}^{(1)} \rho_{e0}^{(1)} \left( 2 \frac{f_{e0}^{(2)}}{f_{e0}^{(1)}} - 1 \right); \quad c_1 = \frac{\alpha_{10} \gamma_1 \rho_{e0}^0}{\sigma_{e0}}; \quad c_2 = -\frac{\varepsilon}{\sigma_{e0}}; \\ c_3 &= \frac{\alpha_{10} \alpha_{20} \nu_f \gamma_\sigma E_0}{\beta}, \end{aligned}$$

у яких  $\vec{u}^{(j)} (j=1,2)$  – вектор переміщення фаз,  $j=1$  – відповідає поровій рідині,  $j=2$  – скелету,  $\vec{E}$  – збурення вектора напруженості електричного поля,  $\alpha_{10}$  – вихідне значення пористості,  $\alpha_{20} = 1 - \alpha_{10}$ ,  $\rho_0^{(j)}$  – вихідні значення густин маси фаз,  $\nu_f$  – зцементованість;  $\beta = \alpha_{10} \beta^{(1)} + \alpha_{20} \beta^{(2)}$ ,  $\beta^{(j)}$  – стисливість фаз,  $A = \alpha_{10} \eta / k_p$ ,  $\eta$  – коефіцієнт в'язкості рідини,  $k_p$  – коефіцієнт проникності середовища,  $K_f$  і  $G_f$  – ефективний модуль

стиску та зсуву,  $\rho_{e0}^{(1)}$  – густина електричного заряду,  $\gamma_1$  – коефіцієнт, який відображає відмінність середньої швидкості рух порової рідини та електричних зарядів,

$$f_{E0}^{(j)} = \frac{\varepsilon - \varepsilon^{(3-j)}}{\alpha_{1j} (\varepsilon^{(j)} - \varepsilon^{(3-j)})}, \quad \varepsilon - \text{діелектрична проникність}$$

середовища у природному стані,  $\varepsilon^{(1)}$  – діелектрична проникність порової рідини,  $\varepsilon^{(2)}$  – діелектрична проникність скелета;  $\gamma_\sigma$  – параметр, який характеризує залежність електропровідності від першого інваріанта ефективних напружень  $\sigma_f$ ,  $\sigma_{E0}$  – коефіцієнт електропровідності середовища за відсутності механічних напружень.

Система (1) записана в термінах часткових похідних. В роботах показано що процеси, які проходять в складних пористих середовищах, суттєво залежать від їх історії. Так, зокрема, тиск при відбиранні газу в заданий час з газоносного пласта залежить від того, скільки його було відібрано до заданого моменту. Процеси такого типу достатньо добре описуються в термінах похідних дробового порядку.

Оператор дробової похідної у термінах Капутто визначається так [6 – 14]:

$${}^c D_\tau^\alpha = \frac{c \partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} \varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \int_0^\tau \frac{\partial \xi^{m+1}}{\partial \xi^{m+1}} \varphi(\xi) (\tau - \xi)^{\alpha-m} d\xi \quad (2)$$

де  $m = [\alpha]$ , – ціла частина дійсного числа, а в термінах Ріманна-Ліувіля -

$$D_t^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \varphi(t) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \xi^{m+1}} \int_0^t \frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-m}} d\xi \quad (3)$$

Між похідними Капутто і Ріманна-Ліувіля має місце наступний зв'язок [12]

$${}^c D_\tau^\alpha \varphi = D_\tau^\alpha \varphi - \sum_{k=0}^m \frac{\tau^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \varphi. \quad (4)$$

За таких припущень система (1) записується

$$\begin{aligned}
& a_1 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + b_6 E + a_4 \frac{\partial^{\alpha+1}}{\partial t^{\alpha+1}} u^{(1)} + b_4 \frac{\partial^{\alpha+1}}{\partial t^{\alpha+1}} u^{(2)} - \\
& a_1 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + a_6 E + a_3 \frac{\partial^{\alpha+1}}{\partial t^{\alpha+1}} u^{(1)} + a_4 \frac{\partial^{\alpha+1}}{\partial t^{\alpha+1}} u^{(2)} + \\
& + a_5 \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} (u^{(2)} - u^{(1)}) = 0
\end{aligned} \quad (5)$$

В математичному плані система диференціальних рівнянь в дробових похідних (5) зводиться до необхідності розв'язування інтегродиференціальних рівнянь типу згортки. Одним із методів розв'язування є застосування інтегральних перетворень, зокрема, Лапласа

$$\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

Оригінал зображення  $\tilde{f}(p)$  знаходиться за формулою Бромвіча

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \tilde{f}(p) dp.$$

Тут  $c$  – довільна стала з області збіжності інтегралу. Оскільки у цьому випадку інтегральна згортка в просторі оригіналів переходить в добуток зображень, то в результаті отримується диференціальне рівняння відносно зображень шуканого розв'язку. Для остаточного отримання рішення необхідно від зображень перейти до оригіналу. Остання задача є знаходженням розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма першого роду і відноситься до класу некоректних за Тихоновим.

Досить часто для знаходження обернення перетворення Лапласа у випадку використання похідних дробових порядків використовують функцію Міттаг–Леффера

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

Яка пов'язана з дробово–раціональним виразом перетворення Лапласа

$$p^{-\beta} (1 - ap^{-\alpha})^{-1} = \int_0^\infty e^{pt} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha) dt.$$

При дослідженні багатьох фізичних процесів важливо знати його поведінку в початкові моменти часу. Прикладом цього може бути пуск або зупинка компресорних станцій при транспортуванні вуглеводнів. В таких випадках немає необхідності знаходити розв'язок задачі на всьому часовому проміжку. Достатньо знайти його для малих часів. Якщо розв'язок задачі знайдено в зображеннях Лапласа–Карсона, то поведінка оригіналу для малих часів достатньо легко знаходиться на основі теорем таубероного типу. Прикладом цього є наступна теорема.

**Теорема 1.** Якщо виконуються умови:

1. інтеграл Бромвіча збігається при  $t > 0$ ;
2.  $\tilde{f}(p)$  аналітична при  $\operatorname{Re} p \geq \gamma$ ;

3. в цій півплощині при  $|p| \rightarrow \infty$  рівномірно відносно  $\arg s$

$$\tilde{f}(p) \square \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{-\lambda_k}, \quad 0 < \lambda_k \uparrow +\infty, \quad (6)$$

то при  $t \rightarrow +0$

$$f(t) \square \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(\lambda_k)} t^{\lambda_k-1}.$$

**Теорема 2.** Якщо в теоремі 1 при  $|p| \rightarrow \infty$  рівномірно відносно  $\arg p$

$$\tilde{f}(p) \square \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{-\lambda_k} e^{-\alpha_k \sqrt{p}}, \quad 0 < \lambda_k \uparrow +\infty,$$

то при  $t \rightarrow +0$

$$f(t) \square \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\lambda_k)} a_k 2^{-2\lambda_k-1} t^{-\lambda_k-1} e^{-\alpha_k^2/4t} H_{2\lambda_k+1}(\alpha_k / 2\sqrt{t}).$$

Тут  $H_{2\lambda_k+1}(\alpha_k / 2\sqrt{t})$  – Многочлени Ермітта.

Виникають значні труднощі і під час застосування числових методів. Вони пов'язані як з процедурою дискретизації, так і нестійкістю відповідних алгоритмів. Якщо врахувати, що досить часто на практиці вхідна інформація задається в дискретному вигляді з невисокою точністю, то знаходження розв'язку числовими методами з необхідною точністю й обмеженим часом на розрахунок є проблематичне.

Аналітичне знаходження оригіналу пов'язане із значними труднощами і не завжди можливе. Тому на практиці часто застосовуються або числово–аналітичні методи обернення, або числові методи розв'язування вихідної задачі. Поширеним на цей час методом розв'язування задач математичної фізики в похідних цілого порядку є МСЕ (метод скінченних елементів), а в дробових похідних – схемою Грюнвальда–Летнікова. Згідно цієї схеми дробова похідна  $\frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}$  розкладається наступним чином

$${}^{GL}D_\tau^\alpha f := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lceil \tau/\Delta t \rceil} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(\tau - j\Delta t). \quad (7)$$

Тут  $\alpha \in (0, 2]$  – степінь дробової похідної.

Оператор Грюнвальда–Летнікова (6) апроксимується на проміжку  $[0, \tau]$  з підінтервальним кроком  $\Delta t$  виразом

$${}^{GL}D_\tau^\alpha f(\tau) \approx \sum_{j=0}^{\lceil \tau/\Delta t \rceil} c_j^{(\alpha)} f(\tau - j\Delta t). \quad (8)$$

Для визначення коефіцієнтів Грюнвальда–Летнікова  $c_j^{(\alpha)}$  має місце формула

$$c_j^{(\alpha)} = (\Delta t)^{-\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \quad (9)$$

та рекурентне співвідношення [9, 12, 14]

$$c_j^{(\alpha)} = (\Delta t)^{-\alpha}, \quad c_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) c_{j-1}^{(\alpha)}. \quad (10)$$

Зокрема, для  $j=1$  маємо  $c_1^{(\alpha)} = -\alpha(\Delta t)^{-\alpha}$ .

У зв'язку з цим застосовують наближені та ітераційні методи розв'язування сформульованих відповідним чином задач математичної фізики.

У запропонованій праці аналізуються аналітичний на базі інтегрального перетворення Лапласа та спектральний у базисі многочленів Чебишева – Лагерра методи розв'язування задач математичної фізики в термінах похідних дробового порядку.

Для знаходження оригіналу отриманих розв'язків крайових задач з використанням похідних дробових порядків доцільно застосовувати узагальнену теорему Ефроса.

**Теорема 3.** Нехай відомо зображення  $F(p)$  початкової функції  $f(t)$  і дані аналітичні функції  $\Phi(p)$  і  $q(p)$ , такі, що

$$\int_0^{\infty} \varphi(t, \tau) e^{-st} dt = e^{-q(s)\tau} \Phi(s).$$

Тоді буде виконуватись співвідношення

$$F[q(s)]\Phi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_0^{\infty} f(\tau)\varphi(t, \tau) d\tau,$$

або у символічному записі

$$F[q(s)]\Phi(s) = \int_0^{\infty} f(\tau)\varphi(t, \tau) d\tau.$$

При дослідженні багатьох фізичних процесів важливо знати його поведінку в початкові моменти часу. Прикладом цього може бути пуск або зупинка компресорних станцій при транспортуванні вуглеводнів. В таких випадках немає необхідності знаходити розв'язок задачі на всьому часовому проміжку. Достатньо знайти його для малих часів. Якщо розв'язок задачі знайдено в зображеннях Лапласа - Карсона, то поведінка оригіналу для малих часів достатньо легко знаходиться на основі теорем таубероного типу.

Схема розв'язування диференціального рівняння із дробовою похідною за часом апробована в ході обчислювального експерименту на основі даних пористого середовища. В даному випадку розв'язувалась задача фільтрації газу в пористому середовищі, та досліджувався вплив порядку дробової похідної на результат. Числова модель використовує метод скінченних елементів в поєднанні з ітераційною процедурою, що діє на кожному часовому підінтервалі, та відповідну схему Грюнвальда – Летнікова для врахування дробових похідних за часом.

## ВИСНОВКИ

Записано рівняння електромагнітної механіки із врахування дробової похідної Капутто для пористих насичених розчином електроліту середовищ під дією

зовнішнього електричного поля, а також використано схему Грюнвальда – Летнікова для пористих середовищ. Застосування інтегрального перетворення Лапласа значно спрощує процедуру знаходження розв'язку в зображеннях. Однак виникає проблема обернення перетворення Лапласа-Карсона. Зауважимо, що поряд з аналітичними методами обернення побудовано достатньо велику кількість наближених, асимптотичних та числових методів. Окремі з них дають можливість на основі апріорної інформації про оригінал побудувати відновити його з достатньою для практики точністю. Зауважимо, що оскільки задача обернення є некоректною, то застосування апріорної інформації дозволяє побудувати регуляризуючий алгоритм розв'язування. Отримані результати дають можливість оцінювати вплив порядку дробової похідної за часом на природні процеси в пористих тілах. Показано, що порядок дробової похідної може служити додатковим параметром адаптації математичної моделі.

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Основы сейсмоэлектроразведки / О. А. Потапов, С. А. Лизун, В. Ф. Кондрат и др. – Москва: Недра, 1995. – 268 с.
- [2] Tvardovska S. Influence of external electric field on parameters of mechanical waves in saturated porous medium. – Task quarterly. – Vol.17, No. 3 – 4. 2013, Pp. 215 – 222
- [3] Фізико-математичне моделювання складних систем / Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, Т. С. Нагірний та ін.; під ред. Я. Й. Бурака, Є. Я. Чаплі. – Львів: СПОЛІОМ, 2004. – 264 с.
- [4] Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated Porous Solids I. Low frequency range // J. Acoust. Soc. Amer., 1956. – Vol. 28. – №2. – P.168-178.
- [5] Pride S. R. Electro seismic wave properties / S. R. Pride, M. W. Haartsen // Journal of the Acoustic Society of America. – 1996. – № 100. – P. 1301-1315.
- [6] Васильев В. В., Симак Л. А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. – Киев: Научное издание НАН Украины, 2008 – 256 с.
- [7] Mainardi F., Gorenflo R. Time-fractional derivatives in relaxation processes: a tutorial survey. // Fractional calculus and applied analysis. – 2007. – vol. 10, 3. – p. 269 – 308.
- [8] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. – Москва: Физматлит, 2003. – 272 с.
- [9] Проекційно-ітераційні методи розв'язування прямих та обернених задач переносу / Я. П'янило. – Львів: Сплайн, 2011. – 248 с. – іл..
- [10] П'янило Я. Д. Застосування похідних дробових порядків для дослідження хвильових процесів у пористих середовищах за дії зовнішнього електричного поля / Я. Д. П'янило, С. Р. Твардовська / XIII Міжнародна науково-технічна конференція «Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об'єктів»: тези доповідей (Львів, 7-9 листопада 2014 р.). – Кременчук, 2014. – С.47-48.
- [11] Qureshi, S., & Yusuf, A. (2019). Fractional derivatives applied to MSEIR problems: Comparative study with real world data. The European Physical Journal Plus, 134(4), 171
- [12] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с
- [13] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. – Научно-исследовательский ин-т приклад, математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – Москва: Наука, 2005. – 199 с
- [14] Yang X. J., Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications, World Science Publisher, New York, USA, 2012.

# Моделювання поперечних коливань пилкового вала

Л.Ф. Дзюба

кафедра прикладної математики і механіки  
ЛДУ безпеки життєдіяльності  
Львів, Україна  
lidadz111@gmail.com

О.Ю. Чмир

кафедра прикладної математики і механіки  
ЛДУ безпеки життєдіяльності  
Львів, Україна  
o\_chmyr@yahoo.com

О.В. Меньшикова

навчально науковий інститут цивільного захисту  
ЛДУ безпеки життєдіяльності  
Львів, Україна  
helga.menshikowa@gmail.com

## Modeling of transverse oscillations of the saw shaft

L.F. Dziuba

Department of Applied Mathematics and Mechanics  
Lviv State University of life safety  
Lviv, Ukraine  
lidadz111@gmail.com

O.Yu. Chmyr

Department of Applied Mathematics and Mechanics  
Lviv State University of life safety  
Lviv, Ukraine  
o\_chmyr@yahoo.com

O.V. Menshykova

Educational and Scientific Institute of Civil Protection  
Lviv State University of life safety  
Lviv, Ukraine  
helga.menshikowa@gmail.com

*Анотація* – У роботі запропоновано динамічну модель пилкового вала круглопилкового верстата. Динамічна модель містить розрахункову схему вала та диференціальне рівняння четвертого порядку в частинних похідних для дослідження поперечних коливань. Для такої розрахункової схеми пилкового вала записано відповідні крайові умови. У крайових умовах враховано розміщення на вільному кінці другої ділянки вала круглої пилки. Розв'язок диференціального рівняння виконано методом розділення змінних. Отримано трансцендентне частотне рівняння. З розв'язування рівняння частот визначено частотні коефіцієнти поперечних коливань пилкового вала з урахуванням його конструкційних параметрів. Досліджено вплив довжин ділянок вала на величину частотних коефіцієнтів.

