# Загальна Схема Дослідження Поздовжніх Коливань Стрижнів Кусково-Сталого Перерізу

Р.М. Тацій
кафедра прикладної математики і механіки
ЛДУ безпеки життєдіяльності
Львів, Україна

О.О. Карабин
кафедра прикладної математики і механіки
ЛДУ безпеки життєдіяльності
Львів, Україна
tosjakarabyn@gmail.com

О.Ю. Чмир
кафедра прикладної математики і механіки
ЛДУ безпеки життєдіяльності
Львів, Україна
o_chmyr@yahoo.com

# TheGeneral Scheme of Investigation for Longitudinal Oscillations of Rods of a Piecewise-Constant Section

R.M. Tatsij
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of life safety
Lviv, Ukraine

O.O. Karabyn
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of life safety
Lviv, Ukraine
tosjakarabyn@gmail.com

O.Yu. Chmyr
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of life safety
Lviv, Ukraine
o_chmyr@yahoo.com

***Анотаці*–Запропоновано загальну методику дослідження поздовжніх коливань стрижнів кусково-сталого перерізу. В основу схеми покладено концепцію квазіпохідних, метод зведення вихідної задачі до розв'язування двох простіших, але взаємозв'язаних задач, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, класичний метод Фур'є та модифікований метод власних функцій.**

***Abstract*–The general method of investigation for longitudinal oscillations of rods of a piecewise-constant section is offered.In the basis of the solving scheme is a concept of quasi-derivatives, a modern theory of systems of linear differential equations, the classical Fourier method and a reduction method. The advantage of this method is a possibility to examine a problem on each breakdown segment and then to combine obtained solutions on the basis of matrix calculation. Such an approach allows the use of software tools for solving the problem.**

***Ключові слова*–квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші, задача на власні значення, метод Фур'є та метод власних функцій.**

***Keywords*–kvazidifferentialequation,the boundaryvalue problem, theCauchymatrix, the eigenvaluesproblem, themethodofFourierandthe method of eigenfunctions.**

## I. Вступ

Методи розв'язування нестаціонарних крайових задач можна поділити на прямі, основу яких становить метод відокремлення змінних, метод джерел (метод

функції Ґріна), метод інтегральних перетворень, наближені та числові методи.

Запропонована в даній роботі схема належить до прямих методів розв'язування крайових задач. В основу реалізації цієї схеми покладено концепцію квазіпохідних [1], метод зведення вихідної задачі до розв'язування двох простіших, але взаємозв'язаних задач, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, класичний метод Фур'є та модифікований метод власних функцій.

## II. Основні позначення, формулювання задачі

Нехай $L$ – відкритий інтервал дійсної осі $\square$, $[x_0;x_n]\subset L$ – відрізок дійсної осі; $0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<x_{i+1}\ldots<x_{n-1}<x_n=l$ – довільне розбиття відрізка $[x_0;x_n]$ дійсної осі $Ox$ на $n$ частин.

Введемо основні позначення: $\theta_i$ – характеристична функція проміжку $\left[x_i;x_{i+1}\right)$; $F_i$, $i=\overline{0,n-1}$, $E$, $\rho$ – сталі. Покладемо $F(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}F_i\cdot\theta_i$; $u^{[1]}=F(x)\cdot u_x{}'$ –квазіпохідна.

Розглянемо поздовжні коливання стрижнів

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E\cdot F(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\rho\cdot F(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\,, \qquad (42)$$

$$x\in(x_0;x_n)\,,\ t\in(0;+\infty)\,,$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} p_{11}u(x_0,t)+p_{12}u^{[1]}(x_0,t)=\psi_0(t),\\ q_{21}u(x_n,t)+q_{22}u^{[1]}(x_n,t)=\psi_l(t),\end{cases}\ t\in[0;+\infty)\,,(43)$$

які вважаються лінійно незалежними,та початковими умовами

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi_0(x),\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\varphi_1(x),\end{cases}\ x\in[x_0;x_n]\,, \qquad (44)$$

де $p_{ij}$, $q_{ij}$ $(i,j=1,2)$ – сталі, $\psi_0(t)$, $\psi_l(t)\in C^2(0;+\infty)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – кусково-неперервні на $(x_0;x_n)$.

