Моделювання Еволюції Поодиноких Хвиль в Конструкційних Матеріалах

Ярема Рущицький
відділ реології, Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка,
Національна академія наук України
Київ, Україна
rushch@inmech.kiev.ua

Василь Юрчук
відділ реології, Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка,
Національна академія наук України
Київ, Україна
reol@inmech.kiev.ua

Modeling the Evolution of Solitary Waves in the Engineering Materials

Jeremiah Rushchitsky
Department of Rheology, S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine
Kyiv, Ukraine
rushch@inmech.kiev.ua

Vasyl Yurchuk
Department of Rheology, S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine
Kyiv, Ukraine
reol@inmech.kiev.ua

***Анотація*–Зметоювивченняеволюціїпочатковогопрофіля внаслідокслабкоїнелінійності матеріалутеоретично і чисельно проаналізовано поширення поздовжних хвиль з початковим гармонічним і дзвіноподібним профілями. поперечних хвиль з початковим профілем у вигляді функції Уіттекера, циліндричних хвиль з початковим профілем у вигляді функції Макдональда. Проведено порівняльний аналіз нелінійнихпоодиноких хвиль з різнимипочатковимипрофіляминаоснові отриманих авторами розв'язків, що включає вплив довжини хвилі (підошви), початкової амплітуди і параметрів матеріалу на еволюцію хвиль.**

***Abstract*–Tostudytheevolution of initial profile owing to weak nonlinearity of material, the propagation of longitudinal waves with the initial harmonic and bell-shaped profiles, transverse waves with initial profile in the form of Whittaker function, cylindrical waves with initial profile in the form of Macdonald function is analyzed theoretically and numerically. An comparative analysis is carried out for the solitary waves with different initial profiles basing on the obtained by authors solutions that includes an effect of the wave length (bottom), initial amplitude, and material parameters on the wave evolution.**

Ключові слова–поодинока пружна хвиля; нелінійне хвильове рівняння; числове моделювання; еволюція хвилі

Keywords–solitary elastic wave; nonlinear wave equation;numerical modeling; wave evolution

Теорія нелінійних хвиль в пружних матеріалах являє собоювеликийрозділнелінійноїтеоріїпружності,якийчерезвла-стиві теорії нелінійних хвиль математичні труднощінеєзакінченимдоцьогочасуірозвиваєтьсяубагатьохнауковихцентрахсвітовоїмеханіки. Зіншогобоку,сучаснапромисловістьвиробляєнезліченукількістьмашин, конструкцій,приладів,устаткування,якіабопостійнопрацюютьудинамічнихрежимах, абоуроботіякихвикористовуютьсямеханізмипоширенняхвиль, абовякихінодіспостерігаютьсяхвильовіпроцеси. Томузнанняпрохвилі є затребуванимпродуктомдля сучасноїпромисловості.Зпосередмаси різноманітних хвиль виділяються певнітипи,затре-буваність яких єособливою. Самедотакихвідносяться поодинокі хвилі,знання проякіє потрібнимфактично у всіхгалузях практичної діяльностілюдини – відмедицини до архітектури, від машинознавствадоісторії. Підтвердже-ння цього можна знайти у пошуковій системі Google за ключовими словами solitarywavesinmaterials.

Поодинокі хвилі маютьдавнюісторію.Вважається, що дослідження таких хвиль бере початок від спостережень Рассела (1838 рік) поодиноких хвиль в одному із водних каналів Англії. З тихпір поодинокі хвилі традиційно вивчаються в рамках гідромеханіки. Переважаюча кількість результатів відноситься до особливого типу поодиноких хвиль – солітонів. Існуєбагатомонографій і оглядівнацю тему.Поодинока хвиля в даномудослідженнірозуміється як хвиляззалежним відпросторовихкоординатпрофілем, що концентрується в обмеженій частині простору і здебільшого має вигляд одногоабокількох горбів. Відмінність так означеної поодинокої хвилі від солітону полягає у тому, щовонавзаємодієсамазсобоюі іншими хвилями,змінюючи при поширенні свій початковий профіль.