*Abstract* – The paper proposes a dynamic model of the saw shaft of a circular saw machine. The dynamic model contains the

*calculation scheme of the shaft and the fourth-order partial differential equation for the study of transverse vibrations. For such a calculation scheme of the saw shaft, the corresponding boundary conditions are recorded. In the boundary conditions, placement at the free end of the second section of the circular saw shaft is taken into account. The differential equation was solved by the method of separation of variables. The transcendental frequency equation is obtained. From the solution of the frequency equation, the frequency coefficients of the transverse oscillations of the saw shaft are determined, taking into account its design parameters. The influence of the lengths of the shaft sections on the magnitude of the frequency coefficients was studied.*

*Ключові слова:* пилковий вал, рівняння частот, частота власних коливань, частотні коефіцієнти, кругла пилка.

**Keywords:** saw shaft, frequency equation, own oscillation frequency, frequency coefficients, circular saw.

## I. ВСТУП

За високих швидкостей різання та подавання пилковий вал деревообробного верстата з розміщеною на ньому круглою пилкою значного діаметра та маси зазнає зовнішнього збурення навіть від незначного ексцентриситету в підшипникових опорах, від динамічної нерівноваженості круглої пилки тощо. Дія зовнішніх чинників на пилковий вал викликає його поперечні коливання. Змінні навантаження, що виникають унаслідок коливань, знижують довговічність опор вала та впливають на точність різання деревини, збільшуючи ширину пропилу. Тому дослідження поперечних коливань пилкового вала є актуальним завданням.

Для виконання такого дослідження побудовано динамічну модель пилкового вала, яка містить розрахункову схему та диференціальне рівняння поперечних коливань з долученими крайовими умовами. Розрахункову схему пилкового вала (рис. 1) подано у вигляді двоопорного стержня 1 з діаметром  $d$  та осьовим моментом інерції  $I_z$ , на консольному кінці якого розміщено круглу пилку 2 з масою  $M$  та осьовим моментом інерції  $I$ . Довжину першої ділянки пилкового вала між його шарнірними опорами позначено  $l_1$ , довжину другої ділянки від опори до місця розміщення пилки позначено  $l_2$ .

## II. ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ, ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ, ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ

Диференціальне рівняння поперечних коливань стержня відповідно до розрахункової схеми має вигляд [1]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

де  $w = w(x,t)$  – поперечні переміщення точок осі стержня;  $E$  – модуль пружності першого роду матеріалу стержня;  $I_z$  – осьовий момент інерції перерізу круглого стержня;  $\rho$  – густина матеріалу стержня;  $A$  – площа поперечного перерізу стержня.

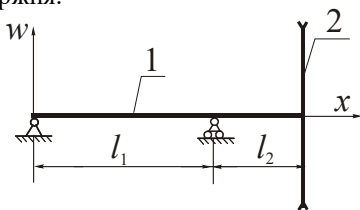


Рис. 1. Розрахункова схема пилкового вала.

Зважаючи на дві ділянки стержня, розв'язок диференціального рівняння (1) відповідно до методу розділення змінних подано у вигляді [1]:

$w_k(x,t) = \sum_{i=1}^n W_{k,i}(x) \cos \omega_i t$ ,  $k=1,2$ , де  $W_{k,i}(x)$  – амплітудні функції, які характеризують відхилення точок першої ( $k=1$ ) та другої ( $k=2$ ) ділянок стержня від положення рівноваги на  $i$ -ій резонансній частоті  $\omega_i$ .

Розв'язками рівняння (1) є функції форм коливань

$$W_{k,i}(x) = C_{k,1} \sin(\beta_i x) + C_{k,2} \cos(\beta_i x) + C_{k,3} \operatorname{sh}(\beta_i x) + C_{k,4} \operatorname{ch}(\beta_i x), \quad (2)$$

де  $\beta_i$  – частотний коефіцієнт,  $\beta_i^4 = \omega_i^2 \frac{\rho A}{EI_z}$ , ( $i = \overline{1,n}$ ),  $C_{k,j}$  – постійні інтегрування ( $k = \overline{1,2}$ ,  $j = \overline{1,4}$ ).

Відповідно до прийнятої розрахункової схеми (рис. 1), де відстань між опорами дорівнює  $l_1$ , у крайових умовах, що відповідають шарнірному обпиранню вала з консольною ділянкою, ураховано розміщення на консольній ділянці ( $x = l_1 + l_2$ ) круглої пилки з масою  $M$  та моментом інерції маси  $I$  відносно осі, що проходить через її центр та є перпендикулярною до площини диску пилки:

$$\begin{aligned} w_1(x,t)|_{x=0} = 0; \quad EI_z \frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0; \quad w_1(x,t)|_{x=l_1} = 0; \\ \frac{\partial w_1(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l_1} = \frac{\partial w_2(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l_1}; \\ EI_z \frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_1} = EI_z \frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_1}; \\ EI_z \frac{\partial^3 w_1(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=l_1} = EI_z \frac{\partial^3 w_2(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=l_1} - \frac{Mg(l_1 + l_2)}{l_1}; \\ EI_z \frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_1+l_2} = -I \frac{\partial^3 w_2(x,t)}{\partial x \partial t^2} \Big|_{x=l_1+l_2}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( EI_z \frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=l_1+l_2} = -M \frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=l_1+l_2} \end{aligned} \quad (3)$$

Після урахування крайових умов (3) в (2) отримано:  $C_{1,2} = C_{1,4} = 0$  та систему лінійних рівнянь відносно невідомих  $C_{1,1}$ ,  $C_{1,3}$ ,  $C_{2,1}$ ,  $C_{2,2}$ ,  $C_{2,3}$ ,  $C_{2,4}$ . З рівності нулю визначника цієї системи побудовано трансцендентне рівняння частот

$$D_1(\beta)\beta^4 + D_2(\beta)\beta^3 + D_3(\beta)\beta + D_4(\beta) = 0, \quad (4)$$

де  $D_i(\beta)$  – вирази, що залежать від  $\beta$ ,  $i = \overline{1,4}$ .

З розв'язування рівняння (4) визначено перші два частотні коефіцієнти поперечних коливань пилкового вала за різної довжини його ділянок. Один з розв'язків показано на рис. 2 за таких геометричних та фізико-механічних параметрів: діаметр пилкового вала –  $d = 60$  мм; маса та момент інерції пилкового диска  $M = 24$  кг,  $I = 2,98$  кг·м<sup>2</sup>; діаметр пилкового диска  $D = 1,3$  м; модуль пружності першого роду та густина матеріалу вала (сталь) –  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 7850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

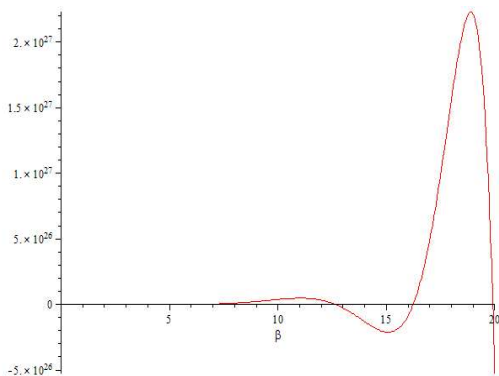


Рис. 2. Розв'язок трансцендентного рівняння частот.

#### ВИСНОВКИ

Розроблено динамічну модель поперечних коливань пилкового вала з урахуванням його розміщення на двох опорах і круглої пилки на консольному кінці вала; визначено величини частотних коефіцієнтів з урахуванням довжин ділянок вала та маси й моменту інерції круглої пилки; досліджено залежність частотних коефіцієнтів при поперечних коливаннях пилкового вала від довжин його ділянок.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Chelomey, V. N. (Ed.) (1978). *Vibrations in Engineering: Handbook*. (Vols. 1-6). Bolotin, V. V. (Ed.) Vol. 1. Oscillations of linear systems. Moscow: Mashinostroyeniye [in Russian].
- [2] Дзюба Л. Ф., Чмир О. Ю., Меньшикова О. В., Ліщинська Х. І. Моделювання поперечних коливань механізму різання круглопилкового верстата. Науковий вісник НЛТУ України, 2022, Т. 32, №4. – С. 55 - 59. <https://doi.org/10.36930/40320409>



# Математична Модель Дифузії за Каскадного Розпаду Речовини та Експериментальних Даних щодо Концентрації на Границі Шару

Ольга Чернуха

Відділ числових методів  
математичної фізики

Інститут прикладних проблем  
механіки і математики ім. Я.С.

Підстригача НАНУ

Кафедра обчислювальної математики  
і програмування

Національний університет “Львівська  
політехніка”,  
Львів, Україна

zalznuchna6@gmail.com

Юрій Білушак

Відділ числових методів  
математичної фізики

Інститут прикладних проблем  
механіки і математики ім. Я.С.

Підстригача НАНУ Кафедра

обчислювальної математики і  
програмування

Національний університет “Львівська  
політехніка”,  
Львів, Україна

byixx13@gmail.com

Анастасія Чучвара

Відділ числових методів  
математичної фізики

Інститут прикладних проблем  
механіки і математики ім. Я.С.

Підстригача НАНУ Львів, Україна

davydoka@gmail.com

## Mathematical Model of Diffusion under Substance Cascade Decay and Experimental Data on Concentration at the Layer Boundary

Olha Chernukha

Department of numerical methods of  
mathematical physics

Pidstryhach Institute of Applied  
Problems of Mechanics and  
Mathematics of the National Academy  
of Sciences of Ukraine

Department of Computational  
Mathematics and Programming  
Lviv Polytechnic National University  
Lviv, Ukraine

zalznuchna6@gmail.com

Yurii Bilushchak

Department of numerical methods of  
mathematical physics

Pidstryhach Institute of Applied  
Problems of Mechanics and  
Mathematics of the National Academy  
of Sciences of Ukraine

Department of Computational  
Mathematics and Programming  
Lviv Polytechnic National University  
Lviv, Ukraine

byixx13@gmail.com

Anastasiia Chuchvara

Department of numerical methods of  
mathematical physics

Pidstryhach Institute of Applied  
Problems of Mechanics and  
Mathematics of the National Academy  
of Sciences of Ukraine

Lviv, Ukraine

davydoka@gmail.com

*Abstract*— On the basis of balance equations for mass, momentum and energy the mathematical model of diffusion under cascade decay of admixture particles is constructed. The initial-boundary value problem of the cascade type, for which the particles concentration at some stage of decay is a mass source of diffusing substance at the following stage, is formulated under given data for sought function on one of the layer boundaries only at certain moments. The solutions of the initial-boundary value

problems of diffusion of the cascade type are constructed by the iteration procedure using Green functions. The program complex is designed for computing the diffusion processes under cascade decay of admixture particles.

*Анотація*— На основі балансових співвідношень маси, імпульсу та енергії побудована математична модель дифузії за каскадного розпаду домішkových речовин. Сформульована

крайова задача каскадного типу, для якої концентрація частинок на певному кроці розпаду є джерелом маси розпадної речовини, яка дифундує, на наступному кроці за відомих даних шуканої функції на одній з границь шару тільки у певні моменти часу. Розв'язки крайових задач дифузії каскадного типу побудовані за ітераційною процедурою з використанням функцій Гріна. Розроблений комплекс програм для комп'ютерного моделювання дифузійних процесів за каскадного розпаду домішкових речовин.

**Keywords**— *mathematical model; diffusion; cascade decay; diffusion flux; approximation; boundary condition.*

**Ключові слова**— *математична модель; дифузія; каскадний розпад; концентрація; дифузійний потік; апроксимація; гранична умова.*

## I. ВСТУП

На основі математичних моделей дифузійних процесів домішкових компонент здійснюють моніторинг техногенних речовин в оточуючому середовищі, прогнозують захищеність ґрунтових вод від поверхневих забруднень, оцінюють надійність інженерних споруд для зберігання агресивних сполук тощо. Роль процесів дифузії є важливою при створенні матеріалів із заданими властивостями, які повинні підтримуватися протягом тривалого часу в реальних умовах експлуатації. У певних випадках потрібно враховувати деградацію або розпад технологічних субстанцій.

Каскадні перетворення достатньо поширені серед звичайних хімічних реакцій, часто деградації техногенних забруднень, де в якості частинок з невикористаними зв'язками виступають вільні атоми або радикали. Поява в середовищі необхідної частинки викликає каскад відповідних реакцій, який продовжується до втрати частинки-носія реакції [2, 8, 10]. За таким механізмом протікають реакції крекінга, горіння, полімеризації та низка інших.

Дана робота присвячена моделюванню процесу дифузії домішкових речовин за їх каскадного розпаду у шарі, коли на нижній поверхні тіла відомі дані вимірювань у певні моменти часу.

## II. ОБ'ЄКТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Прийmemo, що тіло  $\mathbf{K}^*$  (дискретна сукупність матеріальних частинок) є багатокомпонентним твердим розчином і утворене частинками домішкової речовини  $\mathbf{K}^{*(0)}$ , які можуть розпадатися, та частинками скелету  $\mathbf{K}_s$ , які не розпадаються. При розпаді речовини  $\mathbf{K}^{*(0)}$  утворюються частинки інших домішкових речовин  $\mathbf{K}^{*(1)}$  і  $\mathbf{K}^{*(N)}$ , причому частинки  $\mathbf{K}^{*(N)}$  вже не розпадаються (рис. 1). У свою чергу частинки домішки  $\mathbf{K}^{*(1)}$  розпадаються і утворюють речовину  $\mathbf{K}^{*(2)}$  і нерозпадні (нешкідливі) речовини, які віднесемо до  $\mathbf{K}^{*(N)}$ , і т.п. доки на  $(N-1)$ -у кроці не отримуємо тільки нерозпадні частинки домішкової речовини.

При макроскопічному описі тіло  $\mathbf{K}^*$  розглядається як термодинамічна система, яка вкладає в обмежену область евклідового простору  $\mathbf{x}$ , що віднесений до прямокутної

декартової системи координат [4, 7, 11]. Кожній компоненті тіла (підсистемам частинок  $\mathbf{K}_s$ , що утворюють скелет, а також частинкам розпадної домішкової речовини  $\mathbf{K}^{*(0)}$  і частинкам, які утворилися в наслідок розпаду,  $\mathbf{K}^{*(i)}$ ,  $i = 1, N$ ) співставляються у відповідність континууми  $\mathbf{K}^{(i)}$  ( $i = 0, N$ ).

Дискретна сукупність  $\mathbf{K}^*$  матеріальних частинок тіла в кожен момент часу  $t$  відображається в деяку область  $(\mathbf{X})$  обмежену границею  $(\partial\mathbf{X})$  скінченного об'єму  $V$  евклідового простору  $\mathbf{x}$ . При цьому дискретні сукупності  $\mathbf{K}^{*(i)}$  матеріальних частинок компонент відображаються в області  $(\mathbf{X}^{(i)})$ , обмежені границями  $(\partial\mathbf{X}^{(i)})$  і об'ємами  $V^{(i)}$ , так, що  $\cup(\mathbf{X}^{(i)}) \subset (\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}$ . У довільний момент часу  $t$  підсистемам  $\mathbf{K}^{(i)} \cup \partial\mathbf{K}^{(i)}$  відповідають змінні в часі геометричні конфігурації  $(\mathbf{X}^{(i)}(t)) \cup (\partial\mathbf{X}^{(i)}(t))$ .