Метод редукції відшукання розв'язку задачі детально описаний, наприклад, в [2, 3]. Згідно з цим методом розв'язок задачі (42) - **Ошибка! Закладка не определена.** шукаємо у вигляді суми двох функцій

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)\,. \qquad (45)$$

Одну з функцій, наприклад $w(x,t)$, виберемо спеціальним способом, тоді функцію $v(x,t)$ вже визначимо однозначно.

## III. Побудова функції $w(x,t)$

Визначимо функцію $w(x,t)$ як розв'язок крайової задачі

$$(F(x)\cdot w_x{}')_x{}'=0\,, \qquad (46)$$

$$\begin{cases} p_{11}w(x_0)+p_{12}w^{[1]}(x_0)=\psi_0(t),\\ q_{21}w(x_n)+q_{22}w^{[1]}(x_n)=\psi_l(t),\end{cases}\ t\in[0;+\infty)\,.(47)$$

Зауважимо, що змінна $t$ тут вважається параметром.

В основі методу розв'язування задачі (46),(47) лежить концепція квазіпохідних [4].

Введемо вектор $\overline{W}=\begin{pmatrix} w\\ w^{[1]}\end{pmatrix}$, де $w^{[1]}=F\cdot w_x{}'$. За таких позначень квазідиференціальне рівняння (46) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\overline{W}_x{}'=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{F(x)}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\overline{W}\,. \qquad (48)$$

Під розв'язком системи (48) розуміємо абсолютно-неперервну вектор-функцію $\overline{W}(x,t)$, що за змінною $x$ справджує її майже скрізь (див. [4]).

Крайові умови (47) запишемо у векторній формі

$$P\cdot\overline{W}(x_0,t)+Q\cdot\overline{W}(x_n,t)=\overline{\Gamma}(t)\,, \qquad (49)$$

де $P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}$, $\overline{\Gamma}(t)=\begin{pmatrix}\psi_0(t)\\ \psi_l(t)\end{pmatrix}$.

Нехай

$$w(x,t)=\sum_{i=0}^{n-1}w_i(x,t)\theta_i\,, \qquad (50)$$

де $w_i(x,t)$, $w_i^{[1]}(x,t)$ визначені на проміжку $[x_i;x_{i+1})$.

На проміжку $[x_i;x_{i+1})$ система (48) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} w_i\\ w_i^{[1]}\end{pmatrix}_x{}'=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{F_i}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_i\\ w_i^{[1]}\end{pmatrix}. \qquad (51)$$

Матриця Коші $B_i(x,s)$ цієї системи має вигляд

$$B_i(x,s)=\begin{pmatrix} 1 & b_i(x,s)\\ 0 & 1\end{pmatrix},\text{де } b_i(x,s)=\int_s^x\frac{1}{F_i}dz=\frac{x-s}{F_i}\,. \qquad (52)$$

Для довільного $k\ge i$ позначимо

$$B(x_k,x_i)\overset{def}{=}B_{k-1}(x_k,x_{k-1})\cdot B_{k-2}(x_{k-1},x_{k-2})\times\ldots$$

$$\times \ldots \times B_i(x_{i+1}, x_i). \qquad (53)$$

Структура (52) матриць $B_i(x,s)$ дає можливість встановити структуру матриці (53) $B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{m=i}^{k-1} \frac{x_{m+1} - x_m}{F_m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, причому $B(x_k, x_k) \overset{def}{=} I$, де $I$ – одинична матриця.

Розв'язок системи (51) на проміжку $[x_i; x_{i+1})$ має вигляд

$$\overline{W}_i(x,t) = B_i(x, x_i) \cdot \overline{P}_i, \qquad (54)$$

де $\overline{P}_i$ – поки що невідомий вектор [1].

Аналогічно, на проміжку $[x_{i-1}; x_i)$ матимемо $\overline{W}_{i-1}(x,t) = B_{i-1}(x, x_{i-1}) \cdot \overline{P}_{i-1}$.

В точці $x = x_i$ повинна виконуватись умова неперервності $\overline{W}_i(x_i, t) = \overline{W}_{i-1}(x_i, t)$, в результаті чого одержимо рекурентне співвідношення

$$\overline{P}_i = B_{i-1}(x_i, x_{i-1}) \cdot \overline{P}_{i-1}. \qquad (55)$$

Методом математичної індукції, з (55) одержуємо

$$\overline{P}_i = B(x_i, x_0) \cdot \overline{P}_0, \qquad (56)$$

де $\overline{P}_0$ – початковий (невідомий) вектор.