Данедослідження проведене в рамкахнелінійноїтеорії пружності для конкретного потенціалу Мурнаґана. Вінє кубічним щодотензорадеформацій ізаписуєтьсячерезком-

понентинелінійноготензорадеформацій Ґріна $\varepsilon_{ik}=(1/2)\times$ $\times\left(u_{i,k}+u_{k,i}+u_{m,i}u_{m,k}\right)$ у вигляді $W(\varepsilon_{ik})=(1/2)\lambda(\varepsilon_{mm})^2+\mu(\varepsilon_{ik})^2$ $+(1/3)A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km}+B(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm}+(1/3)C(\varepsilon_{mm})^3$, або через перші алгебраїчні інваріанти I_k цього тензора

$$W(I_1,I_2,I_3)=\frac{1}{2}\lambda I_1^2+\mu I_2+\frac{1}{3}AI_3+BI_1I_2+\frac{1}{3}CI_1^3$$

$(I_1=\mathrm{tr}(\varepsilon_{ik}),\ I_2=\mathrm{tr}\left[(\varepsilon_{ik})^2\right],\ I_3=\mathrm{tr}\left[(\varepsilon_{ik})^3\right],\ \lambda,\mu$ є пружними постійними Ляме, $A,\ B,\ C$ - постійними Мурнаґана).

МодельМурнаґанавважаєтьсякласичноювнелінійнійтеорії гіперпружнихматеріалів, вонавраховуєвсіквадратичні і кубічні складові і описує деформування великого класу конструкційних та інших матеріалів.

ВрамкахмоделіМурнаганаотриманорізнітипинелінійни х хвильових рівнянь. Їх особливістю є те, що ліві частини єкласичними лінійними хвильовимирівняннями.Правічастини включають лише квадратично нелінійні доданки. Ця труктура виявилася дуже зручною в наближених дослідженняхпоширення хвиль. Другаособливість полягає в тому, що, навідмінувідлінійних хвильових рівнянь, нелінійні рівняння є зв'язаними і цей зв'язок не є симетричним.

Поодинокіхвилі в конструкційнихматеріалахвивчали-ся експериментальнодоситькваліфіковано.Нижчепоказа- но один з класичних результатів Белла: радіальнізміщен- ня при поздовжному ударі кульки в стержень, t - час в мкс, x -відстань від торця, по якому відбувся удар. Для кожного перетину, який знаходиться на вказаній відстані на осі стержня, отримано графік профілюхвилі радіальногозміщення [1].

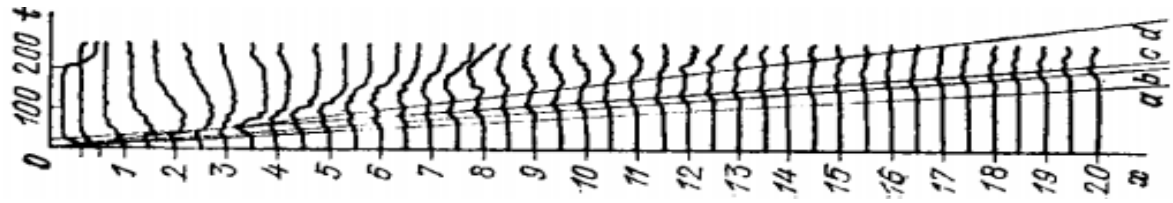

Рис. 1. Хвиля радіального зміщення [1]

Далідонелінійнихвильовихрівняньзастосовувався наближений метод, оснований на перетворенні хвильового рівняння і обмеженні на градієнт зміщення.Розглянемодля прикладу нелінійне рівняння, що описує поздовжну плоску хвилю $u_{1,tt}-(v_L)^2u_{1,11}=(N_1/\rho)u_{1,11}u_{1,1}$. Припустимо, що поодинока хвиля з початковим профілем у вигляді $F(ax_1)$ поширюється у такомуж вигляді, але функція F вже залежить від фазової змінної $\sigma=a(x_1-vt)$, тобто $u(x_1,t)=F\left[a(x_1-vt)\right]$, де $v=\sqrt{1+\alpha u_{1,1}}$ - швидкість поширення хвилі, $\alpha=\left[N_1/(\lambda+2\mu)\right]$. Далі корінь $\sqrt{1+\alpha u_{1,1}}$ розкладемоза умови $|\alpha u_{1,1}|\square\ 1$за першими двома наближеннями і запишемо розв'язок у вигляді $u_1(x_1,t)\cong F\left[a\left(x_1-v_Lt-(1/2)\alpha u_{1,1}t\right)\right]$.