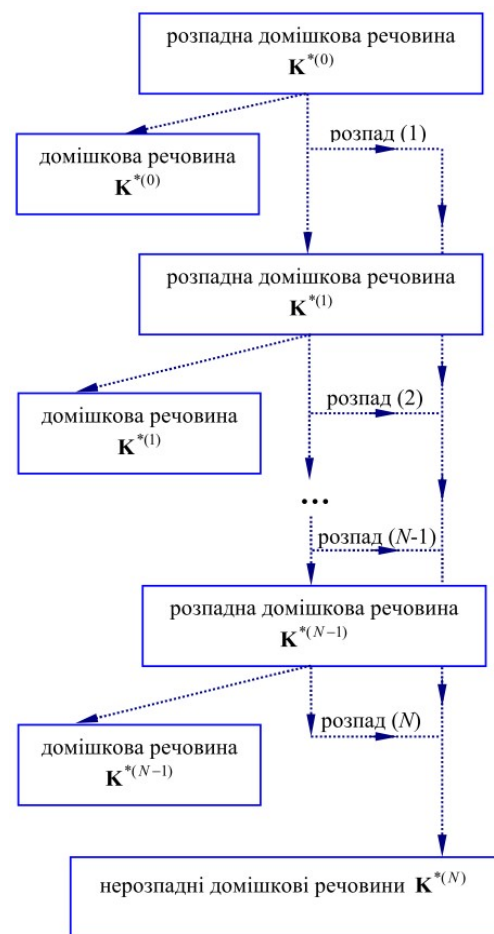


Рис. 1. Схема каскадного розпаду дифундуючих речовин

Матеріальні точки  $K^{(i)} \in \mathbf{K}^{(i)}$  цих континуумів наділяються властивостями вихідних дискретних сукупностей матеріальних частинок  $\mathbf{K}^{*(i)}$ . Ці величини розглядаються як середні значення параметрів для підсистем  $\delta\mathbf{K}_n^{*(i)} \subset \mathbf{K}^{*(i)}$

, які відображаються в області  $(\delta X_n^{(i)}) \in (X^{(i)})$  при довільному мисленному розбитті.

За вихідні співвідношення математичної моделі дифузії домішкової речовини з урахуванням каскадного розпаду мігруючих речовин приймаємо закони збереження і балансові рівняння для маси, імпульсу та енергії, які формулюються для кожної з компонент та континууму центрів мас.

### III. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Розглянемо дифузію розпадної домішкової речовини в шарі безрозмірної товщини  $\xi_0$  за крайових умов I-го роду, коли на границі тіла  $\xi = \xi_0$  відомі лише експериментальні дані у деякі моменти часу.

Вертикальну дифузію домішкових речовин, що супроводжується їхнім каскадним розпадом за схемою, поданою на рис. 1, описують наступні рівняння: для етапу розпаду  $i = 0$

$$\frac{\partial c^{(0)}}{\partial \tau} = d^{(0)} \frac{\partial^2 c^{(0)}}{\partial \xi^2} - a^{(0)} c^{(0)}, \quad (1a)$$

для етапів  $i = \overline{1, N-1}$

$$\frac{\partial c^{(i)}}{\partial \tau} = d^{(i)} \frac{\partial^2 c^{(i)}}{\partial \xi^2} + a_{\lambda}^{(i-1)} c^{(i-1)} - a^{(i)} c^{(i)}, \quad (1b)$$

для етапу  $i = N$

$$\frac{\partial c^{(N)}}{\partial \tau} = d^{(N)} \frac{\partial^2 c^{(N)}}{\partial \xi^2} + \sum_{i=0}^{N-1} a_{\lambda}^{(iN)} c^{(i)}, \quad (1b)$$

за нульових початкових умов

$$c^{(i)}(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0, \quad i = \overline{0; N}. \quad (2)$$

На границі тіла  $\xi = 0$  підтримується стале значення концентрації речовини  $K^{*(0)}$

$$c^{(0)}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = c_0 \equiv const, \quad (3)$$

а на поверхні  $\xi = \xi_0$  відомо (або можна виміряти) значення функції концентрації в певні моменти часу:

$\tau$	$\tau_1$	$\tau_2$	...	$\tau_k$	...	$\tau_n$
$F(\tau)$	$F(\tau_1)$	$F(\tau_2)$	...	$F(\tau_k)$	...	$F(\tau_n)$

Нехай за експериментальними даними побудований апроксимаційний поліном степені  $M$ , тоді гранична умова при  $\xi = \xi_0$  набуде вигляду

$$c^{(0)}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} = \sum_{k=0}^M b_k \tau^k. \quad (4)$$

Для етапів  $i = \overline{1, N}$  приймаємо, що джерела маси на границях шару немає, тобто

$$c^{(i)}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = 0, \quad c^{(i)}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} = 0 \quad i = \overline{1, N}. \quad (5)$$

### IV. КОНЦЕНТРАЦІЯ ЧАСТИНОК ДЛЯ $i = 0$

Знайдемо розв'язок крайової задачі (1a), (2)-(4) для  $i = 0$  зведенням до нульових граничних умов заміною

$$w(\tau, \xi) = c^{(0)}(\tau, \xi) - c_0 \left( 1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right) - \sum_{k=0}^M b_k \tau^k \frac{\xi}{\xi_0}, \quad (6)$$

застосуванням скінченного інтегрального sin-перетворення Фур'є ( $\xi \rightarrow y_n = n\pi/\xi_0$ ,  $w(\tau, \xi) \rightarrow \bar{w}(\tau, n)$ ) [9] та інтегрального перетворення Лапласа за часом ( $\tau \rightarrow s$ ,  $\bar{w}(\tau, n) \rightarrow \tilde{w}(s, n)$ ). Тоді в зображеннях отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} & [s + d^{(0)} y_n^2 + a^{(0)}] \tilde{w} = \\ & = - \frac{(-1)^{n+1}}{y_n} \sum_{k=0}^M b_k \left( a^{(0)} \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}} + k \frac{\Gamma(k)}{s^k} \right) - a^{(0)} \frac{c_0}{y_n s} - \frac{c_0}{y_n}, \end{aligned}$$

звідки одержимо розв'язок

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \frac{1}{y_n [s + d^{(0)} y_n^2 + a^{(0)}]} \times \\ & \times \left\{ (-1)^n \sum_{k=0}^M b_k \left( a^{(0)} \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}} + k \frac{\Gamma(k)}{s^k} \right) - a^{(0)} \frac{c_0}{s} - c_0 \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Використаємо наступні формули оберненого перетворення Лапласа [1]

$$L^{-1} \left[ \frac{1}{[s + d^{(0)} y_n^2 + a^{(0)}]} \right] = e^{-[d^{(0)} y_n^2 + a^{(0)}] \tau}; \quad (8)$$

$$L^{-1} \left[ \frac{1}{s [s + d^{(0)} y_n^2 + a^{(0)}]} \right] = \frac{1}{d^{(0)} y_n^2 + a^{(0)}} \left\{ 1 - e^{-[d^{(0)} y_n^2 + a^{(0)}] \tau} \right\}; \quad (9)$$

$$L^{-1} \left[ \frac{1}{s^k [s + d^{(0)} y_n^2 + a^{(0)}]} \right] = \sum Res \left[ \frac{e^{s\tau}}{s^k [s + d^{(0)} y_n^2 + a^{(0)}]} \right],$$

де  $Res[\dots]$  - лишки, які для випадку кратних коренів визначаються за теоремою Хевісайда [5, 6]:

$$\begin{aligned} \sum Res \left[ \frac{e^{s\tau}}{s^k [s + d^{(0)} y_n^2 + a^{(0)}]} \right] &= \frac{e^{-[d^{(0)} y_n^2 + a^{(0)}] \tau}}{(-1)^k (d^{(0)} y_n^2 + a^{(0)})^k} + \\ &+ \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[ \frac{e^{s\tau}}{(s + d^{(0)} y_n^2 + a^{(0)})^k} \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Зазначимо, що сумування по  $k$  у (17) починається від 0, тоді два перші члени цієї суми набувають вигляду

$$\begin{aligned} k=0: & \frac{(-1)^n b_0 a^{(0)}}{y_n s [s + a_n]}, \\ k=1: & \frac{(-1)^n b_1}{y_n [s + a_n]} \left( a^{(0)} \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right), \end{aligned}$$

де  $a_n = d^{(0)} y_n^2 + a^{(0)}$ , для обернення яких застосовуємо формули (19), (20). Для  $k = 2, 3, \dots$  використовуємо формулу (10), зокрема одержимо

$$k = 2 : \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[ \frac{e^{s\tau}}{(s+a_n)^k} \right] = \frac{1}{(k-1)!} \frac{\tau a_n - 2}{a_n^3},$$

$$k = 3 : \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[ \frac{e^{s\tau}}{(s+a_n)^k} \right] = \frac{1}{(k-1)!} \frac{\tau^2 a_n^2 + 2\tau a_n - 6}{a_n^4}.$$

...

Отже, після оберненого перетворення Лапласа функції (7) отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{w}(\tau, n) = & -\frac{c_0}{y_n} e^{-a_n \tau} + \frac{a^{(0)}}{y_n} \left\{ (-1)^n \left[ b_0 + \frac{b_1}{a^{(0)}} \right] - \frac{c_0}{a_n} \right\} \left\{ 1 - e^{-a_n \tau} \right\} + \\ & + 2a^{(0)} \frac{(-1)^n b_1}{y_n} \frac{\tau a_n - 2}{a_n^3} + \\ & + \frac{(-1)^n}{y_n} \sum_{k=2}^M b_k \left( \frac{(-1)^k e^{-a_n \tau}}{a_n^k} \left[ a^{(0)} \Gamma(k+1) - k \Gamma(k) a_n \right] + \right. \\ & + a^{(0)} \frac{\Gamma(k+1)}{k!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^k}{ds^k} \left[ \frac{e^{s\tau}}{(s+a_n)^{k+1}} \right] + \\ & \left. + k \frac{\Gamma(k)}{(k-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[ \frac{e^{s\tau}}{(s+a_n)^k} \right] \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Після застосування оберненого інтегрального перетворення Фур'є до виразу (11) та формули (6) маємо

$$\begin{aligned} c^{(0)}(\tau, \xi) = & c_0 \left( 1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right) + \sum_{k=0}^M b_k \tau^k \frac{\xi}{\xi_0} + \frac{2}{\xi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sin y_n \xi \left\{ A_n(\tau) + \right. \\ & + \frac{(-1)^n}{y_n} \sum_{k=2}^M b_k \left( \frac{(-1)^k e^{-a_n \tau}}{a_n^k} \left[ a^{(0)} \Gamma(k+1) - k \Gamma(k) a_n \right] + \right. \\ & + a^{(0)} \frac{\Gamma(k+1)}{k!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^k}{ds^k} \left[ \frac{e^{s\tau}}{(s+a_n)^{k+1}} \right] + \\ & \left. \left. + k \frac{\Gamma(k)}{(k-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[ \frac{e^{s\tau}}{(s+a_n)^k} \right] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{де } A_n(\tau) = \alpha_n(\tau) - \frac{c_0}{y_n} e^{-a_n \tau} + \beta_n \left\{ 1 - e^{-a_n \tau} \right\};$$

$$\alpha_n(\tau) = 2a^{(0)} \frac{(-1)^n b_1}{y_n} \frac{\tau a_n - 2}{a_n^3}, \quad \beta_n = \frac{a^{(0)}}{y_n} \left\{ (-1)^n \left[ b_0 + \frac{b_1}{a^{(0)}} \right] - \frac{c_0}{a_n} \right\}.$$

Зазначимо, що оскільки гранична умова (4) на поверхні шару  $\xi = \xi_0$  задана як поліном за степенями часової змінної, який апроксимує експериментальні дані, виміряні на цій границі, на часовому проміжку  $\tau \in [0; \tau_n]$ , то отримана

формула для концентрації домішкової речовини (12) є застосовною саме в цьому часовому інтервалі.

## V. КОНЦЕНТРАЦІЇ ЧАСТИНОК ДЛЯ $i = \overline{1, N}$

У загальному випадку для  $i = 1, \dots, N-1$  розв'язок крайової задачі (16), (2), (5) подамо через функцію Гріна [3], розглядаючи як джерело збільшення концентрації частинок на  $i$ -му етапі за рахунок розпаду речовини на  $(i-1)$ -му етапі

$$c^{(i)}(\xi, \tau) = a_\lambda^{(i)} \int_0^\tau \int_0^{\xi_0} G^{(i)}(\xi, \xi'; \tau, \tau') c^{(i-1)}(\xi', \tau') d\xi' d\tau', \quad (13)$$

де  $G^{(i)}(\xi, \xi'; \tau, \tau')$  - функція Гріна задачі (16), (2), (5), тобто є розв'язком відповідної задачі дифузії з точкового джерела на  $i$ -му кроці розпаду за нульових крайових умов, а саме

$$G^{(i)}(\xi, \xi'; \tau, \tau') = \theta(\tau - \tau') \sum_{n=1}^{\infty} \sin(y_n \xi) \sin(y_n \xi') e^{-(d^{(i)} y_n^2 + a^{(i)}) (\tau - \tau')}.$$

Отже, знайшовши функцію Гріна і визначивши концентрації розпадних домішкових частинок на кроці  $i-1$ , за співвідношенням (13) ми знайдемо концентрацію розпадної речовини на  $i$  етапі каскадного розпаду.

Для випадку  $i = N$  (нерозпадні або нешкідливі домішки) процес масоперенесення описується крайовою задачею (1в), (2), (5). Її розв'язок також подамо через відповідну функцію Гріна аналогічно до (13):

$$c^{(N)}(\xi, \tau) = \int_0^\tau \int_0^{\xi_0} G^{(N)}(\xi, \xi'; \tau, \tau') \sum_{i=0}^{N-1} a_\lambda^{(iN)} c^{(i)}(\xi', \tau') d\xi' d\tau', \quad (14)$$

де  $G^{(N)}(\xi, \xi'; \tau, \tau')$  - функція Гріна задачі (1в), (2), (5) і визначається аналогічно до попереднього випадку.

Тоді, послідовно визначивши концентрації  $c^{(0)}(\xi, \tau)$ ,  $c^{(1)}(\xi, \tau)$ , ...,  $c^{(N-1)}(\xi, \tau)$ , за формулою (14) з урахуванням виразів для функції Гріна знайдемо концентрацію нерозпадних або нешкідливих домішкових частинок у тілі.

## VI. ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ДИFUZІЇ ЗА КАСКАДНОГО РОЗПАДУ ДОМІШКОВИХ РЕЧОВИН

На основі формул (12)-(14), а також функцій Гріна розроблений програмний комплекс для комп'ютерного моделювання процесів дифузії за каскадного розпаду мігруючих частинок, коли на нижній поверхні тіла відомі дані вимірювань у певні моменти часу.

На рис. 2 наведені приклади характерних 3D-розподілів концентрації  $c^{(1)}(\xi, \tau)/c_0$  на площині  $O\xi\tau$  на малому  $\tau \in [0; 10]$  (рис. а) і великому  $[0; 200]$  (рис. б) часових проміжках протікання процесу розпадної дифузії домішки  $\mathbf{K}^{*(1)}$ , джерелом якої є розпад речовини  $\mathbf{K}^{*(0)}$ . Тут прийнято наступні значення параметрів:  $a^{(1)} = 0.2$ ,  $a_\lambda^{(0)} = 0.8$ ,

$d^{(1)} = 0.3$ ,  $a^{(1)} = 0.2$ ,  $\xi_0 = 10$ , при цьому  $d^{(0)} \equiv 1$ ,  $a^{(0)} \equiv 1$

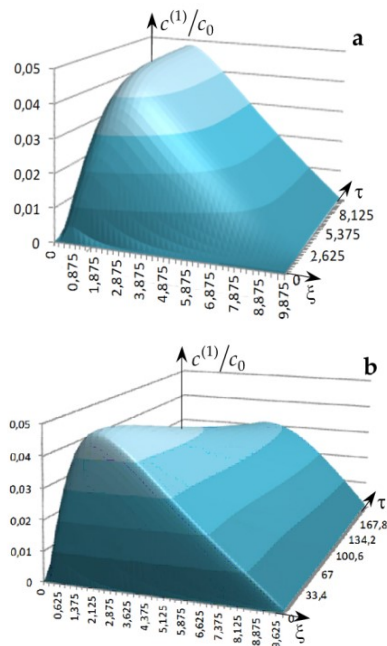


Рис. 2. Поверхні розподілів концентрації  $c^{(1)}(\xi, \tau)/c_0$  на різних часових проміжках протікання процесу дифузії  $\tau_{\max} = 10$  (рис.а) та  $\tau_{\max} = 200$  (рис.б)

Зазначимо, що випадку розподілів  $c^{(1)}(\xi, \tau)/c_0$  спостерігається приповерхнєве зростання функції (рис. 2), максимум якої з часом зростає і зсувається вглиб тіла. З подальшим збільшенням часу протікання процесу дифузії концентрація  $c^{(1)}(\xi, \tau)/c_0$  зменшується, що обумовлюється розпадом вже речовини  $K^{*(1)}$ . При цьому максимум функції продовжує зсуватись у глиб тіла. Така поведінка функції  $c^{(1)}(\xi, \tau)/c_0$  характерна до її виходу на усталений режим (безрозмірний час  $\tau = 400$  є близьким до стаціонарного). Відзначимо, що часи виходу на стаціонарний режим функцій концентрацій на 0-му і 1-му кроках розпаду різняться на 2 порядки.

