Динаміка Квазігармонічних Хвильових Пакетів у Середовищах з Включеннями

Скуратівський Сергій Іванович,СкуратівськаІнна Антонівна
Відділення геодинаміки вибуху
Інститут геофізики ім.С.І.Субботіна НАН України
Київ, Україна
skurserg @gmail.com, inna.skurativska@gmail.com

Dynamicsof Quasiharmonic Wave Packets in Media with Inclusions

Skurativskyi Sergii, Skurativska Inna
Division of geodynamics of explosion
SubbotinIstituteof Geophysics of NAS of Ukraine
Kyiv, Ukraine
skurserg @gmail.com, inna.skurativska@gmail.com

***Анотація*—В роботі вивчаються хвильові режими у середовищі з коливними включеннями. Середовище розглядається як сукупність взаємно проникаючих континуумів, один із яких проявляє нелінійні та просторово нелокальні властивості. У слабко нелінійному випадку засобами методу багатьох масштабів побудовано розв'язок, який описує поширення квазігармонічного хвильового пакету. Амплітуда цього розв'язку задовольняє нелінійне рівняння Шредінгера, яке дозволяє дослідити модуляційну нестійкість хвильового пакету в залежності від параметру просторової нелокальності середовища.**

***Abstract*—In this paper the wave regimes in a medium with oscillating inclusions were studied. The medium is considered as the set of mutually penetrated continua, one of which manifests the nonlinear and spatially nonlocal properties. When the weak nonlinear case is considered via the method of multiple scales, we constructed the solution describing the propagation of quasi-harmonic wave packet. Solution's amplitude satisfies the nonlinear Schrodinger equation supporting to study the modulational instability of wave packets depending on the parameter of spatial nonlocality of medium.**

Ключові слова—структуроване середовище; нелініні хвилі; солітон

Keywords—structured medium; nonlinear waves; soliton

I. Вступ

Природні середовища, зокрема геофізичні, мають яскраво виражену дискретну структуру, структурні елементи якої перебувають у коливальному русі [1]. В умовах інтенсивних навантажень такі середовища проявляють особливості внутрішньої будовиі можуть переходити у стан самоорганізації, що проявляється у формуванні локалізованих динамічних режимів, відомих як дисипативні структури[2]. Опис подібних явищ вимагає перегляду класичних моделей механіки суцільного середовища та врахування структурованості середовища.

Зокрема, серед способів моделювання хвильових полів у неоднорідних геосередовищах використовують класичні рівняння руху, але модифікують динамічні рівняння стану, в які включають опис динаміки структурних елементів. Як показано у роботах [2, 3], такі моделі допускають інваріантні розв'язки, що описують нелінійні періодичні, багатоперіодичні, квазіперіодичні, хаотичні, солітоноподібні хвильові режими.

Іншим напрямом удосконалення моделей є модифікація рівнянь руху середовища, які описують динаміку додаткових ступенів свободи структурних елементів, зокрема коливальних. У цьому випадку в рівняння руху системи вводяться додаткові об'ємні сили, зумовлені рухом елементів структури. На основі таких ідей у роботах [4, 5] була запропонована лінійна математична модель складного середовища у вигляді взаємно проникаючих континуумів.

Також варто зазначити, що для гетерогенних середовищ властивим є прояви нелінійних властивостей та далекосяжних кореляцій (просторова нелокальність). Врахування нелінійності та просторової нелокальності приводить до наступної математичної моделі середовищ з коливними включеннями [6-11]

Робота частково виконувалась в рамках НДР 0118U000044

$$u_{tt} = \sigma_x - m_1 w_{tt} - m_2 v_{tt},$$

$$w_{tt} + \Omega_1^2 (w - u) = 0,\ v_{tt} + \Omega_2^2 (v - u) = 0, \qquad (1)$$

$$\sigma - \theta\sigma_{xx} = e_1 u_x + e_3 (u_x)^3,$$

де u зміщення основного середовища густини ρ; σ – механічна напруга; w, v – зміщення осцилюючих включень двох видів, які характеризуються: густиною $m_1\rho$ та власною частотою Ω_1, а також густиною $m_2\rho$ та власною частотою Ω_2; $e_{1,3}$ – модулі пружності. Параметр θ описує вплив розподілу градієнтів напружень (просторово нелокальні ефекти) [12] у несучому середовищі.

