Зсувне Пластичне Відшаровування Прямокутного Включення з Вільною від Контакту Одною Парою Граней

Василь Кривень
кафедра математичних методів в інженерії
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя
Тернопіль, Україна
kryvenv@gmail.com

Володимир Валяшек
кафедра математичних методів в інженерії
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя
Тернопіль, Україна
valiashek@gmail.com

Любов Цимбалюк
кафедра математичних методів в інженерії
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя
Тернопіль, Україна
lubovtsymbaliuk@gmail.com

Андрій Бойко
кафедра математичних методів в інженерії
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя
Тернопіль, Україна
boyko.a111@gmail.com

Shearing Plastic Peeling of Rectangular Inclusion with Contactless one Plane Pair

VasylKryven
Department of Mathematical Methods in Engineering
Ternopil Ivan Puluj National Technical University
Ternopil, Ukraine
kryvenv@gmail.com

VolodymyrValiashek
Department of Mathematical Methods in Engineering
Ternopil Ivan Puluj National Technical University
Ternopil, Ukraine
valiashek@gmail.com

LiubovTsymbaliuk
Department of Mathematical Methods in Engineering
Ternopil Ivan Puluj National Technical University
Ternopil, Ukraine
lubovtsymbaliuk@gmail.com

Andriy Boyko
Department of Mathematical Methods in Engineering
Ternopil Ivan Puluj National Technical University
Ternopil, Ukraine
boyko.a111@gmail.com

***Анотація*—Знайдено чисельно-аналітичний розв'язок задачі про квазістатичне пластичне відшаровування жорсткого прямокутного включення, одна пара паралельних граней якого вільна від контакту із основним середовищем, а друга до навантаження перебувала з ним у ідеальному механічному контакті. Показано, що розвиток пластичних деформацій за схемою односмугового пластичного відшаровування можливий лише у випадку, коли довжина вільної від контакту пари граней не менша довжини другої їх пари.**

***Abstract*—The numerical-analytic solution of the problem for quasi-static plastic peeling of the rigid rectangular inclusion is found, one pair of parallel planes free from contact with the basic medium, and the second one to the load is in the ideal mechanical contact with it. It is shown that the development of plastic deformations according to the scheme of single-band plastic peeling is possible only in case when the length of the contactless plane pair is not less than the length of their second pair.**

Ключові слова—прямокутне включення, пластичне відшаровування, аналітичний розв'язок, конформне відображення

Keywords—rectangular inclusion, plastic exfoliation, analytical solution, conformal mapping

I. Вступ

Дослідження пружно-пластичного напружено деформованого стану (НДС) тіл з урахуванням пластичного відшаровування включень залишається важливою задачею механіки. Актуальними і поки недостатньо вивченими залишалися пружно-пластичні поля в околі включень та вирізів форм, відмінних від математичних розрізів, чи безмежно тонких включень [1], наприклад, прямокутних щілин, включень прямокутної форми [2-4, 6]. Однак, саме такі концентратори часто з'являються в результаті технологічних процесів і часто є конструктивно необхідними [5]. Важливими та недостатньо вивченими залишаються задачі дослідження НДС тіл із включеннями за умови їх неідеального механічного контакту з середовищем. Недосконалий зв'язок на межі включення–середовище є додатковим джерелом концентрації напружень, що може призводити до міжфазних пластичних розшарувань і, як наслідок, втрати міцності чи функціональних характеристик механічної конструкції.

II. Постановка задачі

Дослідимо пластичне відшаровування жорсткого прямокутного включення $|x|\le a; |y|\le b; |z|<\infty$ (рис.1) у ідеально пружно-пластичному середовищі під дією квазістатично зростаючого навантаження $\tau_{xz}=0; \tau_{yz}=\tau_\infty$, прикладеного на нескінченності. Включення приймаємо абсолютно жорстким,його горизонтальні грані вільними