На наступному  $i = 2$  і на подальших кроках каскадного розпаду концентрації  $c^{(i)}(\xi, \tau)$  приймають дедалі менші значення. Проте поведінка цих функцій аналогічна до  $c^{(1)}(\xi, \tau)$ .

Таким чином на основі отриманих розв'язків крайових задач каскадного типу, коли джерелом маси на певному етапі є розпад мігруючих частинок на попередньому, досліджено процеси дифузії домішкових речовин за відомих експериментальних значень шуканої функції у певні моменти часу на нижній границі шару. Для конкретної схеми розпаду отримано розв'язки крайових задач каскадного типу, для етапів першого і подальших етапів розпаду функції концентрації знайдені за ітераційною процедурою з використанням функцій Гріна. На основі отриманих формул розроблений комплекс програм для

комп'ютерного моделювання процесів дифузії за каскадного розпаду домішкових речовин.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Абрамовиц М., Стиган И Справочник по специальным функциям. – М.: Мир, 1979. – 830 с.
- [2] Бекман И.Н. Радиоактивность и радиация. Радиохимия. Т. 1. – МО, Щёлково: Издатель Мархотин П.Ю. 2011. – 398 с.
- [3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 527 с.
- [4] Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. – М.: Мир, 1974. – 304 с.
- [5] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
- [6] Лариков Л.Н. Залечивание дефектов в металлах. – Киев: Наук. думка, 1980. – 279 с.
- [7] Седов Л.И. Механика сплошной среды. В 2-х т. – М.: Наука, 1976. – Т.1. – 526 с. - Т.2. – 576 с.
- [8] Середина В.П. Загрязнение почв. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2015. – 346 с.
- [9] Снеддон И. Преобразования Фурье. - М.: Изд-во иностр. Литературы, 1955. – 667 с.
- [10] Чапля С. Я., Чернуха О. Ю., Білушак Ю. І. Математичне моделювання гетеродифузійних процесів при розпаді частинок. — Львів: Растр-7, 2018. — 240 с.
- [11] Chernukha O., Bilushchak Y. A mathematical model of two-way heterodiffusion processes with cascade decay of migrating particles // Journal of Mathematical Sciences. – 2021. – Vol. 253, No 1. – P. 156-167.

# Застосування Програмного Забезпечення З Відкритим Кодом Для Моделювання Розгортання Космічної Антени

Владислав Шамаханов  
EOS Ukraine,  
Інститут технічної механіки НАНУ і ДКАУ,  
Дніпро, Україна  
luckyminerfriends1@gmail.com

Сергій Хорошилов  
EOS Ukraine,  
Інститут технічної механіки НАНУ і ДКАУ,  
Дніпро, Україна  
skh@ukr.net

Сергій Мартинюк  
EOS Ukraine  
Дніпро, Україна

Олександр Сушко  
EOS Ukraine  
Дніпро, Україна

## Open Source Software For Modelling Of Space Antenna Deployment

V.K. Shamakhanov  
EOS Ukraine,  
Institute of Technical Mechanics of NASU and SSAU,  
Dnipro, Ukraine  
luckyminerfriends1@gmail.com

S.V. Khoroshylov  
EOS Ukraine,  
Institute of Technical Mechanics of NASU and SSAU,  
Dnipro, Ukraine  
skh@ukr.net

S.E. Martyniuk  
EOS Ukraine  
Dnipro, Ukraine

O.Y. Sushko  
EOS Ukraine  
Dnipro, Ukraine

*Розглянуто задачу моделювання розгортання антени новітньої конструкції з використанням сіток, що рекомендована для використання в складі міні супутників. Найбільш суттєвою відмінністю цієї антени від інших є конструкція опорного кільця у вигляді пантографа.*

*Для створення моделі динаміки антени космічного застосування та подальшої її реалізації у програмному пакеті з відкритим кодом зроблено деякі спрощення, які обумовлені складністю конструкції. Модель антени представлена у вигляді системи жорстких і пружних тіл, зв'язаних за допомогою шарнірів. Вуглепластикові стрижні моделюються за допомогою пружного кінцевого елемента з використанням методу абсолютних вузлових координат, який дозволяє моделювати великі деформації. Алюмінієві шарнірні вузли моделюються як декілька шарнірів обертання, поєднаних між собою звичайними жорсткими елементами. Основними модельованими властивостями цих шарнірних вузлів є жорсткість, розташування та напрямок осей обертання*

*шарнірів. Стягуючі зусилля, які створює натягнута сітка, моделюються за допомогою пружин. Тросовий привід розгортання антени моделюються як навантаження, що діють на відповідні елементи у визначених локальних положеннях.*

*Представлено алгоритм побудови моделі антени космічного застосування, що призначений для моделювання процесу розгортання рефлектора у програмному пакеті з відкритим кодом HotInt. З використанням побудованої моделі проведено моделювання розкладання антени для різних випадків, що відрізняються силами, які використовуються для розгортання. Отримано розрахунки часу розгортання, зміни кутів між стрижнями V-подібного складання та напруги у діагональних стрижнях секцій антени під час розкриття антени.*

*Запропонований в доповіді підхід базується на використанні загально доступного програмного забезпечення та дозволяє*

**забезпечити гнучкість моделювання та скоротити час створення моделей.**

*Ключові слова: рефлекторна антена, розгортання, динаміка системи тіл, відкрите програмне забезпечення, гнучкий стрижень, шарнір.*

*A mesh antenna of the novel design, which is recommended for mini-satellites, is considered as the object for modeling. The most significant difference between this antenna and others is the design of the support ring in the form of a pantograph.*

*To create a model of the space antenna dynamics and its subsequent implementation using open-source software, some simplifications were made due to the complexity of the structure. The antenna model is represented as a system of rigid and flexible bodies connected by hinges. Carbon fiber rods are modeled with the help of a flexible finite element using the method of absolute nodal coordinates, which allows for the modeling of large deformations of the structure. Aluminum hinge assemblies are modeled as several rotation joints connected by conventional rigid elements. The main modeled properties of these hinge assemblies are the stiffness, location, and direction of the axes of rotation of the hinges. The tension forces created by the stretched mesh are modeled using springs. The cable drive of the antenna deployment mechanism is modeled as a load acting on the corresponding elements in defined local positions.*

*An algorithm for building a model of the space antenna to simulate the reflector deployment process in the HotInt open-source software is presented. Using the built model, antenna deployment simulations are carried out for different cases, which differ in the forces used for the deployment. Values of deployment time, variations of angles between the V-folded bars, and tensions in the diagonal rods of the antenna sections during the antenna deployment are obtained.*

*The approach proposed in the report can be implemented using software, that is available for free, ensures flexibility of modeling, and reduces the time needed for creating models.*

*Keywords: reflector antenna, deployment, multibody dynamics, open-source software, flexible beam, joint.*

## I. ВСТУП

Антенні використовують в космосі для вирішення різноманітних завдань, наприклад зв'язок, військова розвідка, дистанційне зондування і прогнозування клімату. Для підвищення ефективності вирішення таких завдань застосовують антени з великою апертурою. У зв'язку з тим, що місце під обтічником ракети-носія обмежене великі антени проектують у класі конструкцій, що трансформуються [1-3]. Такі конструкції виводяться на орбіту у складеному стані, а потім в космосі вони розвертаються таким чином, щоб сформувати потрібну конфігурацію. Подібні конструкції доволі складні, та нажалі відомі випадки не розкриття таких конструкцій в космосі. Складності проведення натурних експериментів по розгортанню антен космічного застосування на Землі спонукають інженерів і дослідників більше використовувати методи комп'ютерного моделювання. Моделювання таких систем є складною задачею, оскільки розгортання рефлектора космічної антени є складним процесом переходу від системи пов'язаних тіл з відносними рухами між її компонентами до пружної конструкції.

Існує достатня кількість публікацій, що присвячені проблемі моделювання процесів розгортання антен космічного застосування, наприклад [4-6]. У переважній кількості випадків автори для проведення досліджень використовують спеціальні програми власної розробки. Незважаючи на те, що такий підхід природньо дуже гнучкий, він потребує багато часу для створення та валідації програмного коду, оскільки об'єкт моделювання – це складна багато елементна гнучка система.

Інший підхід полягає у використанні комерційних програмних пакетів для моделювання динаміки систем зв'язаних тіл таких, як ADAMS [7-9] и ANSYS MOTION [10, 11]. Не зважаючи на те, що такі пакети мають широкі можливості вони все ж обмежені тією методологією, що використана при їх створенні. Крім того ці програмні продукти дуже дорогі і недоступні стартапам та невеликим групам дослідників.

В цей час існують невелика кількість програмних продуктів для моделювання динаміки систем зв'язаних з відкритим кодом, наприклад MBDyn [12] та HOTINT [13]. Вони загально доступні та потенційно мають забезпечити гнучкість моделювання та скоротити час створення моделей, але нажалі відсутні публікації з прикладами моделювання антен космічного застосування.

Відомі різні конструкції антен, що трансформуються, наприклад парасолькові [14], ферменні [15, 16] та сітчані [10, 11]. Останній тип антен вважається найбільш перспективним, оскільки характеризуються великим коефіцієнтом складання, високою надійністю розгортання, легкістю конструкцію та великою жорсткістю після розгортання. Найбільш відомими такими конструкціями є антени AstroMesh [17] от компанії Astro Aerospace. Питанням моделювання процесів розгортання таких антен присвячені публікації [10, 11].

В працях [10, 11] запропонована новітня конструкція антени з використанням сіток, що рекомендована для використання в складі міні супутників. Найбільш суттєвою відмінністю цієї антени від AstroMesh є конструкція опорного кільця у вигляді пантографа. Така конструкція вважається дуже перспективною, але нажалі відсутні публікації, присвячені моделюванню розгортання таких конструкцій.

Метою доповіді є створення за допомогою програмного пакета з відкритим кодом моделі динаміки сітчастої антени космічного застосування та попередні дослідження процесу її розгортання.

## II. КОНСТРУКЦІЯ АНТЕНИ

З урахуванням наведених вище зауважень у якості об'єкта досліджень вибрана антена, що запропонована в працях [10, 11].

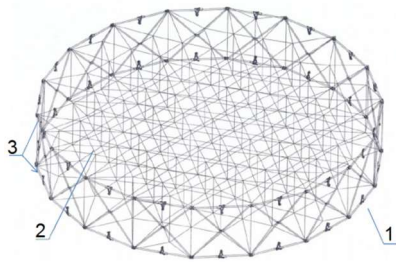


Рис.1 Конструкція антени

Основою конструкції антени (рис. 1) є опорне кільце (1), що трансформується. До опорного кільця кріпляться дві сітки (2), які натягаються за допомогою стяжок та формують необхідну форму рефлектора. До одної з сіток кріпиться полотно, що відбиває. Опорне кільце антени складається з 18-ти однакових секцій, що з'єднані між собою шарнірними вузлами (3). Кожна секція формується із діагональних та горизонтальних стрижнів трубчатого поперечного перерізу. Фрагмент опорного кільця антени з декількох секцій представлено на рис. 2, де локальний розріз А є положенням шарніра V-подібного складання, який показано на рис. 3.

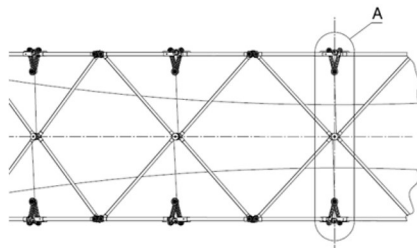


Рис.2 Фрагмент опорного кільця антени

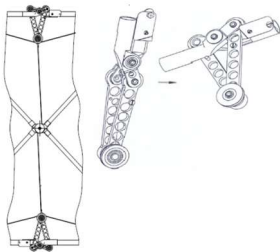


Рис.3 Шарнір V-подібного складання

Діагональні стрижні з'єднані між собою шарніром, який забезпечує обертання одного діагонального стрижня відносно іншого. Діагональні стрижні також з'єднані із нижнім та верхнім горизонтальними стрижнями, які трансформуються за допомогою шарнірів V-подібного складання (рис. 3). У місцях з'єднання діагональних та горизонтальних стрижнів встановлені шарнірні вузли (рис. 4), за допомогою яких секції також поєднуються між собою.

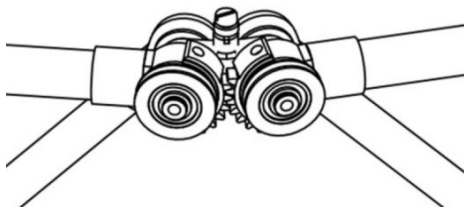


Рис.4 Міжсекційний шарнірний вузол

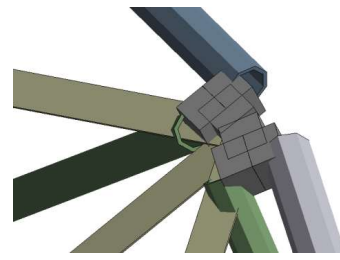


Рис.5 Спрощене представлення міжсекційного шарнірного вузла

Усі шарніри та сполучні елементи зроблені із алюмінію, а діагональні та горизонтальні стрижні зроблені з вуглепластику.

Антену розгортається за допомогою кабелів, що проходять через систему шківів та натягуються за допомогою електродвигуна.

### III. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АНТЕНИ. ОСОБЛИВОСТІ ОПИСУ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЇ

Для створення моделі динаміки антени космічного застосування та подальшої її реалізації у програмному пакеті з відкритим кодом зроблено деякі спрощення, які обумовлені складністю конструкції.

Вуглепластикові стрижні моделюються за допомогою пружного скінченного елемента з використанням методу абсолютних вузлових координат [16], який дозволяє моделювати великі деформації. Це пружний елемент, який здатний моделювати великі деформації і може використовуватися як для статичних, так і для динамічних досліджень. Такий елемент описує осьову деформацію, деформацію згину, зсуву та кручення. Визначення елемента стрижня базується на формулюванні абсолютних вузлових координат, яке використовує вектори нахилу для параметризації орієнтації поперечного перерізу замість параметрів обертання. Орієнтація поперечного перерізу стрижня описується за допомогою звичайної лінійної інтерполяції, а переміщення вздовж його осі інтерполюються з використанням лінійних функцій форми. Вектори нахилу є векторами похідних відносно системи координат масштабованого прямолінійного базового елемента. Визначення пружних сил ґрунтується на формулюванні на основі механіки суцільного середовища Сен-Венана Кірхгофа [17], використовуючи співвідношення між нелінійним тензором деформації Гріна-Лагранжа та другим тензором напруги Піола-Кірхгофа.

$$q^{(i)} = [u^{(i)T} \quad u_{\eta}^{(i)T} \quad u_{\zeta}^{(i)T}]^T, \quad (1)$$

де  $u^{(i)}$  - вузлове переміщення, а  $u_{\eta}^{(i)}$ ,  $u_{\zeta}^{(i)}$  - вектори нахилу.