Тоді отриманий розв'язок розкладемов рядТейлора замалим параметром $\delta=-(1/2)\alpha a v_L u_{1,1}t$ в околі постійногозначення фази $\sigma=a(x_1-v_Lt)$: $u_1(x_1,t)\approx F(\sigma)+F^{/}(\sigma)a\delta=$ $=F(\sigma)-(1/2)\alpha a^2v_Lt\left[F^{/}(\sigma)\right]^2$.

Отримане наближене представлення розв'язку має загальний характер і для різних конкретно вибраних функцій описуєодин і тойженелінійний хвильовий ефект – виникнення (окрім першої гармоніки) другої гармоніки чи подібних до неї нових доданків і збільшення амплітуди другого доданка з часом поширення хвилі.

Далі показано коротко результати вивчення еволюції поодиноких хвиль з чотирма різними початковими профілями.

Гармонічний профіль. Наближений розв'язок для плоскої поздовжної хвилі має наступний вигляд[2]:

$$u_1(x_1,t)=a^oe^{-ik_L(x_1-c_Lt)}-(1/2)c_Lt\alpha(k_L)^2(a^o)^2e^{-2ik_L(x_1-c_Lt)}.$$

На рис. 2 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшлахвиля, для наступнихзначеньпараметрів: матеріал – алюміній, $\alpha=-16{,}811$, $a^\circ=1\cdot10^{-5}$ $\omega=0{,}8\cdot10^5$.

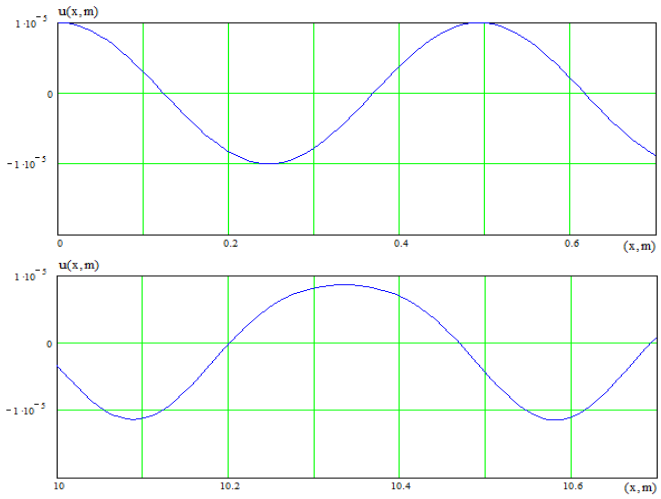

Рис. 2. . Графіки еволюції гармонічної хвилі

Із зіставленняРис.2 та відповідних рисунків, отриманих класичним методом послідовних наближень [2], випливає що еволюція початкового профіля хвилі відбуваєть-сязпрактично однаковимякісним результатом, однакшвидкість еволюції різна. Це пов'язано зтим, щометодиосно- вані на дещо відмінних обмеженнях.

Дзвіноподібний профіль (у формі функції Гаусса чиЧебишова-Ерміта нульового порядку). Наближений розв'язок для плоскої поздовжної хвилі має наступний вигляд[2,3]:

$$u_1(x_1,t)=A^o e^{-\left[a^2(x_1-c_Lt)^2/2\right]}-(1/2)t\alpha c_L a^2(x_1-c_Lt)^2\left(A^o\right)^2 e^{-a^2(x_1-c_Lt)^2}$$

На Рис. 3 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, при наступних значеннях параметрів: ма-теріал - алюміній $\alpha=-16{,}811,\ a_0=5\cdot10^{-3}$, параметр, що визначає довжину підошви хвилі $a=20$. На нижньому гра- фіку зіставлено початковий і деформований профілі