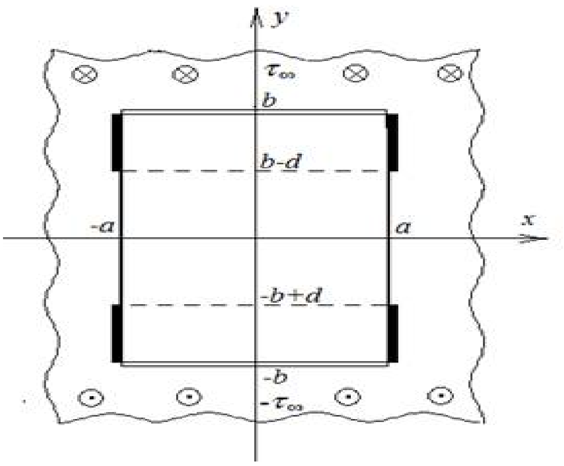

Рис. 1. Поперечний переріз тіла. Потовщені відрізки – шари пластичного відшаровування.

від контакту із середовищем, а вертикальні початково ідеально з ним зчеплені. Досліджуватимемо пластичне відшаровування включення, зумовлене розвитком від вершин включення пластичних шарів вздовж вертикальних граней включення. Задача полягає у визначенні НДС середовища і довжини пластичних шарів у залежності від величини навантаження τ_∞. Зсувна границя текучості основного середовища рівна k.

III. Формалізація, аналіз і розв'язок задачі

Поза включенням тіло перебуває у пружному стані, а складена із компонент напружень функція $\tau(\zeta)=\tau_{yz}(x,y)+i\tau_{xz}(x,y)$ є аналітичною та однолистою області $D=(\{x>0,y>b\}\cup\{x>a,y>0\})\cap\{x>0,y>0\}$ і задовольняє на її межі таким умовам:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\tau(\zeta)=0,\ (\zeta=iy,\ y>b);\\
&\operatorname{Re}\tau(\zeta)=0,\ (\zeta=x+ib,\ 0<x<a);\\
&|\tau_1(\zeta)|=k,\ (\zeta=a+iy,\ b-d<y<b);\\
&\operatorname{Im}\tau(\zeta)=0,\ (\zeta=a+iy,\ 0<y<b-d);\\
&\operatorname{Im}\tau(\zeta)=0,\ (\zeta=x,\ 0<y<+\infty);\\
&\lim_{\zeta\to\infty}\tau(\zeta)=\tau_\infty
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Крім того, поза відрізком *CK* межі області *D*повинна виконуватися умова $|\tau(\zeta)|<k$, яка означає, що умова пластичності досягається тільки в точках смуг пластичного відшаровування.

Внаслідок вказаних умов функція $\tau(\zeta)$ конформно відображає область *D*на півкруг із розрізом (рис. 2, область *G*). Стосовно відображення $\tau(\zeta)$ слід зробити таке зауваження: із постановки задачі випливає, що у чотирьох точках *A*, *B*,*C*, *M* границі області *D* значення функції $\tau(\zeta)$ наперед відомі та відповідно дорівнюють τ_∞, 0, *-ik*, 0. За такої умови припущення про повну визначеність конформного образу області *D* у площині τ означало б існування конформного відображення заданої області *D* площини ζ на задану область *G* площини τ із чотирма фіксованими точками на межі цих областей, що суперечить теоремі Рімана про існування конформного відображення [7]. Для забезпечення існування відображення слід увести один параметр в образ області *D*.Єдиним способом уведення такого параметра є припущення невизначеності довжини розрізу

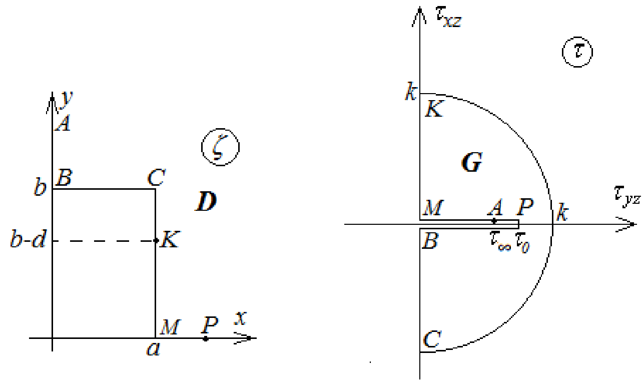

Рис. 2. Області конформних відображень у площинах ζ і τ.