Кожен вузол має дев'ять ступенів свободи, тому двовузловий лінійний стрижневий елемент має 18 ступенів свободи.

Пружний стрижневий елемент геометрично описується за допомогою вектору положення  $r^{(i)}$  та двох векторів нахилу  $r_{\eta}^{(i)}$  і  $r_{\zeta}^{(i)}$  для кожного і-го вузла (рис. 6).



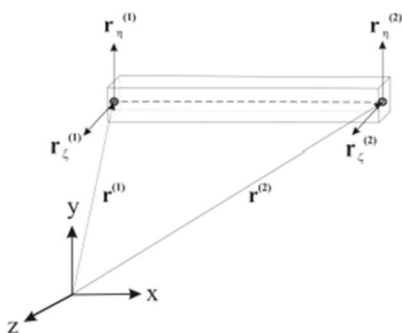


Рис.6 Геометричний опис пружного стрижня

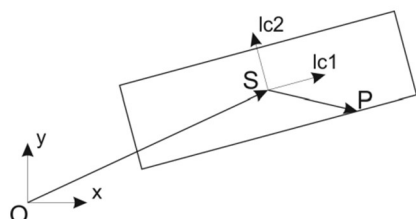


Рис.7 Локальні та глобальні системи координат для жорсткого елемента

Алюмінієві шарнірні вузли моделюються як декілька шарнірів обертання, поєднаних між собою звичайними жорсткими елементами (рис. 7). Незважаючи на те, що реальна геометрія цих вузлів має іншу форму (рис. 4), таке представлення виправдане, оскільки ці вузли мають значно більшу жорсткість, ніж стрижневі елементи конструкції, і їх напружено-деформований стан не досліджується. Основними модельованими властивостями цих шарнірних вузлів є жорсткість, розташування та напрямок осей обертання шарнірів. Шарнірний вузол у спрощеному виді зображено на рис. 5.

На рис. 7 літерою S позначено центр тяжіння жорсткого елемента, що визначається вектором положення у глобальних координатах. Центр тяжіння у свою чергу є і точкою відліку для задання значень місцевих координат. Наприклад для визначення положення, позначеної на рисунку точки P, яка потрібна для додання шарнірів або сенсорів, використовується локальна система координат.

Для того, щоб маса спрощеної моделі антени відповідала масі реальної конструкції використано додаткові точкові маси. Точкові маси мають визначаються трьома просторовими координатами.

Шарнір V-подібного складання, який з'єднує між собою горизонтальні стрижні, моделюється за допомогою універсального шарніру, що можна налаштувати. Цей шарнір з'єднує два тіла між собою та дає можливість обмежувати 6 відносних ступенів свободи, а саме переміщення вздовж трьох осей локальної системи координат умовних тіл 1 та 2, що з'єднуються, та обертання навколо цих осей. Рівняння обмежування переміщень для такого типу шарнірів мають наступний вигляд:

$$A^T(x_1 - x_2) = 0, \quad (2)$$

де  $x_1, x_2$  – положення точок з'єднання у глобальних координатах на тілах 1 та 2, відповідно;  $A = (e_x^i \ e_y^i \ e_z^i)$  – матриця повороту від локальних координат шарніра до глобальних координат для умовного  $i$ -го тіла.

Кожне рівняння в системі (2) відповідає обмеженому напрямку, тому якщо всі напрямки обмежені воно спрощується до рівняння (3):

$$x_1 - x_2 = 0, \quad (3)$$

Якщо всі обертальні ступені свободи  $i$ -того та  $j$ -того тіл обмежено, то рівняння обертання має вигляд:

$$\begin{pmatrix} e_y^j \cdot e_z^i \\ e_x^j \cdot e_z^i \\ e_x^j \cdot e_y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для випадків, коли обертання не обмежено навколо одної з осей рівняння (4) приймають наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} e_x^j \cdot e_z^i \\ e_x^j \cdot e_y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_y^j \cdot e_z^i \\ e_y^j \cdot e_x^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_z^j \cdot e_y^i \\ e_z^j \cdot e_x^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

для осі x, y, z, відповідно, де  $e^i$  відноситься до  $i$ -того тіла, а  $e^j$  - до  $j$ -того.

Діагональні стрижні з'єднані між собою за допомогою шарніру обертання, який обмежує всі відносні ступені свободи між двома тілами, крім обертання навколо локальної осі. Шарнір обертання еквівалентний універсальному шарніру у якого обмежено усі ступені свободи, крім обертання навколо локальної осі x. Також шарнір обертання використовується для приєднання горизонтальних та діагональних стрижнів до шарнірних вузлів.

Жорсткі тіла з'єднані між собою за допомогою фіксованого шарніра, який обмежує усі ступені свободи елемента у визначеному локальному положенні. Фіксований шарнір еквівалентний універсальному шарніру з обмеженням усіх ступенів свободи.

Антенна закріплена на штанзі, яка моделюється таким же пружним стрижневим елементом, як і стрижні секцій антени, але з більшим діаметром і поперечним перерізом. Стрижень штанги розташований вертикально, та приєднаний до шарнірних вузлів першої та вісімнадцятої секцій за допомогою жорсткого шарніру у верхньому вузлі та шарніру ковзання у нижньому вузлі. Шарнір ковзання забезпечує переміщення точки одного тіла вздовж поздовжньої осі другого тіла. Вектор ступенів свободи шарніра ковзання (6) містить параметр ковзання, його похідну за часом та вектор параметрів Лагранжа. Перші три параметри Лагранжа представляють сили ковзання в глобальній системі координат, а останні три параметри є моментами ковзання відносно осей глобальної системи координат.

$$q = [s \ \dot{s} \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \ \lambda_5 \ \lambda_6]. \quad (6)$$

Вектори положення мають наступний вигляд:

$$x^i = [x_1^i \ x_2^i \ x_3^i]^T, \quad x^j = [x_1^j \ x_2^j \ x_3^j]^T. \quad (7)$$

де  $x^i$  – вектор положення умовного  $i$ -го тіла,  $x^j$  – вектор положення умовного  $j$ -го тіла, а  $x_1, x_2, x_3$  – три координати цих векторів відповідно.

При ініціалізації одиничні вектори глобальної системи координат переходять в локальну систему координат кожного тіла, таким чином отримуються вектори  $v_1^i, v_2^i, v_3^i$  для першого тіла і  $v_1^j, v_2^j, v_3^j$  для другого тіла. Рівняння обмежень переміщення та прискорення відповідно (8) мають вигляд:

$$\begin{bmatrix} r^i(x^i) - r^j(x^j) \\ \frac{\partial r^j(x^j)}{\partial x_1^j} \lambda \\ v_2^j v_3^i \\ v_3^j v_1^i \\ v_2^j v_1^i \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial r^i(x^i)}{\partial t} - \frac{\partial r^j(x^j)}{\partial t} - \frac{\partial r^j(x^j)}{\partial x_1^j} \dot{s} \\ \frac{\partial r^j(x^j)}{\partial x_1^j} \lambda \\ \dot{v}_2^j v_3^i + v_2^j \dot{v}_3^i \\ \dot{v}_3^j v_1^i + v_3^j \dot{v}_1^i \\ \dot{v}_2^j v_1^i + v_2^j \dot{v}_1^i \end{bmatrix} = 0. \quad (8)$$

Моделювання сіток антени гнучкими стрижневими елементами призводить до великих витрат часу, тому стягуючі зусилля, які створює натягнута сітка, моделюються за допомогою пружин. Подовження пружини визначається наступним чином (9):

$$\Delta x = (p^{(1)} - p^{(2)})^T \bar{d} - l_0, \quad (9)$$

Де  $l_0$  – початкова довжина пружини;  $p^{(1)} = [p_x^{(1)} \ p_y^{(1)} \ p_z^{(1)}]^T$  та  $p^{(2)} = [p_x^{(2)} \ p_y^{(2)} \ p_z^{(2)}]^T$  – координати точок кріплення кінців пружини;  $\bar{d}$  – вектор напрямку (10), який визначається наступним чином:

$$\bar{d} = \frac{p^{(1)} - p^{(2)}}{\sqrt{(p_x^{(1)} - p_x^{(2)})^2 + (p_y^{(1)} - p_y^{(2)})^2 + (p_z^{(1)} - p_z^{(2)})^2}}. \quad (10)$$

точок прискорення:  $\dot{p}^{(1)} = [\dot{p}_x^{(1)} \ \dot{p}_y^{(1)} \ \dot{p}_z^{(1)}]^T$ ;  $\dot{p}^{(2)} = [\dot{p}_x^{(2)} \ \dot{p}_y^{(2)} \ \dot{p}_z^{(2)}]^T$ .

Результуюча сила пружини (11) визначається наступним чином:

$$f = k\Delta x + dv, \quad (11)$$

де  $d$  – коефіцієнт демпфування;  $v = (\dot{p}^{(1)} - \dot{p}^{(2)})^T \bar{d}$  – швидкість пружини.

Трос, за допомоги якого розгортаються секції опорного кільця антени, як самостійний об'єкт не моделюється. Замість цього визначаються зусилля, з якими трос діє на відповідні шкві в міжсекційних шарнірних вузлах та в шарнірах V-подібного складання горизонтальних стрижнів. Тросовий привід розгортання моделюються як навантаження, що діють на відповідні елементи у визначених локальних положеннях.

#### IV. ПОЧАТКОВІ ДАНІ

При моделюванні антени використано початкові данні, що наведені в таблиці 1.

ТАБЛИЦЯ I. ПАРАМЕТРИ АНТЕНИ

Назва	Значення	Одиниці виміру
Велика піввісь еліпсу антени	3.5184	М
Мала піввісь еліпсу антени	3.2856	М
Висота секції антени	0.63	М
Довжина діагонального стрижня	0.4275	М
Зовнішній діаметр діагонального стрижня	0.01	М
Внутрішній діаметр діагонального стрижня	0.00915	М
Довжина горизонтального стрижня	0.2889	М
Зовнішній діаметр горизонтального стрижня	0.012	М
Внутрішній діаметр горизонтального стрижня	0.01115	М
Довжина вертикального стрижня	0.2889	М
Зовнішній діаметр стрижня штанги	0.06	М
Внутрішній діаметр стрижня штанги	0.058	М
Модуль Юнга стрижнів	120	ГПа
Щільність стрижнів	1800	кг / м <sup>3</sup>
Коефіцієнт Пуассона стрижнів	0.3	-
Коефіцієнт демпфування стрижнів	0.001	-
Щільність жорстких тіл	13975.497	кг / м <sup>3</sup>
Точкова маса кожної секції	0.0198	кг
Жорсткість пружин	0.001	Н / м
Демпфування пружин	0.01	Н · м / с <sup>2</sup>
Довжина спокою пружин	0.7116	М

#### V. СТВОРЕННЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ МОДЕЛІ

В цей час найбільш досконалими засобами з відкритим кодом для моделювання динаміки зв'язаних жорстких і пружних тіл є наступні програмні пакети: MBDyn [12], HotInt [13] та FreeDyn [20]. Серед цих пакетів тільки HotInt використовує методологію абсолютних вузлових координат, тому саме він використаний для моделювання розгортання антени.

Процес моделювання опорного кільця антени починається із створення текстових скрипт-файлів з командами для програмного пакету HotInt. Існує головний файл, у якому описуються матеріали конструкції та формується модель першої секції кільця антени. Модель кожної іншої секції антени задається в окремому файлі. Усі

файли підключаються до головного за допомоги команди Include. Код для кожної секції складається з окремих блоків, в яких описуються окремі елементи, та створюється за описаним далі алгоритмом.

Спочатку описуються параметри матеріалів та поперечних перерізів. Далі задаються координати кожного необхідного нам вузла та вектори нахилу секції відносно вибраних осей координат. Для задання стрижня потрібно визначити два вектори нахилу  $r_{\eta}^{(k)}$  і  $r_{\zeta}^{(k)}$ , де  $k=1..18$  - номер секції. У випадку задання горизонтального стрижня перший вектор нахилу однаковий для всіх секцій, тому що він паралельний осі Z глобальної системи координат та дорівнює одиничному вектору з координатами  $r_{\eta}^{(k)} = [0; 0; 1]$ . Другий вектор нахилу, що перпендикулярний площині секції, знайдемо його як векторний добуток двох векторів:

$$r^{(k)} = (R_1^{(k)} - R_2^{(k)}) \times (R_1^{(k)} - R_3^{(k)}), \quad (12)$$

де  $R_1^{(k)}$  - координати першого вузла горизонтального верхнього стрижня k-тої секції,  $R_2^{(k)}$  - координати третього вузла горизонтального верхнього стрижня k-тої секції,  $R_3^{(k)}$  - координати третього вузла горизонтального нижнього стрижня k-тої секції. Оскільки вектор нахилу має бути одиничним вектором, виконаємо нормування вектору (12) наступним чином

$$r_{\zeta}^{(k)} = \left( \frac{r_x^{(k)}}{\|r^{(k)}\|_2}, \frac{r_y^{(k)}}{\|r^{(k)}\|_2}, \frac{r_z^{(k)}}{\|r^{(k)}\|_2} \right), \quad (13)$$

де  $\|r^{(k)}\|_2$  - евклідова норма вектору  $r^{(k)}$ ;  $r_x^{(k)}$ ;  $r_y^{(k)}$ ;  $r_z^{(k)}$  - координати вектору  $r^{(k)}$ .

Для задання діагонального стрижня теж потрібні два вектор нахилу, перший з яких дорівнює (13), а другий визначається також через векторний добуток:

$$d^{(k)} = (D_1^{(k)} - D_2^{(k)}) \times (D_1^{(k)} - D_3^{(k)}), \quad (14)$$

де  $D_1^{(k)} = R_1^{(k)}$  - координати першого вузла горизонтального верхнього стрижня k-тої секції,  $D_2^{(k)} = R_3^{(k)}$  - координати третього вузла горизонтального нижнього стрижня, а  $D_3^{(k)} = D_2^{(k)} + r_{\zeta}^{(k)}$  - сума координат третього вузла горизонтального нижнього стрижня та координат горизонтального вектору нахилу відповідного стрижня k-тої секції. Координати вектору нахилу для діагонального стрижня k-тої секції визначаються шляхом нормування вектору (14):

$$r_{\eta}^{(k)} = \left( \frac{d_x^{(k)}}{\|d^{(k)}\|_2}, \frac{d_y^{(k)}}{\|d^{(k)}\|_2}, \frac{d_z^{(k)}}{\|d^{(k)}\|_2} \right), \quad (15)$$

де  $\|d^{(k)}\|_2$  - евклідова норма вектору  $d^{(k)}$ ;  $d_x^{(k)}$ ;  $d_y^{(k)}$ ;  $d_z^{(k)}$  - координати вектору  $d^{(k)}$ .

З використанням цих векторів нахилу (13) та (15), а також координат положення створюються вузли. Послідовність вибору вузлів для подальшого створення пружних стрижнів визначає напрямки локальних координат цих стрижнів.

Для створення жорстких елементів задаються координати положення центру мас та задається кути орієнтації цих елементів. Для задання точкової маси необхідні лише її координати положення та сам параметр маси.

При створенні шарнірів обертання та шарнірів, що можна налаштувати спочатку визначається вісь, навколо якої дозволено обертання. Для фіксованого шарніру цей параметр визначити не потрібно. Для будь-яких шарнірів завжди потрібно визначити які два елементи з'єднуються, а також розташування шарніру в локальних системах координат кожного елемента, що з'єднується. Визначення положення шарнірів в локальних координатах кожного елемента, які він з'єднує важливе, адже елементи з'єднуюватимуться саме в тих точках, де знаходиться шарнір.