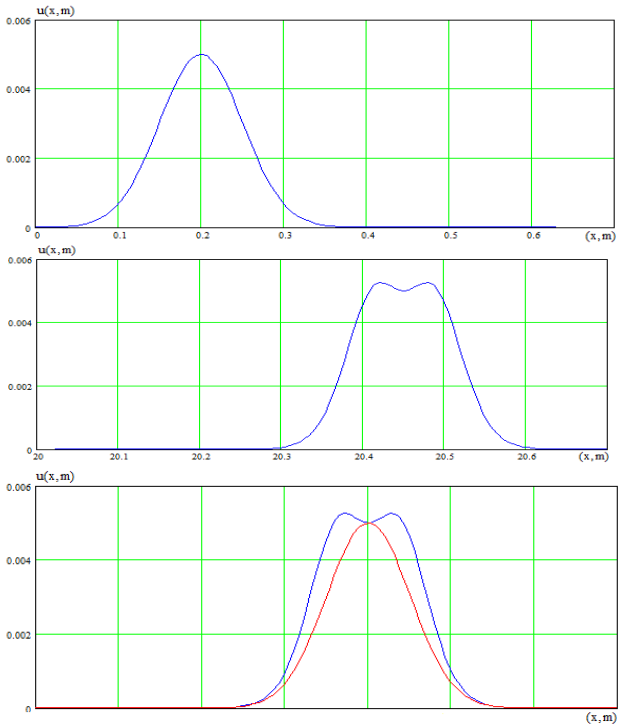

Рис. 3. Графіки еволюції дзвіноподібної хвилі

З графіків Рис. 3 випливає, щодисторсія початковогопрофіля зростає зі збільшенням відстані, яку пройшла хвиля. Отже, вплив «другої гармоніки» на еволюція початкового профілю хвилі достатньо великий. Аналогічно проведені дослідження для різного типу матеріалів, різної довжини хвилі та різного максимального значення амплітуди. Всі отримані графіки свідчать, що дисторсія початкового профіля є суттєвою. Швидкість еволюції залежить від хара- ктеристик матеріалу і профіля.

*Профіль у виглядіфункціїУіттекера.*Наближенийрозв'я-зокдляплоскоїпоздовжноїхвилімаєнаступний вигляд[4]:

$$u(x,t)=a_0W_{1/4;1/4}\left(a(x-c_Lt)\right)-(1/2)t\alpha c_L(a)^2(a_0)^2\times$$
$$\times\left(\left(\frac{1}{4a(x-c_Lt)}-\frac{1}{2}\right)W_{1/4,1/4}\left(a(x-c_Lt)\right)\right)^2$$

На рис. 4 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для наступних значень параметрів: матеріал - алюміній $\alpha=-16{,}811,\ a_0=1\cdot10^{-5}$, параметр, що визначаєдовжинупідошвихвилі $a=30$. На нижньому графіку зіставлено початковий і деформований профілі.

Отже одинична хвиля з несиметричнимпрофілем у вигляді функції Уіттекера еволюціонує таким чином: зменшує-ться початкова амплітуда, ліва та права частини горба поступово стають крутішими, профільпоступовозміщуєть-сявправо,спотворенийпрофільнагадуєдзвіноподібний. Підошва хвилі у всіх випадках залишається незмінною.