$0 < \operatorname{Re}\tau < \tau_0; \operatorname{Im}\tau = 0 \ (\tau_0 > \tau_\infty)$ півкруга G. Тоді, відповідним виборомпараметра τ_0 можна забезпечити потрібні координати вказаних чотирьох точок на межі областей D та G, а, отже,й існування наведеного на рис. 2 відображення. Фізично це означає, що напруження τ_{yz} на ділянці MA осі абсцис немонотонне і досягає у деякій точці P цієї ділянки свого максимального значення $\tau_0 = \max\limits_{[a,+\infty)} \tau_{yz}(x,0) > \tau_\infty$.

Відображення $\tau(\zeta)$ шукатимемо в параметричній формі:

$$\tau = \tau(t), \zeta = \zeta(t) \quad (t \in H = \{\operatorname{Im} t > 0\}), \tag{2}$$

увівши площину допоміжного комплексного параметра t , так, аби відповідним точкам межі областей D і G відповідала одна і та ж точка на межі області H , рис. 3.

Область D є прямолінійним прямокутним чотирикутником і тому функцію $\zeta = \zeta(t)$ можна знайти за допомогою перетворення Крістофеля-Шварца:

$$\zeta = a + ib + \frac{1}{BC}\int_0^t \frac{\sqrt{\eta}\, d\eta}{\sqrt{(\eta+1)(\eta - t_M)}}\,, \tag{3}$$

де $BC = \int\limits_{-1}^{0} F(\eta)d\eta$.

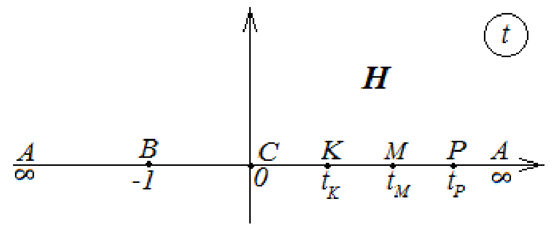

Рис. 3. Область H у площині допоміжного комплексного параметра t .

Функція (3) реалізуватиме подане на рис. 2, 3 відображення області H на область D, якщо параметр t_M підібрати так, аби виконувалися потрібні метричні співвідношення у областіD:

$$\frac{BC}{CM} = \frac{a}{b}\,. \tag{4}$$

Оскільки $CM = \int\limits_0^{t_M} F(\eta)d\eta$, то для знаходження t_M приходимо до рівняння:

$$a\int_0^{t_M} F(\eta)d\eta = b\int_{-1}^{0} F(\eta)d\eta\,, \tag{5}$$

розв'язаного тут методом ітерацій з допомогою такого алгоритму:

$$t_M^{(j+1)} = t_M^{(j)} - \alpha \frac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{BC^{(j)}}{CM^{(j)}}}{\dfrac{a}{b} + \dfrac{BC^{(j)}}{CM^{(j)}}}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

де $t_M^{(j)}$ – j-е наближення розв'язку рівняння (5), $BC^{(j)}$, $CM^{(j)}$ – величини відповідно рівні $\int\limits_{-1}^{0} F(\eta)d\eta$ і $\int\limits_0^{t_M^{(j)}} F(\eta)d\eta$, у яких у підінтегральній функції t_M замінено на $t_M^{(j)}$; α – додатне число, що визначає швидкість збіжності алгоритму (6), якийдля достатньо малих α і довільного $t_M^{(0)} > 0$ збігається як геометрична прогресія.Тут приймалися $t_M^{(0)} = 1$, $\alpha = b/a$.

Для співвідношень $a/b = 1; 2; 5; 10$ отримано такі значення параметраt_M : 1; 0.53017;0.22686; 0.11793, колимодуль різниці обох частин рівняння (5) не перевищує 0.0001, що достатньодля забезпечення потрібної точності.