Для знаходження $\overline{P}_0$ використовуємо крайові умови (49), в яких покладемо $\overline{W}(x_0, t) \overset{def}{=} \overline{P}_0$,

$$\overline{W}(x_n, t) \overset{def}{=} \overline{W}_{n-1}(x_n, t) = B(x_n, x_0)\overline{P}_0.$$

Тоді $[P + Q \cdot B(x_n, x_0)]\overline{P}_0 = \overline{\Gamma}$, звідки одержуємо

$$\overline{P}_0 = [P + Q \cdot B(x_n, x_0)]^{-1} \cdot \overline{\Gamma}. \qquad (57)$$

Обчислимо

$$[P + Q \cdot B(x_n, x_0)]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} q_{21}\sigma_n + q_{22} & -p_{12} \\ -q_{21} & p_{11} \end{pmatrix},$$ де

$$\sigma_n = \sum_{m=0}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{x_{m+1} - x_m}{F_m}, \qquad \sigma_0 \overset{def}{=} 0,$$

$$\Delta = p_{11}(q_{21}\sigma_n + q_{22}) - q_{21}p_{12} \neq 0.$$

Тоді із (57)

$$\overline{P}_0 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} q_{21}\sigma_n + q_{22} & -p_{12} \\ -q_{21} & p_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_l(t) \end{pmatrix}. \qquad (58)$$

На основі формул (54), (56), (58), після перетворень, отримаємо зображення вектор - функції $\overline{W}_i(x,t)$ на проміжку $[x_i; x_{i+1})$

$$\overline{W}_i(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & b_i(x, x_i) + \sigma_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{P}_0. \qquad (59)$$

Перша координата вектора $\overline{W}_i(x,t)$ в (59) і є шуканою функцією $w_i(x,t)$. Отже,

$$w_i(x,t) = \frac{1}{\Delta}\big((q_{21}\sigma_n + q_{22})\psi_0(t) - p_{12}\psi_l(t) +$$

$$+(b_i(x, x_i) + \sigma_i) \cdot (-q_{21}\psi_0(t) + p_{11}\psi_l(t))\big). \qquad (60)$$

Підставляючи вираз (60) у (50), отримуємо розв'язок на всьому проміжку $[x_0; x_n]$.

## IV. Побудова функції $v(x,t)$

Запишемо мішану задачу для функції $v(x,t)$. Підставляючи (45) в (42) та враховуючи, що функція $w(x,t)$ задовольняє (46), одержуємо неоднорідне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \rho \cdot \frac{F(x)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \rho \cdot \frac{F(x)}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (61)$$

$$x \in (x_0; x_n), \; t \in (0; +\infty).$$

Підставимо (45) в початкові умови (44). Одержимо для функції $v(x,t)$ початкові умови

$$\begin{cases} v(x,0) = \Phi_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \Phi_1(x), \end{cases} \quad x \in [x_0; x_n], \qquad (62)$$

де $\Phi_0(x) \overset{def}{=} \varphi_0(x) - w(x,0)$, $\Phi_1(x) \overset{def}{=} \varphi_1(x) - \frac{\partial w}{\partial t}(x,0)$.

Оскільки функція $w(x,t)$ справджує крайові умови (47), то із (45) випливають крайові умови для функції $v(x,t)$

$$\begin{cases} p_{11}v(x_0) + p_{12}v^{[1]}(x_0) = 0, \\ q_{21}v(x_n) + q_{22}v^{[1]}(x_n) = 0, \end{cases} \quad t \in [0; +\infty). \qquad (63)$$

Отже, за умови, що розв'язок $w(x,t)$ задачі (46), (47) є відомим, функція $v(x,t)$ є розв'язком мішаної задачі (61) - (63).

## V. Метод Фур'є та задача на власні значення

Для рівняння (61) розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$\rho \cdot \frac{F(x)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right). \qquad (64)$$

Знайдемо його нетривіальні розв'язки у вигляді

$$v(x,t) = \sin(\omega t + \varepsilon) \cdot X(x), \qquad (65)$$

де $\omega$ – параметр, $\varepsilon$ – константа, $X(x)$ – поки що невідома функція.

Підставимо (65) в рівняння (64). Одержимо квазідиференціальне рівняння

$$\left(F(x)X'(x)\right)' + \alpha^2 \cdot F(x)X(x) = 0, \qquad (66)$$

де $\alpha^2 = \dfrac{\rho}{E} \cdot \omega^2$.