II. Побудова першого наближення квазігармонічного розв'язку моделі середовища з включеннями

Розглянемо поширення квазігармонічних хвильових пакетів[13, 14, 15] у середовищі з коливними включеннями в рамках слабко нелінійної моделі (1), коли фізична нелінійність несучого середовища мала, тобто $e_3 = \varepsilon e_3$, ε – малий параметр. Для побудови розв'язку використаємо метод багатьох масштабів [13], згідно з яким шукані функції мають наступний вигляд

$$\{u,w,v,\sigma\} = \left\{\sum_{j=1}^{4}\varepsilon^j U_j; \sum_{j=1}^{4}\varepsilon^j W_j; \sum_{j=1}^{4}\varepsilon^j V_j; \sum_{j=1}^{4}\varepsilon^j S_j\right\},$$

де функції

$$U_j = U_j(X_1, X_2, ..., T_1, T_2, ...);\ W_j = W_j(X_1, X_2, ..., T_1, T_2, ...);$$
$$V_j = V_j(X_1, X_2, ..., T_1, T_2, ...); S_j = S_j(X_1, X_2, ..., T_1, T_2, ...)$$

залежать тільки від повільних змінних $X_j = \varepsilon^j x$, $T_j = \varepsilon^j t$, $j = 1,2,...$

У першому порядку малості за малим параметром отримаємо наступну систему:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial T_0^2} = \frac{\partial S_1}{\partial X_0} - m_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial T_0^2} - m_2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial T_0^2},$$

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial T_0^2} + \Omega_1^2 (W_1 - U_1) = 0,\ \frac{\partial^2 V_1}{\partial T_0^2} + \Omega_2^2 (V_1 - U_1) = 0, \qquad (2)$$

$$S_1 - \theta \frac{\partial^2 S_1}{\partial X_0^2} = e_1 \frac{\partial U_1}{\partial X_0}.$$

Розв'язок лінійної системи (2) шукатимемо у вигляді

$$U_1 = A(X_1, T_1) exp(i\varphi) + к.с.,\ W_1 = B(X_1, T_1) exp(i\varphi) + к.с.,$$

$$V_1 = C(X_1, T_1) exp(i\varphi) + к.с.,\ S_1 = Q(X_1, T_1) exp(i\varphi) + к.с.,$$

де фаза хвилі $\varphi = \omega T_0 - k X_0$, ω та k – її частота та хвильове число.

Легко переконатись, що існування нетривіального розв'язку системи (2) можливе за наступної умови

$$\frac{e_1 k^2}{1 + \theta k^2} = \omega^2 \left(1 + m_1 \frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2 - \omega^2} + m_2 \frac{\Omega_2^2}{\Omega_2^2 - \omega^2} \right). \qquad (3)$$

Рівняння (3) є дисперсійним співвідношенням системи (2). Уявлення про форму дисперсійної кривої дає рис. 1, на якому можна розрізнити три гілки дисперсійної кривої. Зазначимо, що врахування нелокальних ефектів спричинює появу на оптичній гілці дисперсійного співвідношенняточки перегину, яка відповідає існуванню довжини хвилі нульової дисперсії [13]. Також на графіках існують інтервали частот, які відповідають аномальній дисперсії $k'' < 0$, коли високочастотні компоненти інформації поширюються швидше від низькочастотних.

Отже, враховуючи умову (3), амплітуди розв'язку першого наближення мають наступний вигляд

$$W_1 = q_W U_1,\ V_1 = q_V U_1,\ S_1 = i q_S U_1,$$

де $q_W = \dfrac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2 - \omega^2}$, $q_V = \dfrac{\Omega_2^2}{\Omega_2^2 - \omega^2}$, $q_S = -\dfrac{k e_1}{1 + \theta k^2}$.