Створення пружин починається з вибору їх довжин, жорсткості та демпфування, а вже потім визначаються елементи, які пружини буде з'єднувати. Приклад коду для створення пружин наведений у додатку.

Для керування розгортанням або згортанням антени створюються елементи керування. Задання навантажень, що потрібні для розкриття антени починається з визначення напрямку дії навантаження та положення в локальних координатах елемента, до якого навантаження буде прикладено. Якщо навантаженням потрібно керувати в процесі розгортання, тоді далі у блоці опису навантаження вказується необхідний елемент керування, який потрібно створити раніше. Далі навантажень прикладаються до вибраних елементів за допомогою окремої команди.

Для отримання результатів розрахунків потрібно створити датчики, які будуть вимірюватимуть необхідні величини. Для цього потрібно задати елементи, з яких будуть зчитуватись дані, та вибрати параметри, які необхідно вимірювати. Приклад коду для створення сенсору який вимірює подовження пружини наведений у додатку.

На рис. 8 зображена перша секція рефлектора та локальні координатні осі кожного елемента, що описується у системі HotInt. На цьому рисунку цифрами позначено наступне: 1 - пружний елемент стрижня, 2 - шарнір обертання, 3 - універсальний шарнір.

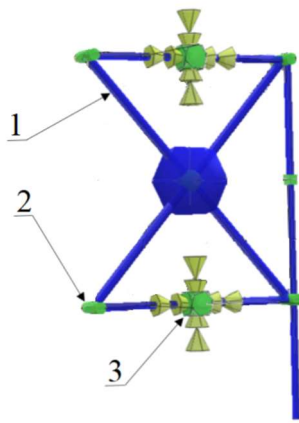


Рис.8 Модель першої секції антени

Модель повної антени із вісімнадцяти секцій зі стягуючими ці секції пружинами показано на рис. 9.

Для моделювання саме процесу розгортання отриманої моделі потрібно отримати початкові умови – вектор стану антени у складеному стані. Початкові умови отримуються шляхом докладання рівномірних навантажень у точки між горизонтальними стрижнями кожної секції для складання кільця антени до необхідного складеного стану. Отриманий в результаті складання антени вектор стану вважається початковими умовами для моделювання її розгортання. Результати моделювання процесу розгортання антени показані послідовно на рис. 9, де рис. 9а – антена у складеному стані, рис. 9б та рис. 9в – антена в процесі розгортання, та рис. 9г – антена в розгорнутому стані

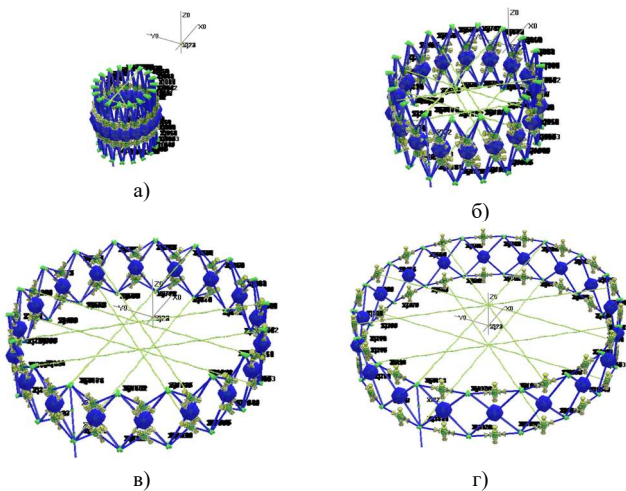


Рис.9 Стани антени при її розгортанні

Для розкладання кільця антени із отриманого складеного стану використано ті ж самі рівномірні навантаження докладені у ті ж самі вузли, але у протилежному напрямку.

Кожний створений елемент системи має певний набір власних рівнянь, вид яких обумовлений типом заданого елемента. У результаті моделювання *HotInt* формує систему диференціальних та алгебраїчних рівнянь та рівнянь. Рівняння динаміки антени у загальному виді виглядає так:

$$M(X,t)\ddot{X} + D(X, \dot{X}, T) + C(X,t) + \Phi_X \Lambda = V(t) \quad (16)$$

$$\Phi(X) = 0, \quad (17)$$

де  $M(X,t)$  – матриця мас;  $D(X, \dot{X}, T)$  – вектор, що містить демпфуючі члени;  $C(X,t)$  – вектор, що представляє жорсткість системи;  $V(t)$  – вектор неконсервативних узагальнених сил, викликаних дією приводів і збурень;  $\Phi(X)$  – кінематичні обмеження;  $\Phi_X$  – матричний Якобіван обмежень;  $\Lambda$  – вектор множників Лагранжа.

Для чисельного розв'язання рівнянь (16) у *HotInt* є внутрішній інструмент чисельного інтегрування – розв'язувач. Чисельне розв'язання виконується за допомогою неявних схем Рунге-Кутти. Різні схеми Рунге-Кутти реалізуються таблицями коефіцієнтів, які визначаються за допомогою файлів, які автоматично генеруються за допомогою вбудованих функцій.

## VI. РЕЗУЛЬТАТИ МОДЕЛЮВАННЯ

В цьому розділі представлено результати моделювання розкладання антени, що відрізняється силами прикладаються, а саме: випадок 1 - 0.015 Н, випадок 2 - 0.02 Н та випадок 3 - 0.03 Н. Згідно з результатами моделювання час розкриття антени дорівнює 17.58 сек, 15.06 сек та 12.16 сек, для випадків 1, 2, 3 відповідно. На рис. 10 показана зміна кутів між горизонтальними стрижнями секції протягом розгортання антени. На рис. 11 – 13 чорною кривою позначена зміна напруги у діагональних стрижнях першої секції та червоною кривою – дев'ятої секції під час розкриття антени.

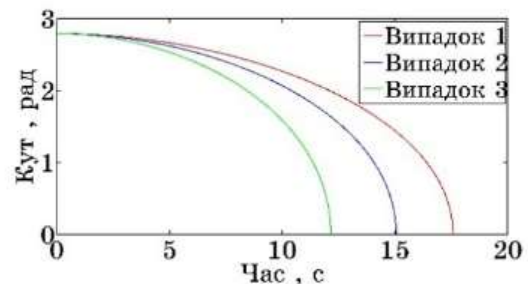


Рис.10 Зміна кутів між горизонтальними стрижнями секції протягом розгортання антени

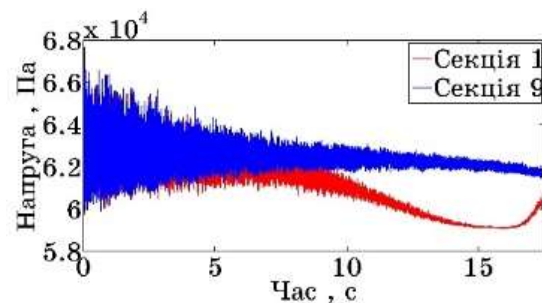


Рис.11 Зміна напруги у діагональних стрижнях секцій антени (випадок 1)

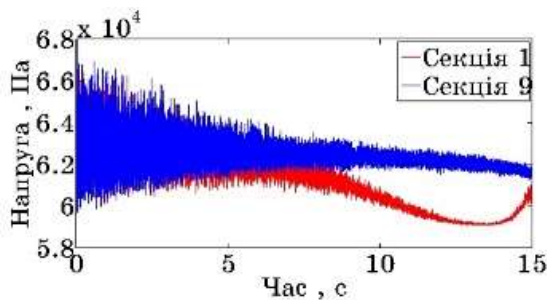


Рис.12 Зміна напруги у діагональних стрижнях секцій антени (випадок 2)

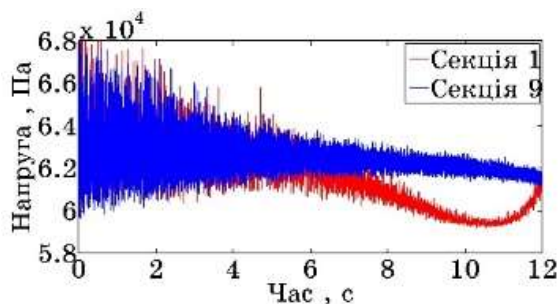


Рис.13 Зміна напруги у діагональних стрижнях секцій антени (випадок 3)

### ВИСНОВКИ

В доповіді розглянуто методологію, що дозволяє використовувати програмні пакети з відкритим кодом для моделювання механічних систем на прикладі моделювання рефлекторної антени, що трансформується. Отримано модель антени космічного застосування, що призначена для моделювання процесу розгортання рефлектора. Проведено моделювання розгортання рефлектора для різних значення сил, що розгортаються, та отримано залежності основних параметрів антени від часу. В моделі застосовано спрощене моделювання тросової системи розгортання антени, тому більш детальне моделювання цієї системи може бути предметом подальших досліджень.

### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Khoroshylov S., Shamakhanov V., Vasyliov V., Modeling of centrifugal deployment of three-section minisatellite boom, Technical mechanics, Vol.4, 2021, Pp.56 – 65.
- [2] Alpatov A., Gusynin V., Belonozhko P. et.al. Shape control of large reflecting structures in space. 62nd International Astronautical Congress, 3–7 October, Cape Town, South Africa, 2011, Pp.5642–5648.
- [3] Alpatov A., Gusynin V., Belonozhko P., Khoroshylov S., Fokov A. Configuration modeling of cable-stayed space reflectors. Proceeding of the 64th International Astronautical Congress. Beijing, China, 2013, Pp.5793–5799.
- [4] Duan B., Zhang Y., Du J. Large Deployable Satellite Antennas: Design Theory, Methods and Applications Springer Nature, 2020, 271 pp.
- [5] Mitsugi J., Ando K., Senbokuya Y., Meguro A., Deployment Analysis Of Large Space Antenna Using Flexible Multibody Dynamic Simulation, Acta Astronautica Vol.47, No.1, 1990, Pp.19-26.
- [6] Tsunoda H., Miyoshi K., Deployment Test Methods for a Large Deployable Mesh Reflector, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol.34, No.6, November–December 1997, Pp.811-816.
- [7] Li T.J., Zhang Y., Li T., Deployment dynamic analysis and control of hoop truss deployable antenna, Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, Vol.30, No.3, 2009, Pp.444–449.

- [8] Li T.J., Deployment analysis and control of deployable space antenna, Aersp. Sci. Technol, Vol.18, No.1, 2012, Pp.42–47.
- [9] Zhangn Y., B. Duan B., Li T.J., A controlled deployment method for flexible deployable space antennas, Acta Astronautica, Vol. 81, No.1, 2012, Pp.19–29.
- [10] Sushko O., Medzmariashvili E., Tserodze S., at al., Design and Analysis of Light-Weight Deployable Mesh Reflector Antenna for Small Multibeam SAR Satellite, EUSAR 2021: Proceedings of the European Conference on Synthetic Aperture Radar, 29 March – 01 April 2021, Pp. 421–423.
- [11] Sushko O., Medzmariashvili E., Filipenko F., at al., Modified design of the deployable mesh reflector antenna for mini satellites, CEAS Space J., Vol.13, No.4, 2021, Pp.533 – 542.
- [12] Masarati P., Morandini M., Quaranta G., Mantegazza P., Computational aspects and recent improvements in the open-source multibody analysis software “MBDyn”, ECCOMAS Thematic Conference, Vol.4, 2005, 1895024.
- [13] Gerstmayr J., Dorninger A., Eder R., at al., HOTINT: A Script Language Based Framework for the Simulation of Multibody Dynamics Systems, ASME IDETC/CIE, Vol. 7B, 2013, V07BT10A047.
- [14] Fraux V., Lawton M., Reveles J. R., You Z., Novel large deployable antenna backing structure concepts for foldable reflectors, CEAS Space J., Vol.5, 2013, Pp.195–201.
- [15] Mikulas M.M., Collins T.J., Hedgepeth J.M., Preliminary design approach for large high precision segmented reflectors, NASA Technical Memorandum 102605, 1990, Pp. 1–51.
- [16] Miura K., Miyazaki Y., Concept of the tension truss antenna, AIAA Journal Vol.28, 1990, Pp.1098–1202.
- [17] Thomson M.W., The Astromesh deployable reflector, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Vol.3, 1999, Pp.1516–1535.
- [18] Sun J., Tian Q., Hu H., Pedersen N., Axially variable-length solid element of absolute nodal coordinate formulation, Acta Mechanica Sinica, Vol.35, 2019, Pp.653 – 663.
- [19] Sautter K., Meßmer M., Teschemacher T., Bletzinger K., Limitations of the St. Venant-Kirchhoff material model in large strain regimes, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.147, 2022, 104207.
- [20] Nachbagaer K., Sherif K., Witteveen W., FreeDyn – A Multibody Simulation Research Code, Proceedings of the 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM) and the 5th European Conference on Computational Mechanics (ECCM), 2014, Pp.49 – 53.

# Загальна крайова задача для рівняння поперечних коливань стрижня

Р.М. Тацій

кафедра прикладної математики і механіки  
ЛДУ безпеки життєдіяльності  
Львів, Україна

О.Ю. Чмир

кафедра прикладної математики і механіки  
ЛДУ безпеки життєдіяльності  
Львів, Україна  
[o\\_chmyr@yahoo.com](mailto:o_chmyr@yahoo.com)

О.О. Карабин

кафедра прикладної математики і механіки  
ЛДУ безпеки життєдіяльності  
Львів, Україна  
[karabynoks@gmail.com](mailto:karabynoks@gmail.com)

М.І. Кусій

кафедра прикладної математики і механіки  
ЛДУ безпеки життєдіяльності  
Львів, Україна  
[kusijmiroslava@gmail.com](mailto:kusijmiroslava@gmail.com)

## The general boundary value problem for the equation of transverse oscillations of a rod

R.M. Tatsij

Department of Applied Mathematics and Mechanics  
Lviv State University of life safety  
Lviv, Ukraine

O. Yu. Chmyr

Department of Applied Mathematics and Mechanics  
Lviv State University of life safety  
Lviv, Ukraine  
[o\\_chmyr@yahoo.com](mailto:o_chmyr@yahoo.com)

O.O. Karabyn

Department of Applied Mathematics and Mechanics  
Lviv State University of life safety  
Lviv, Ukraine  
[karabynoks@gmail.com](mailto:karabynoks@gmail.com)

M.I. Kusij

Department of Applied Mathematics and Mechanics  
Lviv State University of life safety  
Lviv, Ukraine  
[kusijmiroslava@gmail.com](mailto:kusijmiroslava@gmail.com)

**Анотація** – Розглянуто крайову задачу для рівняння поперечних коливань стрижня за умов жорсткого закріплення його кінців та із загально прийнятими початковими умовами. Знайдено розв'язки такої задачі за допомогою концепції квазіпохідних, сучасної теорії систем лінійних диференціальних рівнянь, класичного методу Фур'є та методу редукції.

**Abstract** – The boundary value problem for the equation of transverse oscillations of a rod under conditions of rigid fixation of its ends and with generally accepted initial conditions was considered. The solutions of a such problem were found by using a concept of quasi-derivatives, a modern theory of systems of linear differential equations, the classical Fourier method and a reduction method.

**Ключові слова:** квазидиференціальне рівняння четвертого порядку, крайова задача, матриця Коші, задача на власні значення, метод Фур'є та метод власних функцій.

**Keywords:** fourth-order kvazidifferential equation, the boundary value problem, the Cauchy matrix, the eigenvalues problem, the method of Fourier and the method of eigenfunctions.

### I. ВСТУП

Одним із методів розв'язування нестационарних крайових задач є прямий метод, загальна схема реалізації якого полягає в зведенні вихідної задачі до розв'язування двох простіших, взаємозв'язаних задач та застосуванні схеми Фур'є. Цей метод був розроблений при дослідженні

процесів теплообміну [1] та загальних крайових задач для рівнянь позовдовжніх коливань стрижня [2-4].

Важливу роль в цьому методі відіграє концепція квазіпохідних, яка дозволяє уникнути проблеми множення узагальнених функцій.