Підставивши (65) в умови (63), одержимо крайові умови

$$\begin{cases} p_{11}X(x_0) + p_{12}X^{[1]}(x_0) = 0, \\ q_{21}X(x_n) + q_{22}X^{[1]}(x_n) = 0. \end{cases} \qquad (67)$$

Як і вище, під розв'язком рівняння (66) розуміємо абсолютно-неперервну на $[x_0; x_n]$ функцію $X(x)$, що справджує його майже скрізь [4].

Ввівши квазіпохідну $X^{[1]} \overset{def}{=} FX'$, вектор $\overline{X} = \begin{pmatrix} X \\ X^{[1]} \end{pmatrix}$ та матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{F} \\ -\alpha^2 F & 0 \end{pmatrix}$, запишемо задачу (66)-(67) у матричному вигляді

$$\overline{X}' = A \cdot \overline{X} \qquad (68)$$

$$P\overline{X}(x_0) + Q\overline{X}(x_n) = \overline{0}. \qquad (69)$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що матриця Коші $\overline{B}_i(x,s,\omega)$ системи (68) на проміжку $[x_i; x_{i+1})$ має вигляд $\overline{B}_i(x,s,\omega) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(x-s) & \dfrac{\sin\alpha(x-s)}{\alpha F_i} \\ -\alpha F_i \sin\alpha(x-s) & \cos\alpha(x-s) \end{pmatrix}$, де $\alpha = \omega\sqrt{\dfrac{\rho}{E}}$.

Аналогічно, як і в формулі (53), позначимо $\overline{B}(x_i, x_0, \omega) \overset{def}{=} \prod_{j=0}^{i} \overline{B}_{i-j}(x_{i-j+1}, x_{i-j}, \omega)$. Позначимо також

$$\overline{B}(x, x_0, \omega) \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{B}_i(x, x_i, \omega) \cdot \overline{B}(x_i, x_0, \omega) \cdot \theta_i, \qquad (70)$$

(аналог матриці Коші на всьому проміжку );

$$\overline{B}(x, x_0, \omega) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \qquad (71)$$

Нетривіальний розв'язок $\overline{X}(x,\omega)$ системи (68) шукаємо у вигляді $\overline{X}(x,\omega) = \overline{B}(x, x_0, \omega) \cdot \overline{C}$, де $\overline{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ – деякий ненульовий вектор.

Вектор - функція $\overline{X}(x,\omega)$ має справджувати крайові умови (69), тобто $\left[P \cdot \overline{B}(x_0, x_0, \omega) + Q \cdot \overline{B}(x_n, x_0, \omega)\right] \cdot \overline{C} = \overline{0}$, врахувавши, що $\overline{B}(x_0, x_0, \omega) = I$, прийдемо до рівності

$$\left[P + Q \cdot \overline{B}(x_n, x_0, \omega)\right] \cdot \overline{C} = \overline{0}.$$ **Ошибка! Закладка не определена.**

Для існування ненульового вектора $\overline{C}$ в (77)| необхідно і досить виконання умови

$$\det\left[P + Q \cdot \overline{B}(x_n, x_0, \omega)\right] = 0. \qquad (72)$$

Конкретизуємо вигляд лівої частини характеристичного рівняння (72), врахувавши вигляд матриць *P*, *Q* та (71)

$$\det\left[P + Q \cdot \overline{B}(x_n, x_0, \omega)\right] = p_{11} \cdot (q_{21}b_{12}(\omega) + q_{22}b_{22}(\omega)) -$$
$$- p_{12} \cdot (q_{21}b_{11}(\omega) + q_{22}b_{21}(\omega)).$$

Сформулюємо наступне твердження.

**Твердження 1.** *Характеристичне рівняння задачі на власні значення (66), (67) має вигляд*

$$p_{11} \cdot (q_{21}b_{12}(\omega) + q_{22}b_{22}(\omega)) -$$
$$- p_{12} \cdot (q_{21}b_{11}(\omega) + q_{22}b_{21}(\omega)) = 0. \qquad (73)$$

Як відомо (див. [5]), корені $\omega_k$ характеристичного рівняння (73), які є власними значеннями задачі(66), (67), є додатними та різними.