Функцію $t(\tau)$ можна отримати композицією елементарних відображень. Після відповідних перетворень і спрощень отримуємо:

$$t = f_1(\tau) f_2(\tau) / f_3(\tau)\,, \tag{7}$$

де $f(\tau) = \sqrt{(k^4 - \tau_0^2\tau^2)(\tau_0^2 - \tau^2)}$ - аналітична функція у комплексній площині t, розрізаній вздовж відрізка $[-\tau_0;\tau_0]$ та променів $[-\infty;-k/\tau_0]$, $[k/\tau_0;+\infty;]$ яка набуває дійсних додатних значень на верхньому березі розрізу $[-\tau_0;\tau_0]$; $f_1(\tau) = \tau_0(k^2 - \tau_\infty^2) - f(\tau)$,

$f_2(\tau) = 2kf(\tau) - (k^2 + \tau_0^2)(k^2 - \tau^2)$,

$f_3(\tau) = (k - \tau_0)^2\left((k^2 - \tau_\infty^2) f(\tau) - c(k^2 - \tau^2)\right)$.

Поклавши в формулі (7)τ відповідно рівним $ik, 0, \tau_0$, отримаємо координати точок M, K і P у площині t:

$$tM = \frac{(k+\tau_0)^2\left(\tau_0(k^2 - \tau_\infty^2) - \sqrt{(\tau_0^2 - \tau_\infty^2)(k^4 - \tau_0^2\tau_\infty^2)}\right)}{(k-\tau_0)^2\left(\sqrt{(\tau_0^2 - \tau_\infty^2)(k^4 - \tau_0^2\tau_\infty^2)} + \tau_0(k^2 - \tau_\infty^2)\right)};$$

$$tK = \frac{4k(k^2 - \tau_\infty^2)(k^2 + \tau_0^2)}{\left(2k\sqrt{(\tau_0^2 - \tau_\infty^2)(k^4 - \tau_0^2\tau_\infty^2)} + (k^2 - \tau_\infty^2)(k^2 + \tau_0^2)\right)} \times$$

$$\times \frac{\left(\tau_0(k^2 - \tau_\infty^2) - \sqrt{(\tau_0^2 - \tau_\infty^2)(k^4 - \tau_0^2\tau_\infty^2)}\right)}{(k^2 - \tau_\infty^2)(k - \tau_0)^2};$$

$$tP = \frac{(k^2 - \tau_\infty^2)(k^4 - \tau_0^4)\left(\tau_0(k^2 - \tau_\infty^2) - \sqrt{(\tau_0^2 - \tau_\infty^2)(k^4 - \tau_0^2\tau_\infty^2)}\right)}{(k-\tau_0)^2(k^2 - \tau_\infty^2)(k^2 - \tau_0^2)\sqrt{(\tau_0^2 - \tau_\infty^2)(k^4 - \tau_0^2\tau_\infty^2)}(+\tau_0)}.$$

Прообрази точок M і Kпри відображенні $\tau = \tau(t)$ позначено якtK, tMна відміну від їхніх прообразів t_K , t_M при відображенні $\zeta = \zeta(t)$.

Розв'язавши рівність (7) відносно τ , знаходимо першу із функцій (2):

$$\tau = \frac{(k^2+\tau_\infty^2)\sqrt{t(t-tK)}-(k^2-\tau_\infty^2)(t-t_0)}{2\tau_\infty\sqrt{(t+1)(t-tM)}}, \tag{8}$$

Тут під $\sqrt{t(t-tK)}$ та $\sqrt{(t+1)(t-tM)}$ слід розуміти аналітичні функції у комплексній площині t, розрізаній відповідно вздовж відрізків $[0;tK]$ та $[-1;tM]$і рівні $t+o(t)$ коли $t\to\infty$.

Парафункцій (3),(8) визначатиме наведене на рис. 2 відображення $\tau=\tau(\zeta)$, якщо кожна точка площини t матиме спільний образ при відображеннях $\tau=\tau(t)$ і $\zeta=\zeta(t)$. І, зокрема, коли виконуватиметься рівність

$$t_M = tM \tag{9}$$

Рівняння (9) матиме розв'язок лише за умови:

$$tM_{\min} < t_M < tM_{\max}$$

і тому, розвиток пластичних деформацій за схемою односмугового пластичного відшаровування, наведеною на рис. 1, може розпочинатися тільки для таких включень, висота яких не перевищує їхньої ширини:($a>b$) і за квазістатичного збільшення навантаження τ_∞ може продовжуватися за цією схемою тільки поки $tM_{\min}<t_M$. Максимально допустиме навантаження $\tau_\infty = T$ для односмугового відшаровування знаходимо із рівняння $tM_{\min} = T$:

$$T = k\sqrt{\frac{t_M+2-2\sqrt{t_M+1}}{t_M}}.$$

За відомою координатою tKкінцевої точки пластичного шару в площині t знаходимо довжину пластичного шару із формули (3), рис. 4.

$$d = \frac{1}{BC}\int_0^t F(\eta)d\eta .$$

Для включень із співвідношеннями $a/b = 1;\,2;\,5;\,10$ значення кричного навантаження T є такими: 0.4142; 0.3255; 0.2250; 0.1669.

