Задачі Динаміки Сумісного Руху Резервуару з Рідиною

Олександр Константінов
відділ математичних проблеммеханіки та теорії керування Інституту математики НАН України
Київ, Україна
akonst.im@ukr.net

Problems of the Dynamics of the Joint Motion of a Reservoir With a Liquid

Oleksandr Konstantinov
Department for Mathematical Methods of Mechanics and Control Theory
Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine
Kiev, Ukraine
akonst.im@ukr.net

***Анотація*—В роботі розглянуто дві постановки задачі щодо динаміки руху механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею». Перша постановка задачі описує узагальнення задачі Фарадея з можливістю горизонтального переміщення резервуару за рахунок коливань вільної поверхні рідини. Друга постановка задачі описує алгоритм побудови керування системою для забезпечення руху резервуару за заданим законом.**

***Abstract*—Two problems of the dynamics of the mechanical system "reservoir - liquid with free surface" are considered. The first statement describes the generalization of the Faraday problem with the possibility of horizontal displacement of the reservoir due to the fluctuations of the free surface of the liquid. The second statement describes the algorithm for building control of the system to provide the movement of the reservoir according to the prescribed law.**

Ключові слова—задача Фарадея, параметричний резонанс, додаткова ступінь вільності, зони нестійкості, зворотний зв'язок, модальне керування

Keywords—Faraday's problem, parametric resonance, added degree of freedom, unstable area, feedback, modal control

I. Вступ

Резервуари з рідиною є невід'ємною складовою частиною космічних апаратів з рідинним ракетним двигуном, літаків, гелікоптерів, нафтосховищ та реакторів, що використовуються у хімічній та нафтохімічній промисловості. Останнім часом поширюється інтерес до задач динаміки та керування обмеженими об'ємами рідини у зв'язку з проблемами транспортування та збереження у складних умовах дії вібраційних, імпульсних, сейсмічних, вітрових та інших навантажень. З практики відомо, що баки з рідиною у літаках, танкерах, залізничних та автомобільних цистернах суттєво впливають на стійкість та якість керування транспортними засобами. Найменш дослідженими в цій галузі залишаються задачі, пов'язані з динамікою системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею», коли система здійснює вертикальні рухи за заданим законом або під дією зовнішніх сил і при цьому має додаткові ступені вільності. Таку задачу ми будемо називати узагальненою задачею Фарадея на відміну від класичної задачі [4], в якій резервуар може рухатись тільки вертикально. Друга постановка, яка описана в роботі, пов'язана з побудовою керування резервуаром, яке забезпечить його рух за заданим законом..

II. Математична модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею».

Розглянемо циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, яке може рухатись поступально під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Відповідно до методики роботи О.С. Лимарченко [2], математична модель механічної системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею" будується на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського

$$\delta I = 0, \quad I = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

при цьому функція Лагранжа задається у класичному вигляді Гамільтона - Остроградського як різниця між кінетичною та потенціальною енергією системи

$$L=\frac{1}{2}\rho\int_{\tau}(\vec{\nabla}\varphi+\dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau+\frac{1}{2}M_T(\dot{\vec{\varepsilon}})^2-(M_T+M_F)g\varepsilon_z-$$

$$-\frac{1}{2}\rho g\int_S(\xi^2-H^2)dS+\vec{F}\cdot\vec{\varepsilon},$$

де ρ – щільність рідини; τ – область, яку займає рідина; $d\tau = rdrd\theta dz$ – циліндричні координати, при цьому вісь Oz має напрямок, протилежний напрямку вектора прискорення вільного падіння $\vec{g}$, а система координат пов'язана з нерухомим резервуаром; φ – потенціал швидкостей рідини; ξ – збурення вільної поверхні рідини; S – поперечний переріз циліндричного резервуару; M_T та M_F – маса резервуару та рідини відповідно; $\vec{\varepsilon}=(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z)$ – вектор переміщення резервуару у поступальному русі; $\vec{F}$ – головний вектор зовнішніх сил, які діють на резервуар, відносно точки O.