Для знаходження ненульового вектора $\overline{C}$ підставимо в рівність (77)| $\omega_k$ замість $\omega$. Тоді прийдемо до системи рівнянь

$$\begin{cases} p_{11}C_1 + p_{12}C_2 = 0, \\ (q_{21}b_{11}(\omega_k) + q_{22}b_{21}(\omega_k)) \cdot C_1 + \\ \quad + (q_{21}b_{12}(\omega_k) + q_{22}b_{22}(\omega_k)) \cdot C_2 = 0. \end{cases} \qquad (74)$$

Оскільки виконується (73), то система (74) зводиться до рівняння $p_{11}C_1 + p_{12}C_2 = 0$, з якого знаходимо координати вектора $\overline{C}$ при певних припущеннях на коефіцієнти матриці $P$: $p_{11} \neq 0$, то поклавши $C_2 = 1$, маємо $C_1 = -\dfrac{p_{12}}{p_{11}}$, тобто $\overline{C} = \begin{pmatrix} -\dfrac{p_{12}}{p_{11}} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Нехай $\overline{X}_k(x,\omega_k)$ – нетривіальний власний вектор, що відповідає власному значенню $\omega_k$. Справедливим є твердження.

**Твердження 2**. *Власні вектори системи диференціальних рівнянь (68) з крайовими умовами* (69) *мають структуру*

$$\overline{X}_k(x,\omega_k) = \overline{B}(x,x_0,\omega_k)\cdot\overline{C},\ k\in\square\ .$$

**Наслідок.** *Власні функції* $X_k(x,\omega_k)$, *як перші координати власних векторів* $\overline{X}_k(x,\omega_k)$, *можна записати у вигляді*

$$X_k(x,\omega_k) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\cdot\overline{B}(x,x_0,\omega_k)\cdot\overline{C},\ k=1,2,3,\ldots \quad (75)$$

Зокрема, оскільки $X_k(x,\omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{ki}(x,\omega_k)\cdot\theta_i$, то з (70)та(75) випливає, що

$$X_{ki}(x,\omega_k) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\cdot\overline{B}_i(x,x_i,\omega_k)\cdot\overline{B}(x_i,x_0,\omega_k)\cdot\overline{C}, \quad (76)$$

$$i=\overline{0,n-1}\ .$$

## VI. Побудова розв'язку $v(x,t)$ мішаної задачі (61) - (63)

Для розв'язання задачі(61) - (63) застосуємо метод власних функцій [3], який полягає в тому, що розв'язок задачі(61) - (63) шукаємо у вигляді

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\cdot X_k(x,\omega_k)\ , \quad (77)$$

де $T_k(t)$ – поки що невідомі функції.

Оскільки $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ входить в праву частину рівняння (61), то розвинемо її в ряд Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ крайової задачі (66), (67)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\cdot X_k(x,\omega_k)\ . \quad (78)$$

Підставляючи вираз (77) у (61) та враховуючи (78), отримаємо рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\cdot\Big(F(x)X_k{}'(x,\omega_k)\Big)' - \frac{\rho}{E}F(x)\cdot\sum_{k=1}^{\infty} T_k{}''(t)\cdot X_k(x,\omega_k) =$$

$$= \frac{\rho}{E}F(x)\cdot\sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\cdot X_k(x,\omega_k)\ .$$

Враховуючи, що власні функції $X_k(x,\omega_k)$ задовольняють рівняння (66), приходимо до рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big[T_k{}''(t)+\omega_k^2\cdot T_k(t)+w_k(t)\Big]\cdot\frac{\rho}{E}F(x)\cdot X_k(x,\omega_k) = 0\ . \quad (79)$$

Помножимо ліву і праву частини (79) на $X_j(x,\omega_j)$ та проінтегруємо за змінною $x$ на проміжку $[x_0;x_n)$, врахувавши ортогональність власних функцій, приходимо до кожного з диференціальних рівнянь

$$T_k{}''(t)+\omega_k^2\cdot T_k(t) = -w_k(t),\ k=1,2,3,\ldots\ . \quad (80)$$

Загальний розв'язок кожного з диференціальних рівнянь (80) має вигляд

$$T_k(t) = a_k\cos\omega_k t + d_k\sin\omega_k t - \frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds \quad ,(81)$$

де $a_k$, $d_k$ – невідомі сталі [6].

Позначимо $I(t) = \dfrac{1}{\omega_k}\displaystyle\int_0^t \sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds$ .

Зауважимо, що $I(0)=0$, $I_t'(0)=0$ [7].