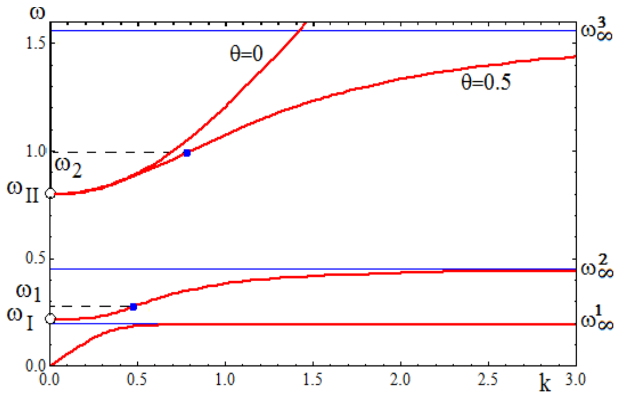

Рис. 1. Дисперсійна крива $\omega = \omega(k)$, визначена рівнянням (3) при $e_1 = 1$, $\Omega_1 = 0.2$, $\Omega_2 = 0.5$, $m_1 = 0.5$, $m_2 = 1.5$, $\theta = 0.5$. Інтервал $(\omega_I; \omega_1)$, $(\omega_{II}; \omega_2)$ відповідає аномальній дисперсії.

III. Побудова вищих наближень квазігармонічного розв'язку моделі середовища з включеннями

У другому наближенні теорії збурень компоненти розв'язку мають вигляд

$$U_2 = R_U exp(i\varphi) + к.с.,\ W_2 = R_W exp(i\varphi) + к.с.,$$

$$V_2 = R_V exp(i\varphi) + к.с.,\ S_2 = i R_S exp(i\varphi) + к.с.$$

Амплітуди $R_{U,W,V,S}$ задовольняють вироджену систему лінійних рівнянь з ненульовими правими частинами F_i (через громіздкість виразів тут не наводяться). Умовою сумісності такої системи є співвідношення

$$\sum_{j=1}^{4}\chi_j F_j = 0,$$

де $\chi_1 = 1$, $\chi_2 = \frac{m_1\omega^2}{\Omega_1^2-\omega^2}$, $\chi_3 = \frac{m_2\omega^2}{\Omega_2^2-\omega^2}$, $\chi_4 = \frac{k}{1+\theta k^2}$.

Цю умову можна переписати у наступній формі

$$A_{T_1}\left[-2\omega - 2m_1q_W\omega - 2m_2q_V\omega - 2\chi_2\omega q_W - 2\chi_3\omega q_V\right] + \\ + A_{X_1}\left[q_S - \frac{k}{1+\theta k^2}\left(2\theta k q_S + e_1\right)\right] = 0. \qquad (4)$$

Отримане співвідношення має вигляд рівняння переносу $A_{T_1} + A_{X_1}v_g = 0$, де $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ – групова швидкість. Як і очікувалось, збурення обвідної у такому наближенні поширюються з груповою швидкістю.

Таким чином, у випадку, коли виконується співвідношення (4), розв'язки системи другого наближення мають вигляд

$$R_U = B,\ R_W = \frac{B\Omega_1^2}{\Omega_1^2-\omega^2} - \frac{2q_Wi\omega}{\Omega_1^2-\omega^2}A_{T_1} \equiv Bq_W - \frac{2q_Wi\omega}{\Omega_1^2-\omega^2}A_{T_1},$$

$$R_V = B\frac{\Omega_2^2}{\Omega_2^2-\omega^2} - \frac{2q_Vi\omega}{\Omega_2^2-\omega^2}A_{T_1} \equiv Bq_V - \frac{2q_Vi\omega}{\Omega_2^2-\omega^2}A_{T_1},$$

$$R_S = \frac{-ke_1B}{1+\theta k^2} - \frac{i(2\theta\, k\, q_S + e_1)A_{X_1}}{1+\theta k^2} \equiv Bq_S - \frac{i(2\theta\, k\, q_S + e_1)}{1+\theta k^2}A_{X_1}.$$