Для ефективного застосування варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського поставлено задачу ввести у розгляд мінімальну кількість незалежних змінних, що описують рух резервуару з рідиною, тобто фактично будуються розклади шуканих змінних, які задовольняють наперед усі кінематичні граничні умови. Оскільки безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини відповідно до теореми Лагранжа повністю визначається рухом її границь, то збурення вільної поверхні рідини ξ та радіус-вектор $\vec{\varepsilon}(t)$ повністю характеризують рух самої рідини, і тому потенціал швидкостей φ потрібно вважати залежною змінною.

Відповідно до методики роботи [2], розклади шуканих змінних представимо у вигляді

$$\xi(r,\theta,t)=\sum_i a_i(t)\psi_i(r,\theta),\ \ \varphi=\sum_i b_i(t)\varphi_i(r,\theta,z),$$

де $a_i(t)$ – амплітуди форм коливань збуреної вільної поверхні рідини ξ. Системи функцій ψ_i і $\varphi_i=\psi_i\dfrac{\cosh\kappa_i(z+H)}{\kappa_i\sinh\kappa_i H}$ є розв'язком лінійної спектральної задачі [6] та мають вигляд

$$\psi_n(r,\theta)=J_n(\frac{\kappa_n^{(m)}}{R}r)\sin(n\theta)\cos(n\theta),\ n=0,1,2,...;\ m=1,2,...$$

У роботі [2] розроблено метод виключення кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини, який дозволяє отримати дискретну модель механічної системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею" мінімальної розмірності. На основі розробленого методу, варіаційних методів математичної фізики та асимптотичних методів нелінійної механіки у роботі [2] побудована математична модель, яка дозволяє дослідити поступальні та кутові рухи механічної системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею" при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового та моментного) збудження. Ця модель представляє собою систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i – компонент вектора переміщень центру незбуреної вільної поверхні рідини відносно деякої нерухомої системи відліку

$$\sum_i\ddot{a}_i\cdot\{\beta_{ri}^q+\sum_j a_j\gamma_{ij}^q+\sum_{i,j}a_ia_j\delta_{rijk}^q\}+ \qquad (1)$$

$$+\ddot{\vec{\varepsilon}}\cdot\{\vec{B}_r^1+\sum_i a_i\vec{B}_{ri}^2+\sum_{i,j}a_ia_j\vec{B}_{rij}^3+\sum_{i,j,k}a_ia_ja_k\vec{B}_{rijk}^4\}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\dot{a}_i\dot{a}_j(\gamma_{ijr}^q-\gamma_{rij}^q)+\sum_{i,j,k}\dot{a}_i\dot{a}_ja_k(\delta_{ijkr}^q-2\delta_{rijk}^q)-$$

$$-\frac{1}{2}g\alpha_r^s-\alpha_r^p\dot{a}_r-gN_ra_r+\dot{\vec{\varepsilon}}\cdot\{\vec{B}_r^1+\sum_i a_i(\vec{B}_{ir}^2-\vec{B}_{ri}^2)+$$

$$+\sum_{i,j}\dot{a}_ia_j2(\vec{B}_{ijr}^3-\vec{B}_{rij}^3)+\sum_{i,j,k}\dot{a}_ia_ja_k3(\vec{B}_{ijkr}^4-\vec{B}_{rijk}^4)\},$$

$$\rho\{\sum_i\ddot{a}_i[\vec{B}_i^1+\sum_{i,j}a_j\vec{B}_{i,j}^2+\sum_{i,j,k}a_ja_k\vec{B}_{ijk}^3]\}+(M_T+M_F)\ddot{\vec{\varepsilon}}= \qquad (2)$$

$$=\vec{F}-(M_T+M_F)g\vec{k}-\rho\{\sum_{i,j}\dot{a}_i\dot{a}_j\vec{B}_{ij}^2+\sum_{i,j,k}\dot{a}_i\dot{a}_ja_k\vec{B}_{ijk}^3\}.$$

Система $(1)-(2)$ містить $N+3$ рівнянь (N – кількість форм коливань рідини, що розглядаються) та описує динаміку сумісного руху резервуару та рідини при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового) збудження. Рівняння (1) описують динаміку амплітуд форм коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (2) – динаміку резервуару, однак ці рівняння взаємозв'язані та містять сили взаємодії між компонентами механічної системи.