Для визначення сталих $a_k$, $d_k$ розвинемо в ряди Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ праві частини початкових умов (62)

$$\Phi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{0\,k}\cdot X_k(x,\omega_k)\ , \quad (82)$$

$$\Phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{1\,k}\cdot X_k(x,\omega_k)\ , \quad (83)$$

де $\Phi_{0\,k}$, $\Phi_{1\,k}$ – відповідні коефіцієнти Фур'є.

З (81) випливає, що

$$T_k(0) = a_k\ , \quad (84)$$

$$T_k{}'(t) = -a_k\omega_k\sin\omega_k t + d_k\omega_k\cos\omega_k t - I_t'(t)\ ,$$

звідки

$$T_k{}'(0) = d_k\omega_k\ . \quad (85)$$

З (77), першої умови в (62), та врахувавши (82), одержуємо $\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\cdot X_k(x,\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{0\,k}\cdot X_k(x,\omega_k)$ . Звідки, використовуючи (84), маємо $T_k(0) = a_k = \Phi_{0\,k}$ .

Аналогічно з (77), другої умови в (62), врахувавши (83) маємо $\sum_{k=1}^{\infty} T_k{}'(0)\cdot X_k(x,\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{1\,k}\cdot X_k(x,\omega_k)$ . Звідки, використовуючи (85), знаходимо $d_k = \dfrac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k}$ .

Отже, остаточно отримуємо розв'язок мішаної задачі (61) - (63) у вигляді ряду

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{0\,k}\cos\omega_k t+\frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k}\sin\omega_k t-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds\right]\cdot X_k(x,\omega_k)\,.$$

Враховуючи $X_k(x,\omega_k)=\sum_{i=0}^{n-1}X_{ki}(x,\omega_k)\cdot\theta_i$ та те, що $v(x,t)=\sum_{i=0}^{n-1}v_i(x,t)\cdot\theta_i$, де $v_i(x,t)$ визначені на проміжку $\left[x_i;x_{i+1}\right)$, одержуємо

$$v_i(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{0\,k}\cos\omega_k t+\frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k}\sin\omega_k t-,\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds\right]\cdot X_{ki}(x,\omega_k)\,, \quad (86)$$

де функції $X_{ki}(x,\omega_k)$ обчислюються за формулою (76).

Врахувавши (60), (86), отримаємо розв'язок задачі (42) - **Ошибка! Закладка не определена.**

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^{n-1}\left[w_i(x,t)+v_i(x,t)\right]\cdot\theta_i\,.$$

## Висновки

Теорема про розвинення за власними функціями адаптована для випадку диференціальних рівнянь з кусково-сталими (за просторовою змінною) коефіцієнтами.

Отримано явні формули для обчислення розв'язку та його квазіпохідної для будь-якого підінтервала основного проміжку, які є справедливими для довільної скінченної кількості точок розриву першого роду згаданих вище коефіцієнтів.

Перевагою методу є можливість розглянути задачу на кожному відрізку розбиття, а потім за допомогою матричного числення записати аналітичний вираз розвязку. Такий підхід дозволяє застосовувати програмні засоби до процесу вирішення задачі та графічної ілюстрації розв'язку.

Зауважимо, що отримані результати мають безпосереднє практичне застосування в теорії коливань стрижнів з кусково-змінним розподілом параметрів.

## Література References


[1] Тацій Р. М. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтам / Р. М. Тацій, О. О. Власій, М. Ф. Стасюк // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки . - 2014. - № 804. - С. 64-69.

[2] Арсенин В.Я. Методы математической физики. - М.: Наука, 1974. - 432 с.

[3] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 735 с.

[4] Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, В. Мазуренко, О.О. Власій - Дрогобич. Коло, 2011. - 297 с.

[5] Тацій Р.М., Мазуренко В.В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь парного порядку. / Р.М. Тацій, В.В. Мазуренко // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2001. – 44. №1 – С. 43-53.

[6] Каленюк П.І. Диференціальні рівняння: Навч. посібник. / П.І. Каленюк, Ю.К. Рудавський, Р.М. Тацій, І.Ф. Клюйник, В.М. Колісник, П.П. Костробій, І.Я. Олексів - Л. Видавництво Львівської політехніки, 2014. - 380 с.

[7] Мартыненко В.С. Операционное исчисление: Учеб. пособие. - 4 - е изд., перераб. и доп. - К.: Выща школа, 1990. - 359 с.