Умова відсутності секулярних членів (містять $exp(i\varphi)$) у третьому наближення приводить до більш точного співвідношення відносно амплітуди A у формі нелінійного рівняння Шредінгера

$$i\left(A_{X_2} + A_{T_2}\frac{1}{v_g}\right) - \beta A_{T_1T_1} + \gamma|A|^2A = 0, \qquad (5)$$

де

$$\beta = \left[1 + (m_1+\chi_2)q_W\left(1+\frac{4\omega^2}{\Omega_1^2-\omega^2}\right) + (m_2+\chi_3)q_V\left(1+\frac{4\omega^2}{\Omega_2^2-\omega^2}\right) - \right. \\ \left. -(1+2k\chi_4\theta)\frac{(2\theta kq_S+e_1)}{v_g^2(1+\theta k^2)} + \chi_4\frac{\theta}{v_g^2}q_S\right] / \left[q_S - \chi_4(2q_Sk\theta + e_1)\right],$$

$$\gamma = \frac{3e_3\chi_4k^3}{q_S - \chi_4(2q_Sk\theta + e_1)}.$$

Власне, для рівняння (5) відомо багато точних розв'язків, але тут доречним буде вказати розв'язок виду $A = a(\xi)\ exp(i\varphi(\varsigma))$. Тоді величина a задовольняє рівняння $a'' - v_1a + v_0a^3 = 0$, де $v_1 = \frac{v-2u}{4uv^2}$, $v_0 = -\frac{\gamma}{\beta}$, $(\circ)' = d/d\xi$, $\xi = T_1 - X_2/u$, $\varsigma = T_1 - X_2/v$, величини u та v – сталі швидкості. Вказане рівняння має гомоклінічний розв'язок виду $a = a_m\, sech(\xi/\Delta)$, де $a_m^2 = 2v_1/v_0$, $\Delta^2 = 1/v_1$. Цей розв'язок відповідає солітонному розв'язку рівняння (5) і формується після втрати стійкості квазігармонічним пакетом.

Якщо коефіцієнти β та γ мають однакові знаки, то модуляційної нестійкості немає. Для визначення областей стійкості, розглянемо функцію $\mathrm{F}(\mathrm{k},\omega) = \beta\gamma$ та побудуємо для неї лінію нульового рівня, тобто $\mathrm{F}(\mathrm{k},\omega) = 0$ (лінія 2, рис. 2). Для усіх точок праворуч від цієї ізолінії функція $\mathrm{F}(\mathrm{k},\omega) > 0$ (стійкість), тоді як для суміжної множини вона $\mathrm{F}(\mathrm{k},\omega) < 0$ (нестійкість).

Дослідження показали, що при малих значеннях параметра нелокальності θ ізолінія 2 наближається до дисперсійної кривої, яка у свою чергу, згідно з рис. 1, втрачає точку перегину і стає вгнутою для всіх частот. Отже, коли ефекти просторової нелокальності не враховуються, тобто $\theta = 0$, в моделі (1) реалізується модуляційна нестійкість для точок $k'' < 0$, тоді як при $\theta \neq 0$ з'являються інтервали частот (у першу чергу у високочастотній області), де можлива реалізація модуляційної стійкості.

У третьому наближенні методу багатьох масштабів з'являється кубічна нелінійність:

$$\frac{\partial^2U_3}{\partial T_0^2} - \frac{\partial S_3}{\partial X_0} + m_1\frac{\partial^2W_3}{\partial T_0^2} + m_2\frac{\partial^2V_3}{\partial T_0^2} = \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + \frac{\partial S_2}{\partial X_1} - 2\frac{\partial^2U_2}{\partial T_0\partial T_1} - \\ -\frac{\partial^2U_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2U_1}{\partial T_0\partial T_2} - m_1\left(2\frac{\partial^2W_2}{\partial T_0\partial T_1} + \frac{\partial^2W_1}{\partial T_1^2} + 2\frac{\partial^2W_1}{\partial T_0\partial T_2}\right) - \\ -m_2\left(2\frac{\partial^2V_2}{\partial T_0\partial T_1} + \frac{\partial^2V_1}{\partial T_1^2} + 2\frac{\partial^2V_1}{\partial T_0\partial T_2}\right);$$