Сукупність коефіцієнтів, які входять до системи рівнянь (1) – (2), у рамках прийнятої моделі визначає властивості механічної системи, яка розглядається, та особливості прояву в ній внутрішніх лінійних та нелінійних механізмів взаємодії. Ці коефіцієнти визначаються через квадратури від розв'язку крайової задачі із визначення форм коливань вільної поверхні рідини. При цьому коефіцієнти $\beta_{ir}^q,\gamma_{ijr}^q,\delta_{ijkr}^q,\alpha_r^s,N_r$ відповідають випадку коливань рідини у нерухомому резервуарі, а коефіцієнти $\vec{B}_r^1,\vec{B}_{ri}^2,\vec{B}_{rij}^3,\vec{B}_{rijk}^4$ відображають взаємозв'язок коливань рідини та поступального руху резервуару.

III. Узагальнення задачі Фарадея при наявності додаткового ступеня вільності.

Розглянемо узагальнення задачі Фарадея, а саме будемо вважати, що резервуар здійснює вертикальні рухи за заданим гармонічним законом $\varepsilon_z=H_z\sin pt$, а також може здійснювати переміщення ε_y в горизонтальній площині вздовж вісі Oy. Як відомо із теорії параметричних коливань [1], існують області в площині параметрів (p, H_z), коли розв'язки рівнянь (1) – (2) будуть необмежено зростати, тобто області динамічної нестійкості. Побудова областей нестійкості буде відповіддю на питання: при яких значеннях параметрів зовнішнього силового збурення резервуару (p, H_z) система «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності будь-якого малого початкового збурення вільної поверхні рідини вийде на режим параметричного резонансу.

Відомо з теорії параметричних коливань [1], що дослідження нестійкості ведеться на основі лінеаризованих рівнянь руху і, практично для всіх випадків руху, в околі першого (нижчого) резонансу. Тому для побудови зон нестійкості лінеаризуємо систему рівнянь (1) – (2) для першої антисиметричної форми a_1 та переміщення ε_y в горизонтальній площині, доповнивши її параметричним вертикальним збуренням резервуару $\varepsilon_z = H_z \cos pt$, тобто отримаємо систему

$$\ddot{a}_1 + \lambda_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 (1 - \nu H_z p^2 \cos pt) a_1 = 0 \, , \lambda_2 \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0 \quad (3)$$

де $\nu = \dfrac{B_{11}^{2z}}{gN_1}$, $\omega_1 = \dfrac{gN_1}{\beta_{11}^q}$, $\lambda_1 = \dfrac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}$, $\lambda_2 = \dfrac{\rho B_1^{1y}}{M_T + M_F}$.

Області необмежено зростаючих розв'язків відокремлюються від областей стійкості періодичними рішеннями з періодом T або $2T$. А саме, два розв'язки одного періоду обмежують область нестійкості, два розв'язки різних періодів – область стійкості [1]. Звідси випливає, що визначення границь областей нестійкості може бути зведено до пошуку умов, при яких диференціальні рівняння (3) мають періодичні розв'язки з періодами T або $2T$.