В цій роботі вперше використано подібний підхід до дослідження загальних крайових задач для рівняння поперечних коливань стрижня. Слід підкреслити, що в цих задачах за просторовою змінною виникає рівняння в частинних похідних не другого, а четвертого порядку.

## II. ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ, ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ, ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ

Нехай  $E$  – модуль Юнга,  $J$  – момент інерції поперечного перерізу,  $\rho$  – густина матеріалу,  $F$  – площа поперечного перерізу стрижня,  $q(x,t)$  – інтенсивність зовнішнього навантаження.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x,t), \quad x \in (0;l), \quad t \in (0;+\infty) \quad (13)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} w(0,t) = z_{00}(t); & \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = z_{01}(t); \\ w(l,t) = z_{l0}(t); & \frac{\partial w}{\partial x}(l,t) = z_{l1}(t), \end{cases} \quad t \in [0;+\infty) \quad (14)$$

та початковими умовами

$$\begin{cases} w(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \end{cases} \quad x \in [0;l], \quad (15)$$

де  $z_{00}(t)$ ,  $z_{01}(t)$ ,  $z_{l0}(t)$ ,  $z_{l1}(t) \in C^2(0;+\infty)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  – кусково-неперервні на  $(0;l)$ .

Згідно з методом редукції розв'язок задачі (13) - (15) шукаємо у вигляді суми двох функцій

$$w(x,t) = u(x,t) + v(x,t). \quad (16)$$

Визначимо функцію  $u(x,t)$  як розв'язок крайової квазістатичної задачі

$$(a_0(x)u''(x,t))'' = 0, \quad (17)$$

$$\begin{cases} u(0,t) = z_{00}(t); & \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = z_{01}(t); \\ u(l,t) = z_{l0}(t); & \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = z_{l1}(t) \end{cases} \quad t \in [0;+\infty), \quad (18)$$

де  $a_0(x) \equiv EJ$ .

В основі методу розв'язування задачі (17), (18) лежить концепція квазіпохідних [5].

Запишемо мішану задачу для функції  $v(x,t)$ , враховуючи, що функція  $u(x,t)$  задовольняє (17)-(6)

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \left( a_0(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x,t) - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (19)$$

$$x \in (0;l), \quad t \in (0;+\infty),$$

$$\begin{cases} v(0,t) = 0; & \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0; \\ v(l,t) = 0; & \frac{\partial v}{\partial x}(l,t) = 0 \end{cases} \quad t \in [0;+\infty), \quad (20)$$

$$\begin{cases} v(x,0) = \Phi_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \Phi_1(x), \end{cases} \quad x \in [0;l], \quad (21)$$

де  $\Phi_0(x) \stackrel{def}{=} \varphi(x) - u(x,0)$ ,  $\Phi_1(x) \stackrel{def}{=} \psi(x) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ .

Для розв'язання задачі (22) - (23) застосовано модифікований метод власних функцій [4].

## ВИСНОВКИ

Розв'язана загальна крайова задача для рівняння поперечних коливань стрижня за умов жорсткого закріплення його кінців. При розв'язанні розвинута схема прямого методу, який ґрунтується на концепції квазіпохідних, сучасній теорії систем диференціальних рівнянь, модифікованому методу власних функцій Фур'є.

Такий підхід, без особливих труднощів, поширюється на випадки будь-яких інших умов закріплень кінців стрижнів.

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Tatsii, R.M., Stasyuk, M.F. & Pazen, O.Y. Direct Method of Calculating Nonstationary Temperature Fields in Bodies of Basic Geometric Shapes. *J Eng Phys Thermophy* 94, 298–310 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10891-021-02302-z>
- [2] Тацій Р.М., Карабин О.О., Чмир О.Ю. Схема дослідження позовдовжніх коливань стрижня з чотирьох кусків кусково-сталого перерізу (The scheme for investigation for longitudinal oscillations of rod of a piecewise-constant section) // Збірник наукових праць ДОРОГИ І МОСТИ. – 2019. – № 19. – С. 151 – 166. DOI: 10.36100/dorogimosti2019.19.149.
- [3] Тацій Р.М., Карабин О.О., Чмир О.Ю. Загальні крайові задачі для моделювання позовдовжніх коливань стрижня // Прикладні питання математичного моделювання. – 2020. – Т. 3. № 1. – С. 194 – 206.
- [4] Tatsij R, Karabyn O., Chmyr O., Malets I., Smotr O. General Scheme of Modeling of Longitudinal Oscillations in Horizontal Rods // International Scientific Conference “Intellectual Systems of Decision Making and Problem of Computational Intelligence”. *Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies* book series. Vol. 77. P. 789-802. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-82014-5\\_54](https://doi.org/10.1007/978-3-030-82014-5_54).
- [5] Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, В. Мазуренко, О.О. Власій - Дрогобич. Коло, 2011. - 297 с.

# Аналіз Ефективності Застосування Високопродуктивних Реалізацій Дискретного Вейвлет-Перетворення Добеші для Цифрової Обробки Одновимірних Сигналів

Артем Ізмайлов

кафедра комп'ютерних наук та інформаційних систем  
Прикарпатський національний університет  
Івано-Франківськ, Україна  
artem.v.izmailov@gmail.com

## Effectiveness Analysis of High-Performance Implementations of Discrete Daubechies Wavelet Transform for Digital Processing of One-Dimensional Signals

Artem Izmailov

dept. of Computer Science and Information Systems  
Precarpathian National University  
Ivano-Frankivsk, Ukraine  
artem.v.izmailov@gmail.com

**Анотація**—Здійснено оцінку ефективності застосування високопродуктивних реалізацій дискретного вейвлет-перетворення Добеші на основі різних технологій для аналізу фрактальних одновимірних сигналів. На основі критерію часу реалізації перетворення та тестової послідовності Matlab vonkoch доведена доцільність застосування високопродуктивної реалізації засобами OpenMP для обробки фрактальних даних більшої розмірності.

**Abstract**—Application efficiency of high-performance implementations of the discrete Daubechies wavelet transform for analysis of fractal one-dimensional signals is estimated. The application advantage of the OpenMP high-performance implementation is proved for processing multi-dimensional fractal data based on the transformation implementation time criterion and the Matlab vonkoch test sequence.

**Ключові слова**—цифрова обробка сигналів; високопродуктивні обчислення; дискретне вейвлет-перетворення Добеші

**Keywords**—digital signal processing; high-performance computations; discrete Daubechies wavelet transform

### I. ВСТУП

Загальне збільшення часової складності виробничих задач, які розв'язуються із залученням засобів цифрової техніки, зумовило підвищення попиту на високопродуктивні реалізації процедур цифрової обробки сигналів (ЦОС) [1–6]. Наприклад, рішення для обробки одновимірних сигналів на основі дискретних вейвлет-перетворень (ДВП) [1, 4] можуть бути масштабовані у двовимірний простір і застосовуватись для обробки зображень [1, 5, 6], що, однак, може спричинити різке зниження рівня швидкодії рішень, які для одновимірних сигналів мали задовільний рівень продуктивності [1–3]. Тому актуальним завданням є створення високопродуктивних рішень на основі ДВП для обробки одновимірних сигналів з метою їх подальшого масштабування на багатовимірні задачі [1–3, 5, 6].

Аналіз останніх досліджень вказує на те, що для ДВП на основі вейвлетів Добеші (які мають ряд унікальних властивостей [1]) запропоновано високопродуктивні



реалізації [2–4], які однак не містять досліджень щодо ефективності застосування високопродуктивних реалізацій на основі різних технологій для аналізу фрактальних сигналів.

Метою дослідження є оцінка ефективності застосування високопродуктивних реалізацій ДВП Добеші на основі різних технологій для аналізу фрактальних сигналів.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в успішній оцінці ефективності застосування високопродуктивних реалізацій ДВП Добеші на основі різних технологій для аналізу фрактальних сигналів, що вказало на перспективність подальшої розробки відповідних засобів ЦОС для аналізу багатовимірних фрактальних структур.

## II. ОСНОВНА ЧАСТИНА

Високопродуктивні реалізації тих чи інших процедур ЦОС полягають у розпаралелюванні відповідних обчислювальних процедур, зокрема тих, які містять у собі цикли [4, 6]. Для таких задач використовують такі бібліотеки, як OpenMP та C++ Thread Support Library [4, 7, 8]. Оскільки обидві бібліотеки працюють із C++, то для порівняння ефективності послідовну реалізацію усіх процедур ДВП здійснено також на C++.

У якості тестового сигналу обрано Matlab vonkoch, який складається з 8192 відліків та містить у собі реалізацію кривої Коха, яка є фракталом (рис. 1).

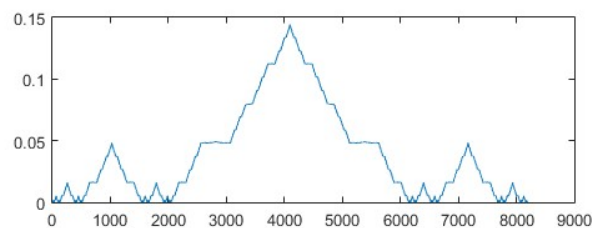


Рис. 2. Графік тестового сигналу Matlab vonkoch

Для порівняння ефективності високопродуктивних реалізацій обрано фільтрову форму ДВП Добеші 4-го порядку (db4) з довжиною фільтрів рівною 8. Порівняння ефективності реалізовано за критерієм часу, затраченого на виконання перетворення окремо для процедур декомпозиції та реконструкції сигналу (таблиця 1). Також, для порівняння ефективності використано, як оригінальний сигнал Matlab vonkoch, так і його періодичні продовження різної довжини. В усіх випадках похибка відновлення даних не перевищила 0.0001.

TABLE I. СЕРЕДНІЙ ЧАС ВИКОНАННЯ ОПЕРАЦІЙ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ТА РЕКОНСТРУКЦІЇ СИГНАЛІВ ПОСЛІДОВНОЮ ТА ВИСОКОПРОДУКТИВНИМИ РЕАЛІЗАЦІЯМИ ДИСКРЕТНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ ДОБЕШІ DV4 У ФІЛЬТРОВІЙ ФОРМІ

Сигнал	Середній час на виконання операцій, мс					
	Послідовна реалізація засобами C++		Високопродуктивна реалізація засобами OpenMP (C++)		Високопродуктивна реалізація засобами C++ Thread Library	
	Декомпозиція	Реконструкція	Декомпозиція	Реконструкція	Декомпозиція	Реконструкція
vonkoch (8192 відліки)	0.014099	0.014791	0.011373	0.007491	0.225965	0.199314
vonkoch (16 384 відліки)	0.033447	0.038841	0.052711	0.071274	0.873965	0.68609
vonkoch (32 768 відліків)	0.076029	0.06626	0.038323	0.034752	1.542051	0.478993
vonkoch (65 536 відліків)	0.238184	0.25665	0.40652	0.183394	0.825797	0.412748

## ВИСНОВКИ

Результати проведених досліджень (таблиця 1) вказали, що для аналізу більшості сигналів ефективнішою у 1,2-2,5 рази є реалізація засобами OpenMP, причому різниця зростає із ростом довжини сигналу. Це вказує на перспективність застосування високопродуктивних реалізацій ДВП Добеші на основі OpenMP для аналізу багатовимірних фрактальних структур.

Подальші дослідження полягають у розробці та аналізі ефективності високопродуктивних реалізацій ДВП призначених для виконання на графічних ядрах (GPU).

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

[1] T. Guo, T. Zhang, E. Lim, M. López-Benítez, F. Ma and L. Yu, "A Review of Wavelet Analysis and Its Applications: Challenges and Opportunities," in IEEE Access, vol. 10, pp. 58869-58903, 2022, doi: 10.1109/ACCESS.2022.3179517

[2] M. M. Hasan and K. A. Wahid, "Low-Cost Lifting Architecture and Lossless Implementation of Daubechies-8 Wavelets," in IEEE

Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 65, no. 8, pp. 2515-2523, Aug. 2018, doi: 10.1109/TCSI.2018.2799006.

[3] B. Mazzoni, S. Benatti, L. Benini and G. Tagliavini, "Efficient Transform Algorithms for Parallel Ultra-Low-Power IoT End Nodes," in IEEE Embedded Systems Letters, vol. 13, no. 4, pp. 210-213, Dec. 2021, doi: 10.1109/LES.2021.3065206.

[4] U. Khamdamov and H. Zaynidinov, "Parallel Algorithms for Bitmap Image Processing Based on Daubechies Wavelets," 2018 10th International Conference on Communication Software and Networks (ICCSN), 2018, pp. 537-541, doi: 10.1109/ICCSN.2018.8488270.

[5] A. Izmailov, "Symmetric Ternary Wavelet Transform and Its Application in Digital Information Processing," 2019 IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), Lviv, Ukraine, 2019, P. 1127-1132. doi:10.1109/UKRCON.2019.8879808

[6] Y. Wang, C. Li, C. Liu, et al, "Advancing DSP into HPC, AI, and beyond: challenges, mechanisms, and future directions," in CCF Trans. HPC 3, pp. 114-125, 2021.

[7] R. Robey and Y. Zamora, Parallel and High Performance Computing, Manning Publications Co., 2021.

[8] M. Klemm and J. Cownie, High Performance Parallel Runtimes, De Gruyter Oldenbourg, 2021.