$$\frac{\partial^2W_3}{\partial T_0^2} + \Omega_1^2(W_3 - U_3) = -\left(2\frac{\partial^2W_2}{\partial T_0\partial T_1} + \frac{\partial^2W_1}{\partial T_1^2} + 2\frac{\partial^2W_1}{\partial T_0\partial T_2}\right);$$

$$\frac{\partial^2V_3}{\partial T_0^2} + \Omega_2^2(V_3 - U_3) = -\left(2\frac{\partial^2V_2}{\partial T_0\partial T_1} + \frac{\partial^2V_1}{\partial T_1^2} + 2\frac{\partial^2V_1}{\partial T_0\partial T_2}\right);$$

$$S_3 - \theta\frac{\partial^2S_3}{\partial X_0^2} - e_1\frac{\partial U_3}{\partial X_0} = \theta\left(2\frac{\partial^2S_2}{\partial X_0\partial X_1} + \frac{\partial^2S_1}{\partial X_1^2} + 2\frac{\partial^2S_1}{\partial X_0\partial X_2}\right) + \\ + e_1\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1}\right) + e_3\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_0}\right)^3.$$

Будуючи розв'язок цієї системи та використовуючи умову відсутності секулярних доданків у четвертому наближенні, можна переконатись, що амплітуда C задовольняє рівняння переносу

$$C_{T_1} + C_{X_1} v_g = 0,$$

рівняння відносно B має наступний вигляд

$$i\left(B_{X_2} + v_g^{-1} B_{T_2}\right) - \beta B_{T_1 T_1} + \gamma\left(2B|A|^2 + B^* A^2\right) = 0.$$

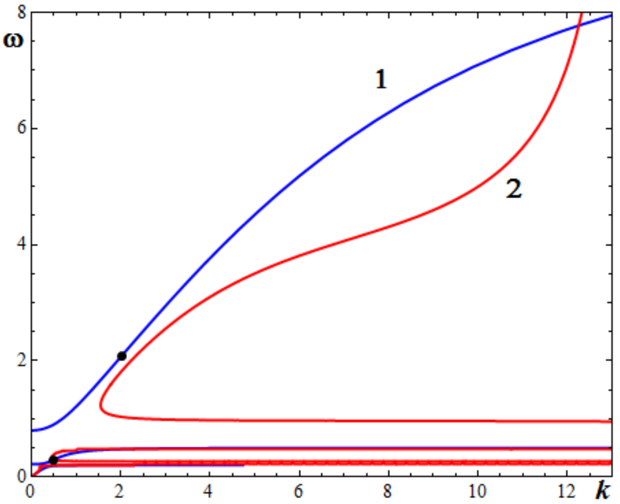

Рис. 2. Нульова ізолінія функції $F(k,\omega)$ (лінія 2) та дисперсійні криві (лінія 1, порівняти з кривими рис. 1). Параметр $\theta = 0.01$, інші параметри такі ж, як на рис. 1.

Амплітуда A задовольняє рівняння

$$i\left(A_{X_3} + A_{T_3} v_g^{-1}\right) + \beta_3 A_{T_1 T_2} + i\delta_3 A_{T_1 T_1 T_1} +$$
$$+ i\gamma_3\left(A^2 A^*_{T_1} - 2A_{T_1} |A|^2\right) = 0.$$

Останні два співвідношення утворюють замкнуту систему зв'язаних рівнянь, аналіз якої становить окрему непросту задачу.

Висновки

У дослідженнях в рамках нелокальної математичної моделі геосередовища з коливними включеннями, проаналізовано дисперсійні співвідношення лінеаризованої моделі, отримано нелінійне рівняння Шредінгера для опису динаміки обвідної квазігармонічного хвильового пакету, вказані умови модуляційної нестійкості та існування в знайденому рівнянні солітонних режимів, побудовано рівняння вищих наближень методу багатьох масштабів.