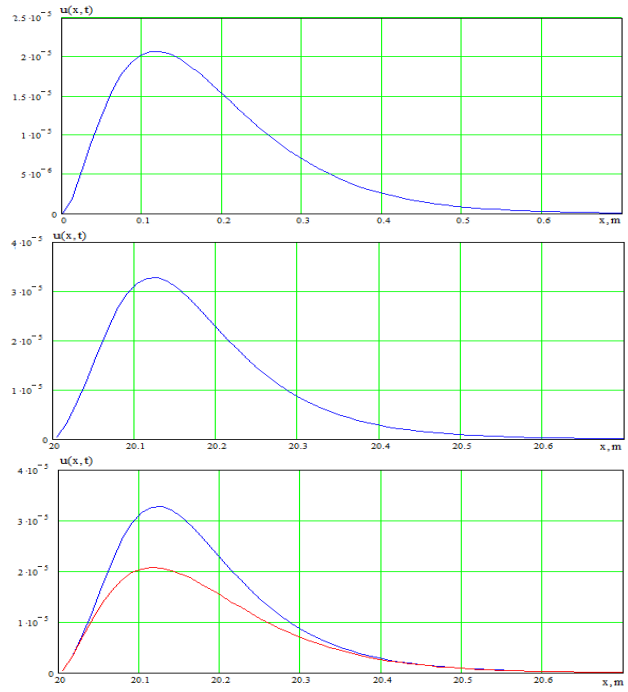

Рис. 4. Графіки еволюції хвилі з профілем функції Уіттекера

Порівняння еволюції симетричної дзвіноподібної хвилі та хвилі з несиметричним профілем у вигляді функції Уіттекера показує, що профілі першої змінюється симетрично, тоді як профіль другої – несиметрично.

*Дзвіноподібний профіль.*Однак хвиля плоска поперечна.

Нелінійне хвильове рівняння поширення має вигляд[5]:

$\rho u_{3,tt}-\mu u_{3,11}=N_4u_{3,11}\left(u_{3,1}\right)^2$ (права частина містить кубічну нелінійність)

$$u_3(x_1,t)\approx u_3^o e^{-\left(\sigma^o\right)^2(x_1-v_Tt)^2/2}+$$
$$+(1/2)t\alpha_3v_T\left(\sigma^o\right)^3(x_1-v_Tt)^3\left(u_3^o\right)^3e^{-3\left(\sigma^o\right)^2(x_1-v_Tt)^2/2}.$$

На Рис. 5 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, що відповідають розв'язку (13) для плос-кої поперечної хвилі дзвіноподібного профіля для таких значень параметрів: матеріал – алюміній, $\alpha_3 = -82,648;\ u_3^o = 8\cdot 10^{-3}$

,параметр,щовизначаєдовжинупідошви хвилі $\sigma^o = 0,8$.

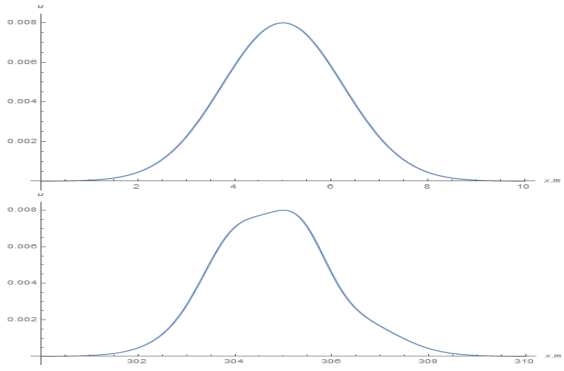

Рис. 5. Графіки еволюції дзвіноподібної хвилі

Графіки Рис. 5 свідчать про суттєву еволюцію початкового профіля хвилі. При цьому ширина горба і значення максимальної амплітуди залишаються незмінними. Порів-няння зі зміною профіля дзвіноподібної поодинокої поздо-вжної хвилі показує, що дзвіноподібна поперечна хвиля змінює свій профіль дещо по–іншому. Відмінності в ево-люції поперечної і повздовжної хвилі, що викликані від- мінностями нелінійного деформування – кубічна для по-перечного та квадратична для поздовжного.

Профіль у виглядіфункціїМакдональда. Однакхвиляцилі- ндрична, яка поширюється від циліндричної порожнини вздовж радіуса циліндра і залежить від радіуса і часу. Не-лінійне хвильове рівняння є таким:

$$(c_L)^2\left(1-\tilde{N}_1 u_{r,r}\right)\left(u_{r,rr}+\frac{1}{r}u_{r,r}-\frac{u_r}{r^2}\right)-u_{r,tt}=0\,.$$

Наближенийрозв'язок має наступний вигляд: $u_r(r,t)\approx a^o K_0\left(a\left(r-c_L t\right)\right)-(1/2)\tilde{N}_1 a c_L t (a^o)^2\left[K_1\left(a\left(r-c_L t\right)\right)\right]^2$.