Отже, зони нестійкості для першого резонансу обмежені періодичними розв'язками з частотою 0.5p, тому періодичні рішення системи рівнянь (3) представимо у вигляді

$$a = A_1 \cos\frac{pt}{2} + B_1 \sin\frac{pt}{2} \, , \; \varepsilon_y = A_2 \cos\frac{pt}{2} + B_2 \sin\frac{pt}{2} \, ,$$

та з використанням методу Бубнова-Гальоркіна отримаємо рівняння границь зон нестійкості

$$p = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1 - 2\omega_1^2 \nu H_z - \lambda_1 \lambda_2}} \quad \text{та} \quad p = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1 + 2\omega_1^2 \nu H_z - \lambda_1 \lambda_2}} \, .$$

Як можна бачити з рівнянь границь зон нестійкості, наявність додаткового ступеня вільності призводить до підвищення частоти параметричного резонансу, при цьому вона тим вище, чим менше маса резервуару по відношенню до маси рідини, тобто чим більше вплив рухомості рідини. Крім того, чим менше маса резервуару по відношенню до маси рідини, тим ширше стає зона параметричного резонансу при збільшенні амплітуди зовнішнього збурення H_z.

IV. Задача побудови керування зі зворотним зв'язком для забезпечення програмного руху резервуару.

Якщо зовнішня сила $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, яка діє на систему "резервуар – рідина з вільною поверхнею", має за мету здійснення необхідного закону руху або мінімізацію заданого функціоналу, то таку силу прийнято називати керуванням. Поставимо задачу побудови керування Fy, яке б забезпечувало програмний рух резервуару з рідиною у напрямку Oy за заданим законом $\dot{\varepsilon}_y = f(t)$, $\varepsilon_y = \int f(t)dt$. При цьому закон руху рідини задається відповідно до моделі «затверділої» рідини, тобто збурення вільної поверхні рідини повинні бути відсутні $\xi(t) = \dot{\xi}(t) = 0$. Тоді програмне керування Fp будується відповідно до другого закону Ньютона та має вигляд $F_P = (M_T + M_F)\ddot{\varepsilon}_y$. Однак, оскільки у системі присутні збурення – збурення початкових умов параметрів руху $\varepsilon_y, \dot{\varepsilon}_y, \xi, \dot{\xi}$ та коливання вільної поверхні рідини, введемо у систему лінійне керування із зворотним зв'язком FB та постійними коефіцієнтами підсилення li, i = 1..4, у вигляді

$$F_{BK} = \sum_{i=1}^{4} l_i x_i$$

, яке буде корегувати існуючі похибки – відхилення наявних значень параметрів руху від заданих програмних значень

$$x_1 = \xi(t), \; x_2 = \dot{\xi}(t), \; x_3 = \varepsilon_y - \int f(t)dt, \; x_4 = \dot{\varepsilon}_y - f(t).$$

Таким чином, повне керування, яке діє на систему, має вигляд

$$F_y = F_P + F_B = (M_T + M_F)\ddot{\varepsilon}_y - \sum_{i=1}^{4} l_i x_i \, ,$$

де коефіцієнти підсилення зворотного зв'язку li мають позитивні значення, а сам зворотний зв'язок є негативним для забезпечення стійкості системи керування.

Керування зі зворотним зв'язком побудуємо на основі лінеаризованної системи рівнянь руху (1) – (2), в якій буде враховано коливання вільної поверхні рідини ξ по першій антисиметричній формі a1 з можливістю горизонтального переміщення резервуару по горизонтальній координаті εy. Відповідні рівняння мають вигляд

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_1^{1y} \ddot{\varepsilon}_y + gN_1 a_1 = 0, \; \rho B_1^{1y} \ddot{a}_1 + (M_T + M_F)\ddot{\varepsilon}_y = 0,$$

або

$$\ddot{a}_1 + \nu_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0, \; \nu_2 \ddot{a}_1 + M \ddot{\varepsilon}_y = F_y \, , \quad (4)$$

де позначено $\nu_1 = \dfrac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}$, $\nu_2 = \rho B_1^{1y}$, $\omega_1^2 = \dfrac{gN_1}{\beta_{11}^q}$. Введемо також позначення для фазових змінних $x_1 = a_1(t)$,