Отримані результати можуть становити інтерес при вивченні хвильових процесів у нелінійних діелектриках [13], рідинах з пухирцями газу [16], у дворівневих ланцюгах взаємодіючих частинок[17], які у довгохвильовому наближенні описують двокомпонентні середовища та інших матеріалах зі структурою [18].Серед питань, що досліджуються, особливий інтерес становлять задачі поширення хвильових пучків із збереженням форми на якомога більші відстані, самофокусування фронтів пучків, резонансна взаємодія хвильових пакетів, що є перспективним для використання в галузі передачі інформації, інтенсифікації видобутку мінеральних ресурсів тощо.

Література References

[1] М. А. Садовский, "Автомодельность геодинамических процессов"*Вестн. АНСССР*,№ 8,сс. *3–11*, 1986.

[2] V. A. Danylenko, T. B. Danevych, O. S. Makarenko, S. I. Skurativskyi and V. A. Vladimirov, Self-organization in nonlocal non-equilibrium media, Kyiv:Subbotin in-t of geophysics NASU, 2011.

[3] V. A Danylenko and S. I. Skurativskyi."Peculiarities of wave fields in nonlocal media",*Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, vol.16 no 2, pp.*165–178*,2016.

[4] Л. И. Слепян,"Волна деформаций в стержне с амортизированными массами",*МТТ*,№ 5, сс.*34–40*, 1967.

[5] В. А. Пальмов, "Об одной модели среды сложной структуры", *ПММ,* Вып. 4,сс.*768–773*,1969.

[6] В. А. Даниленко, С. І. Скуратівський, "Резонансні режими поширення нелінійних хвильових полів у середовищах з коливними включеннями"*Доповіді НАН України*,№ 11, сс. *108–112*, 2008.

[7] С. И. Скуратовский, И. А Скуратовская, "Локализованные автоволновые решения нелинейной модели сложной среды" *Техническая акустика*,[Електронний ресурс], Режим доступу: http://www.ejta.org 2010, 6.

[8] S. I. Skurativskyi, "Chaotic wave solutions in a nonlocal model for media with vibrating inclusions", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 198, no. 1, pp. *54–61*,2014.

[9] В. А. Даниленко, С. І. Скуратівський,"Хвильові розв'язки моделі середовища з осциляторами Ван дер Поля"*Динамические системы*,Т. 2(30), № 3-4,сс. *227 – 239*,2012.

[10] V. A. Danylenko and S. I. Skurativskyi, "Peculiarities of wave dynamics in media with oscillating inclusions",*International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 84, pp. *31–38*, 2016.

[11] V. A. Danylenko and S. I. Skurativskyi,"Dynamics of Waves in the Cubically Nonlinear Model for Mutually Penetrating Continua"*Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, vol 6(4),pp. *425–433*,2017.

[12] A. C. Eringen, Nonlocal Continuum Field Theories,NY, Springer-Verlag, 2002.

[13] Н. М. Рыскин, Д. И. Трубецков, Нелинейные волны.Ч.2, М. Наука, 2000.

[14] S. A. Rybak and O. M. Zozulya, "One-dimensional modulation instability of wave packets in media with resonant dispersion", *Physica A*,vol. 241, pp. *128-132*, 1997.

[15] S. I. Skurativskyi andI. A. Skurativska,"Propagation of quasi-harmonic wave packets in nonlocal media with oscillating inclusions", in *Proceedings of the 15th Conference "Mathematics in Technical and Natural Sciences"*,AGH, Koscielisko, Poland, 17-22 September 2017.

[16] Р. И. Нигматулин, Динамика многофазных сред. Ч.2., М.Наука, 1987.

[17] I. Sh. Akhatov,V. A. Baikov andK. R. Khusnutdinova,"Non-lineardynamicsofcoupledchainsofparticles",*J. Appl. MathsMech,*vol. 59, no. 3,pp. *353-361*, 1995.

[18] В. А. Пальмов, Колебания упруго-пластических тел. Москва, Наука, 1976.