## ЗМІСТ

<b>ОПТИМІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ БЕЗПЕКИ ТОРГОВЕЛЬНО-РОЗВАЖАЛЬНИХ КОМПЛЕКСІВ НА ОСНОВІ АНАЛІЗУ МОДЕЛЕЙ ВИЗНАЧЕННЯ РИЗИКУ</b> .....	ПОМИЛКА! ЗАКЛАДКУ НЕ ВИЗНАЧЕНО.
Василь Бегун Олексій Волошин Сергій Бегун	
<b>ДО ПИТАННЯ СПІЛЬНОЇ ОБРОБКИ ЗНІМКІВ ЗЕМНОЇ ПОВЕРХНІ, ОТРИМАНИХ АПАРАТУРОЮ ДИСТАНЦІЙНОГО ЗОНДУВАННЯ ЗЕМЛІ</b> .....	7
ІВАН ВАРАВА, Микола ФЕСЕНКО, Юлія ПИСАРЕНКО, Ольга Гульчак	
<b>METHOD OF SEGMENTATION OF AIR OBJECTS IN VIDEO</b> .....	11
VALENTYN YESILEVSKYI, ANTON KOLIADIN, OLENA SEREDA	
<b>ОСОБЛИВОСТІ ІНФОРМАЦІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ У СУЧАСНІЙ СИСТЕМІ ОСВІТИ</b> .....	16
СВІТЛАНА КОЗИРЕНКО	
<b>ДОСВІД ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ З МЕТОЮ ПІДВИЩЕННЯ ЯКОСТІ ОСВІТИ ПРИ ВИВЧАННІ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН</b> .....	18
ОЛЕКСАНДРА ЛИТВИН, НАТАЛІЯ МАНЧИНСЬКА	
<b>ВИКОРИСТАННЯ МОЖЛИВОСТЕЙ ХМАРНИХ СЕРВІСІВ В ОНЛАЙН НАВЧАННІ У ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ</b> .....	21
НАТАЛІЯ МАНЧИНСЬКА, ОЛЕКСАНДРА ЛИТВИН, ОЛЬГА МАТВІЄНКО	
<b>ЗАСТОСУВАННЯ МАШИННОГО НАВЧАННЯ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ ПОКАЗНИКА ХЕРСТА</b> .....	24
ЛЮДМИЛА КІРІЧЕНКО, КИРИЛО ПАВЛЕНКО	
<b>ЗАСТОСУВАННЯ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ КРАДІЖОК У МАГАЗИНАХ</b> .....	28
ЛЮДМИЛА КІРІЧЕНКО, BOHDAN SYDORENKO	
<b>ГРАФИ В РОЗВ'ЯЗАННІ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ</b> .....	33
ОЛЕКСАНДР ШАМШИН	
<b>RECOGNITION OF COMPUTED TOMOGRAPHY IMAGES USING NEURAL NETWORKS FOR THE DIFFERENTIAL DIAGNOSIS OF MALIGNANT LUNG TUMORS AND CORONAVIRUS PNEUMONIA</b> .....	37
OLEXANDR SHPAK, MYKOLA STAROSTA, EVELINA KHOMA	
<b>СИСТЕМА РОЗПІЗНАВАННЯ ЛЮДСЬКОЇ ПОСТАВИ ДЛЯ ПРОФІЛАКТИКИ ЗАХВОРЮВАНЬ ОПОРНО-РУХОВОГО АПАРАТУ</b> .	39
ЮРІЙ ШПАКОВИЧ, МАРІЯ СЕМАНЬКІВ	
<b>РОЗПІЗНАВАННЯ ЕМОЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ НЕЙРОННОГО КЛАСИФІКАТОРА</b> .....	41
КАТЕРИНА ЮВЧЕНКО, ВАЛЕНТИН ЄСІЛЕВСЬКИЙ, ОЛЕНА СЕРЕДА	
<b>ПІДВИЩЕННЯ НАДІЙНОСТІ СИГНАЛІВ У ЦИФРОВИХ ЛІНІЯХ ЗВ'ЯЗКУ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ МОНІТОРИНГУ</b> .....	44
АРТЕМ БАСЬКО, ОЛЕНА ПОНОМАРЬОВА	
<b>СИСТЕМА ОПРАЦЮВАННЯ RTSP ПОТОКУ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ</b> .....	47
ВІТАЛІЙ ВЕРЕТЕЛЬНИК, МИРОСЛАВ ГАВРИЛЮК	
<b>НОВИЙ МЕТОД ОТРИМАННЯ КОНТУРІВ ЗОБРАЖЕНЬ</b> .....	57
ЯРОСЛАВ ЛУЦ	
<b>КОМПЛЕКСНІ ПІДХОДИ ТА МОДЕЛІ ДЛЯ КОДУВАННЯ ТА ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ</b> .....	60
ВАСИЛЬ ЛУЦ	
<b>СПРОЩЕННЯ РЕАЛІЗАЦІЇ РЕКУРЕНТНИХ ЛОГАРИФМІЧНИХ АНАЛОГО-ЦИФРОВИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ</b> .....	63
ЗИНОВІЙ МИЧУДА, ЛЕСЯ МИЧУДА, ГАННА ЄЛІСЕВА	
<b>МОДИФІКАЦІЯ ЦИКЛІЧНИХ КОДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ОПЕРАЦІЇ ПЕРФОРАЦІЇ</b> .....	66
ВАСИЛЬ СЕМЕРЕНКО, ОЛЕКСАНДР ВОЙНАЛОВИЧ	
<b>ВІДНОВЛЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ БЕЗ ЯВИЩА ГІББСА З ВИКОРИСТАННЯМ СПЛАЙНІВ ТА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ СУМ ФУР'Є</b> .....	68
ОЛЕГ М. ЛИТВИН, ОЛЕГ О. ЛИТВИН, ОЛЕКСАНДРА ЛИТВИН, НАТАЛІЯ МАНЧИНСЬКА	

<b>РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НАУКОВИХ ТЕКСТІВ ШЛЯХОМ РОЗДІЛЕННЯ СУМІШЕЙ ЙМОВІРНІСНИХ РОЗПОДІЛІВ .....</b>	<b>74</b>
КАТЕРИНА СТЕЦУН_НАДІЯ ГИБКІНА_МАКСИМ ШПАКОВИЧ	
<b>THEORIES OF EVERYTHING AND SYSTEM PROBLEMS OF COMPUTING SCIENCE .....</b>	<b>77</b>
ТРОКНІМЧУК РЕТРО Р	
<b>AN ASSESSMENT OF THE QUALITY OF FEATURE SPACE IN DATA MINING PROBLEMS AND A METHODOLOGY OF SCIENTIFIC COGNITION .....</b>	<b>81</b>
МАКСИМ ПОЛЯКОВ_ГЕННАДІЙ ШЕВЧЕНКО_ВОЛОДИМІР БІЛОЗУБЕНКО	
<b>DEEP LEARNING FOR DETERMINATION OF THE ION BEAM IMPACT ON A SPACE DEBRIS OBJECT.....</b>	<b>84</b>
МУКНАЙЛО РЕДКА Д_СЕРГІЙ КХОРОШЫЛОВ	
<b>DATABASE STRUCTURE FOR MEDICAL DATA PROTECTION BASED ON BLOCKCHAIN .....</b>	<b>90</b>
YURII BARYSHEV_VLADYSLAVA LANOVA	
<b>ADVANCED DATA ENCRYPTION METHOD BASED ON THE MONOCHROME PIXEL ALPHABET .....</b>	<b>92</b>
OLEKSII SAMCHYSHYN_OLEKSANDR LAHODNYI_ANATOLIY ZHUKOV_IRINA KOSHEVA	
<b>УТОЧНЕНИЙ МЕТОД ПОШУКУ НЕМОЖЛИВИХ ДИФЕРЕНЦІАЛІВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ДО ШИФРУ QALQAN .....</b>	<b>94</b>
ВЛАДИСЛАВ ДРАГА, СЕРГІЙ ЯКОВЛІВ, ГАННА ЮЖАКОВА	
<b>ІНТЕРВАЛЬНА НЕЧІТКА МОДЕЛЬ ОЦІНЮВАННЯ РІВНЯ ЗАХИЩЕНОСТІ КОМП'ЮТЕРНОЇ СИСТЕМИ .....</b>	<b>97</b>
НАТАЛІЯ КОНДРАТЕНКО_АЛІНА ОСТАПЕНКО-БОЖЕНОВА	
<b>АЛГОРИТМ ШИФРУВАННЯ ЗІ ЗМЕНШЕННЯМ ДОВЖИНИ КЛЮЧА ДЛЯ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ БПЛА .....</b>	<b>99</b>
МАКСИМ ОГУРЦОВ	
<b>МЕТОДИКА ОЦІНЮВАННЯ СТІЙКОСТІ SP-МЕРЕЖ ДО УЗАГАЛЬНЕНОГО ЛІНІЙНОГО КРИПТОАНАЛІЗУ .....</b>	<b>104</b>
АНАСТАСІЯ ТАФТАЙ, СЕРГІЙ ЯКОВЛІВ, ГАННА ЮЖАКОВА	
<b>ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МОДИФІКАЦІЙ КРИПТОСИСТЕМИ AJP8-1 ШЛЯХОМ ЗМІНИ МОДУЛЯ .....</b>	<b>108</b>
ДАРІЯ ЯДУХА	
<b>КРИПТОГРАФІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЙ, ЯКІ АПРОКСИМУЮТЬ ДОДАВАННЯ ЗА МОДУЛЕМ.....</b>	<b>112</b>
СЕРГІЙ ЯКОВЛІВ	
<b>СУЧАСНІ ХМАРНІ КОНЦЕПЦІЇ, ТЕХНОЛОГІЇ, ЗАСТОСУНКИ, СЕРВІСИ ТА ПЛАТФОРМИ.....</b>	<b>116</b>
ВАСИЛЬ ГОРБАЧУК_ВАДИМ БОЛЬШАКОВ_СЕРГІЙ ГАВРИЛЕНКО_МИХАЙЛО ПУСТОВОЙТ	
<b>РЕАЛІЗАЦІЯ АСОЦІАТИВНОЇ ПАМ'ЯТІ НА ПЛІС .....</b>	<b>131</b>
ВОЛОДИМИР ГРИГА_СТЕПАН МЕЛЬНИЧУК, ІРИНА МАНУЛЯК_БОГДАН БАБІЙ, ЮРІЙ ПОЧАНІН_МИХАЙЛО ГУМЕНИЦЬКИЙ	
<b>ЛАЗЕРНИЙ АКСЕЛЕРОМЕТР .....</b>	<b>136</b>
ПАНАСЮК ЮРІЙ_ГУЛЬЧАК ОЛЬГА_ТЕТЯНА ЧОБОТОК_СЕРГІЙ ІОВОВ	
<b>ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ АВТОМАТИЗАЦІЇ УПРАВЛІННЯ ЗБОРОМ ТА ТРАНСПОРТУВАННЯМ ВІДХОДІВ У МІСТІ.....</b>	<b>139</b>
ІВАН ВАРАВА_АННА ОСТАПЕНКО_НАДІЯ ЧУМАКОВА_ВОЛОДИМИР МАЛАЧИНСЬКИЙ	
<b>МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНОГО ПРОЦЕСУ У БАГАТОСКЛАДОВИХ СИСТЕМАХ ГРУПОВИХ МАШИНИХ АГРЕГАТІВ.....</b>	<b>142</b>
ІВАН ВАРАВА_ВАЛЕРІЙ ПИСАРЕНКО_ВОЛОДИМИР КРАСНОШАПКА_МИКОЛА ФЕСЕНКО	
<b>ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ ФУНКЦІЇ ГРІНА ДВОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ .....</b>	<b>145</b>
КОСТЯНТИН ВАСИЛИШИН_МАКСИМ СИДОРОВ	
<b>ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВНУТРІШНЬОЧАСТИНКОВОГО МАСОПЕРЕНОСУ .....</b>	<b>149</b>
ВІКТОР ЖУКОВСЬКИЙ, НАТАЛІЯ ЖУКОВСЬКА	
<b>МЕТОД РОТЕ ТА МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ У ЗАСТОСУВАННІ ДО АНАЛІЗУ ПРОЦЕСІВ САМОЗАЙМАННЯ.....</b>	<b>151</b>
АНАТОЛІЙ КАЛІНІЧЕНКО, МАКСИМ СИДОРОВ	
<b>МОДЕЛЮВАННЯ БЕЗПЕКОВИХ ТА ЕКОНОМІЧНИХ ЕФЕКТІВ КІБЕРЗЛОЧИННОСТІ .....</b>	<b>155</b>
КОВАЛЬЧУК ОЛЬГА ЯРОСЛАВІВНА	
<b>MATHEMATICAL MODEL OF MULTIOBJECTIVE COMBINATORY OPTIMIZATION PROBLEM AND PRACTICAL APPLICATION ....</b>	<b>159</b>
КОЛІЄШКІНА L.M, KHOVBEN S.V.	

<b>ДВОБІЧНИЙ АПРОКСИМАЦІЙНИЙ АНАЛІЗ УЗАГАЛЬНЕНИХ НАНОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА .....</b>	<b>163</b>
ОКСАНА КОНЧАКОВСЬКА	
<b>МЕТОД R-ФУНКЦІЙ ТА НЕЛІНІЙНИЙ МЕТОД ГАЛЬОРКІНА У ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕЧІЙ В'ЯЗКОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОЇ РІДИНИ .....</b>	<b>168</b>
ЄВГЕН КУРЛОВ, НІКІТА ЗДОРИК, МАКСИМ СИДОРОВ	
<b>ВИКОРИСТАННЯ ЗОНУВАННЯ В СИСТЕМАХ ВОДОПОСТАЧАННЯ.....</b>	<b>172</b>
ОЛЬГА МАТВІЄНКО, НАТАЛІЯ МАНЧИНСЬКА	
<b>ONE MODEL OF GROWING RANDOM FOREST.....</b>	<b>175</b>
ANDREY A. DOROGOVTSYEV, IRYNA NISHCHENKO, DARIA KALYTIUK	
<b>МЕТОД БЕЗПЕЧНОГО ПРИЗЕМЛЕННЯ АВАРІЙНОГО БЕЗПІЛОТНОГО КВАДРОКОПТЕРА .....</b>	<b>176</b>
БОГДАН БЛАГІТКО, ІГОР ЗАЯЧУК	
<b>МОДЕЛЮВАННЯ МАСОПЕРЕНОСУ В ПОРИСТИХ СТРУКТУРАХ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ФОРМИ СКИНЧЕНОЇ ВИСОТИ .....</b>	<b>178</b>
ЯРОСЛАВ П'ЯНИЛО, ГАННА ЛЯНЦЕ, АДРІАН ТОРСЬКИЙ, ГАЛИНА П'ЯНИЛО	
<b>МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ МАСОПЕРЕНОСУ В СКЛАДНИХ ПОРИСТИХ СТРУКТУРАХ.....</b>	<b>182</b>
ЯРОСЛАВ П'ЯНИЛО, ГАЛИНА П'ЯНИЛО	
<b>ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО АНАЛІЗУ РІВНОВАГИ БАЛКИ ПІД ДІЄЮ НЕЛІНІЙНОЇ ЗОВНІШНЬОЇ СИЛИ .....</b>	<b>186</b>
АНТОН САВЧЕНКО, МАКСИМ СИДОРОВ	
<b>МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У НЕОДНОРІДНИХ ПЕРІОДИЧНИХ СЕРЕДОВИЩАХ .....</b>	<b>190</b>
ГЕННАДІЙ САНДРАКОВ	
<b>ДОСЛІДЖЕННЯ ПОШИРЕННЯ МЕХАНОЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ У ПОРИСТИХ ТІЛ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНЬОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ДРОБОВИХ ПОХІДНИХ ЗА ЧАСОМ.....</b>	<b>194</b>
П'ЯНИЛО ЯРОСЛАВ, ТВАРДОВСЬКА СОФІЯ	
<b>МОДЕЛЮВАННЯ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ ПИЛКОВОГО ВАЛА .....</b>	<b>198</b>
Л.Ф. ДЗЮБА, О.Ю. ЧМИР, О.В. МЕНЬШИКОВА	
<b>МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИФУЗІЇ ЗА КАСКАДНОГО РОЗПАДУ РЕЧОВИНИ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ЩОДО КОНЦЕНТРАЦІЇ НА ГРАНИЦІ ШАРУ.....</b>	<b>201</b>
ОЛЬГА ЧЕРНУХА, ЮРІЙ БІЛУЩАК, АНАСТАСІЯ ЧУЧВАРА	
<b>ЗАСТОСУВАННЯ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ З ВІДКРИТИМ КОДОМ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗГОРТАННЯ КОСМІЧНОЇ АНТЕНИ .....</b>	<b>206</b>
ВЛАДИСЛАВ ШАМАХАНОВ, СЕРГІЙ МАРТИНЮК, СЕРГІЙ ХОРОШИЛОВ, ОЛЕКСАНДР СУШКО	
<b>ЗАГАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЯ.....</b>	<b>214</b>
Р.М. ТАЦІЙ, О.О. КАРАБІН, О.Ю. ЧМИР, М.І. КУСІЙ	
<b>АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИСОКОПРОДУКТИВНИХ РЕАЛІЗАЦІЙ ДИСКРЕТНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ ДОБЕШІ ДЛЯ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ОДНОВИМІРНИХ СИГНАЛІВ.....</b>	<b>214</b>
АРТЕМ ІЗМАЙЛОВ	
<b>ДЛЯ НОТАТОК .....</b>	<b>222</b>
<b>ДЛЯ НОТАТОК .....</b>	<b>223</b>

Наукове видання

**"ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ  
ТА  
КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ"**

**матеріали  
Міжнародної науково-практичної конференції  
15-16 грудня 2022 року  
Івано-Франківськ**

**"INFORMATION TECHNOLOGIES  
AND  
COMPUTER MODELLING"**

**proceedings  
of the International Scientific Conference  
2022, December, 15th to 16th  
Ivano-Frankivsk**

Науковий редактор: Л.Б. Петришин  
Технічний редактор: В.З. Максимець  
Коректор: Ю.Ю. Іляш  
Комп'ютерна верстка: О.М. Голіней

Прикарпатський національний університет  
імені Василя Стефаника  
76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57,  
ПНУ, адміністративний корпус

Формат. Папір офсетний. Ум. Друк арк.  
Тираж 150 прим.

Друк: підприємець Голіней О.М.  
тел. (0342) 58 04 32

**ISBN 978-617-8128-13-5**

Свідоцтво внесення до державного реєстру  
ДК №

Для нотаток

# Для нотаток