$x_2 = \dot{a}_1(t)$, $x_3 = \varepsilon_y - \int f(t)dt$, $x_4 = \dot{\varepsilon}_y - f(t)$, $u = F_B$ та приведемо систему диференціальних рівнянь (3) до нормальної форми Коші

$$\dot{x} = Fx + Gu, \tag{5}$$

де x – вектор фазових змінних $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, u – керування, а матриця F та вектор G мають вигляд

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix},$$

з позначеннями $\lambda_1 = -\dfrac{M\omega_1^2}{M - \nu_1\nu_2}$, $\lambda_2 = \dfrac{\nu_2\omega_1^2}{M - \nu_1\nu_2}$, $\beta_1 = -\dfrac{\nu_1}{M - \nu_1\nu_2}$, $\beta_2 = \dfrac{1}{M - \nu_1\nu_2}$. У системі (5) фазові змінні $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ мають сенс збурень, тобто відхилень дійсних значень параметрів руху системи від програмних.

Побудоване керування зі зворотним зв'язком повинне забезпечити асимптотичну стійкість руху системи у збуреннях. Для його побудови будемо використовувати метод, розроблений В.В. Новицьким [3]: рівняння системи у збуреннях (5) перетворюються у форму, канонічну за фазовими змінними. Матриця T для такого перетворення y = Tx має вигляд

$$\widetilde{T} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\beta_2}{\beta_1(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)} & 0 & \dfrac{1}{\beta_1(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\beta_2}{\beta_1(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)} & 0 & \dfrac{1}{\beta_1(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)} \\ \dfrac{1}{\beta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\beta_1} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix},$$

а система (5) після перетворення

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \tag{6}$$

У систему (6) підключимо зворотний зв'язок $u = -\sum_i k_i y_i$ та отримаємо рівняння замкненої системи

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \lambda_1 - k_3 & -k_4 \end{bmatrix} y. \tag{7}$$

Необхідно знайти значення коефіцієнтів k_i зворотного зв'язку, які б забезпечили асимптотичну стійкість замкненої системи (7). Як відомо [3], коефіцієнтами характеристичного полінома матриці у формі (7) є елементи нижнього рядка, тому характеристичний поліном системи (7) має вигляд

$$f(z) = z^4 + k_4 z^3 + (k_3 - \lambda_1) z^2 + k_2 z + k_1. \tag{8}$$

Якщо задані корені характеристичного полінома (8) є негативними дійсними числами або комплексними числами із негативною дійсною частиною, то система буде асимптотично стійкою.

Висновок

Розглянуто узагальнення класичної задачі Фарадея про параметричний резонанс вільної поверхні при вертикальних коливаннях резервуару. Внесення в систему додаткового ступеня вільності (можливість горизонтального руху резервуару) приводить до підвищення частоти параметричного резонансу, причому вона тим вище, чим менше маса резервуару по відношенню до маси рідини. При вертикальному збуренні руху резервуару при наявності можливості горизонтального руху системи на відміну від класичної задачі Фарадея динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність параметричного резонансу і вимушених коливань, тому в цьому випадку на будь-якій частоті можливий вихід на нелінійний режим (суттєве зростання амплітуд коливань). Розглянуто також задачу побудови керування системою зі зворотним зв'язком на основі приведення системи у збуреннях до канонічної форми та використання модального підходу для забезпечення асимптотичної стійкості системи.

Література References

[1] Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 600 с.

[2] Лимарченко О.С., Ясинский В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ «КПИ», 1997. – 338 с.

[3] Новицький В.В. Декомпозиція та керування в лінійних системах. – Київ: Інститут математики НАН України, 2008. – 252 с.

[4] Faraday M. On the forms and states assumed by fluids in contact vibrating elastic surfaces // Phil. Trans. of the Royal Society of London. – 1831. – 121. – P. 319-346 pp.