Підставляючи в останню формулу наближені значення функцій K_0 і K_1 отримаємо розв'язок:

$$u_r(r,t)\approx a^o\sqrt{\frac{2}{\pi a\left(r-c_L t\right)}}e^{-a\left(r-c_L t\right)}-(1/2)\tilde{N}_1 a c_L t (a^o)^2\times$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{\left(a\left(r-c_L t\right)\right)^3}}+\frac{1}{\sqrt{a\left(r-c_L t\right)}}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-a\left(r-c_L t\right)}\right]^2.$$

На Рис. 6 показані графіки поширення хвилідля таких значень параметрів: алюміній $\tilde{N}_1 = -16,811;\ a_0 = 5\cdot 10^{-3}$ та параметр, що відповідаєдовжині підошви хвилі $a = 5$.

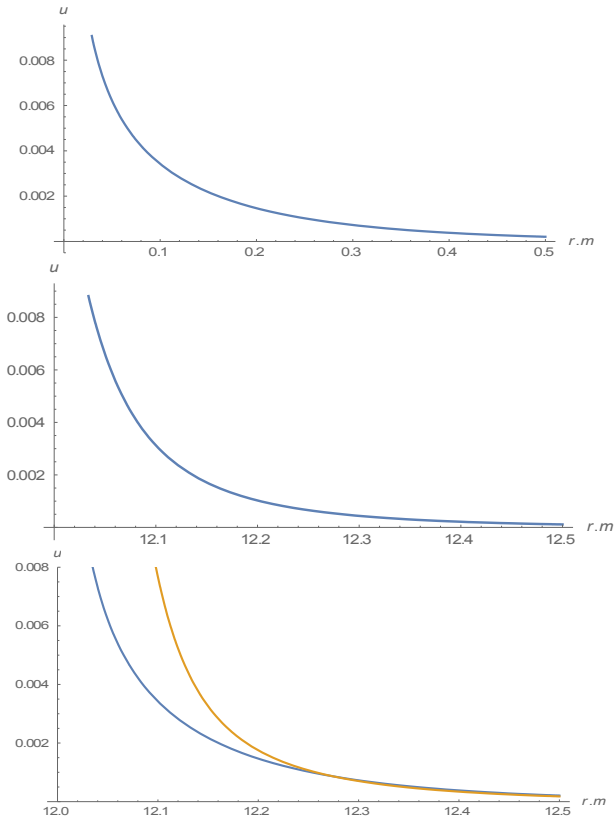

Рис. 6. . Графіки еволюції хвилі з профілем функції Макдональда

На нижньому графіку Рис. 6 зіставлено початковий і дефо-рмованийпрофіль.Графіки свідчать про суттєву еволюцію початкового профіля і зміну параметрів хвилі, та значну зміну значення максимальної амплітуди.

ЛІТЕРАТУРАREFERENCES

[1] Flügge's Encyclopedia of Physics. Vol. VIa/I. Mechanics of solids. Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[2] J.J. Rushchitsky, Nonlinear Elastic Waves in Materials. Series: Foundations of engineering mechanics, Heidelberg: Springer, 2014.

[3] J.J.Rushchitsky, V.N.Yurchuk,"An Approximate Method for Analysis of Solitary Waves in Nonlinear Elastic Materials",Int. Appl. Mech.. 52, N3, P. 282-289. 2016.

[4] V.N.Yurchuk,J.J.Rushchitsky,"NumericalAnalysisofEvolution ofPlaneLongitudinalNonlinearElasticWaveswithDifferent Initial Profiles",Int. Appl. Mech.,53,N1,P.104-121.2017.

[5] V.N.Yurchuk, J.J.Rushchitskyб"Evolution of SV-Wave with Gaussian Profile",Int. Appl. Mech.,53, N3, P.300 -304.2017.

[6] V.N.Yurchuk, J.J. Rushchitsky,"Numerical Analysis of Evolution of Solitary Cylindrical Radial Wave with an Initial Profile in the Form of Macdonald Function",Int. Appl. Mech.,54, N3,P.312 – 317. 2018.