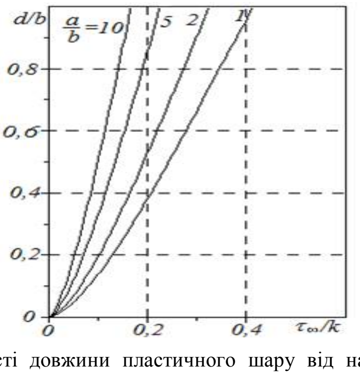

Рис. 4. Залежності довжини пластичного шару від навантаження для декількох форм включень.

Відсутність механічного зв'язку включення з основним середовищем вздовж горизонтальної пари граней дуже суттєво впливає на хід відшарування. Затакого самого навантаження прямокутневключення, яке перебувало в ідеальному механічному контакті з середовищем до навантаження [8], відшаровується на порядок повільніше.

Висновки

Визначено антиплоский НДСпри зсувному деформуванні необмеженого ідеально пружно-пластичного тіла із жорстким включенням, одна пара граней якого вільна від контакту із основним середовищем, за умови пластичного відшаровування вздовж другої пари граней включення, яка до навантаження знаходилася в ідеальному механічному контакті з основним середовищем. Досліджено квазістатичне відшаровування під монотонним навантаженням, прикладеним на нескінченності і діючим паралельно до вільних граней. Отримано цікавий, неочікуваний результат, що в рамках розглянутого тут випадку пластичне відшаровування за односмуговою схемоюможливе лише для включень, довжина вільних від контакту граней яких не перевершує довжини пари граней, зв'язаних із середовищем. Показано, що відсутність контакту на одній парі граней дуже суттєво прискорює процес відшаровування, що негативно проявлятиметься на міцності тіла із заповненою порожниною за недосконалого адгезійного зв'язку заповнювача і середовища.

Література References

[1] Кривень В.А., Сулим Г.Т. Розвиток зон пластичностібіля односторонньо відшарованого тонкого включення при зсуві, паралельному включенню // Машинознавство. – 2002 – №1 – С.26-30.

[2] Kryven' V. A., Valyashek V. B. Initial stage of plastic exfoliation of a rectangular inclusion under conditions of one-sided contact with a medium. // Journal of Mathematical Sciences. 2010. – Vol. 171, No. 4. P. 107–116.

[3] Кривень В.А. Пластичне відшарування жорсткого півбезмежного включення скінченної ширини під зсувним навантаженням за наявності міжфазних тріщин / В.А. Кривень, А.Р. Бойко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. – Вип. 19. - С. 84–92.

[4] Кривень В. А. Початкова стадія пластичного відшаровування прямокутного включення за умови однобічного контакту з середовищем / В. А. Кривень, В. Б. Валяшек // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2010. – Том 53, № 4. – С. 107-116.

[5] Саврук М. П. Механіка руйнування та міцність матеріалів [Текст] : довідн. посіб. / М.П. Саврук, А. Казберук ; за заг. ред. В. В. Панасюка ; Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами. – Львів : СПОЛОМ, 2012. - 384 с. (78).

[6] Силованюк В. П. Деформація та руйнування матеріалів біля включень під статичним навантаженням тіла / В. П. Силованюк, Р. Я. Юхим // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2007. – № 6. – С. 31–35.

[7] Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. Пер. с нем. К. М. Фишмана под ред. Л. И. Волковыского, Москва: ИЛ, 1963. –406с.

[8] Кривень В.А., Гнатюк О.Б., Гром'як Р.С. Антиплоска деформація ідеально пружнопластичного тіла з жорстким прямокутним включенням // Фіз-хім механіка матеріалів . – 2000. –№6. – С. 19-23.