

# Дискретне Трійкове Симетричне Вейвлет-Перетворення та Його Застосування для Цифрової Обробки Інформації у Розподілених Системах Управління

Артем Ізмайлів  
кафедра інформатики  
Прикарпатський національний університет  
Івано-Франківськ, Україна  
aiartefact@gmail.com

Любомир Петришин  
кафедра управління  
Університет AGH  
Краків, Польща  
l.b.petryshyn@gmail.com

## Discrete Symmetric Ternary Wavelet Transform and Its Application for Digital Information Processing in Dispersed Management Systems

Artem Izmailov  
dept. of Computer Science  
Precarpathian National University  
Ivano-Frankivsk, Ukraine  
aiartefact@gmail.com

Lubomyr Petryshyn  
dept. of Management  
AGH University  
Krakow, Poland  
l.b.petryshyn@gmail.com

**Анотація**—На основі трійкових симетричних функцій синтезовано відповідне дискретне вейвлет-перетворення. Ефективність застосування отриманого перетворення у задачах відновлення даних за частиною коефіцієнтів оцінена у порівнянні з біортогональними вейвлетами та вейвлетом Хара.

**Abstract**—A discrete wavelet transform was synthesized on the basis of symmetric ternary functions. The application effectiveness of the synthesized transform was estimated for the problems of recovering data using part of the coefficients in comparison with biorthogonal and Haar wavelets.

**Ключові слова**—цифрова обробка інформації; дискретне вейвлет-перетворення; трійкові симетричні функції

**Keywords**—digital information processing; discrete wavelet-transform; symmetric ternary functions

### I. ВСТУП

Цифрова обробка інформації є ключовим елементом багатьох технічних систем, які використовуються у різних галузях економіки, управління, виробництва, зв'язку та

медицини [1 – 8]. Відповідно, ефективні рішення у галузі цифрової обробки інформації призведуть до підвищення ефективності перебігу процесів, які включають цифрову обробку інформації, у прикладних галузях.

Одним із актуальних завдань цифрової обробки інформації є обробка цифрових сигналів на основі вейвлет-перетворень [1 – 3, 9, 10]. Відомо, що кожен вейвлет (та відповідне йому перетворення) пристосований для обробки лише певного класу сигналів, тобто має обмежений спектр застосування [2, 9, 10]. Звідси випливає, що актуально є проблема синтезу нових вейвлет-функцій та відповідних їм вейвлет-перетворень, які дозволять з вищою ефективністю проводити обробку конкретних цифрових сигналів, у тому числі тих, для яких існуючі методи працюють із недостатнім рівнем ефективності.

Аналіз останніх досліджень у галузі вейвлет-перетворень вказує на те, що дослідження щодо реалізації дискретних вейвлет-перетворень на основі трійкових симетричних функцій не проводились [1 – 3, 5]. Водночас, доведена вища ефективність трійкової симетричної логіки у порівнянні із двійковою [4] та

успішний синтез дискретного ортогонального перетворення на основі трійкових симетричних функцій [8] вказують на перспективність розвідок у описаному напрямі.

Метою дослідження є синтез дискретного вейвлет-перетворення на основі трійкових симетричних функцій та оцінювання ефективності його застосування за критерієм середньоквадратичної похибки відновлення за частиною коефіцієнтів перетворення.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в успішному синтезі дискретного вейвлет-перетворення на основі трійкових симетричних функцій та проведенні оцінки ефективності його застосування у порівнянні з найбільш уживаними вейвлет-перетвореннями за критерієм середньоквадратичної похибки відновлення за частиною коефіцієнтів перетворення.

## II. ТРІЙКОВИЙ СИМЕТРИЧНИЙ МАТЕРИНСЬКИЙ ВЕЙВЛЕТ

В основі довільного вейвлет-перетворення лежить функція, яку називають материнським вейвлетом [2, 9]. Відповідне вейвлет перетворення синтезується на основі системи функцій, які є стисненими та зсунутими по осі абсцис (здебільшого представляє віс часу) копіями материнського вейвлета [2, 9]. Якщо материнський вейвлет позначити, як  $\psi$ , то описана система функцій набуде вигляду (1) [9].

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0), \quad (1)$$

де  $a_0 \neq 1$  – параметр стиску,  $b_0$  – параметр зсуву,  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

У роботах [5–7] синтезовано ортогоналізовану систему добутків трійкових симетричних функцій, на основі якої успішно побудоване відповідне ортогональне перетворення [8]. У роботі [5] доведено доцільність дослідження можливості застосування функцій синтезованої системи у якості материнського вейвлета. Відправною точкою даного дослідження можуть слугувати функції з первого піднабору нульового набору синтезованої системи ортогоналізованих добутків трійкових симетричних функцій, графіки яких представлена на рис. 1.

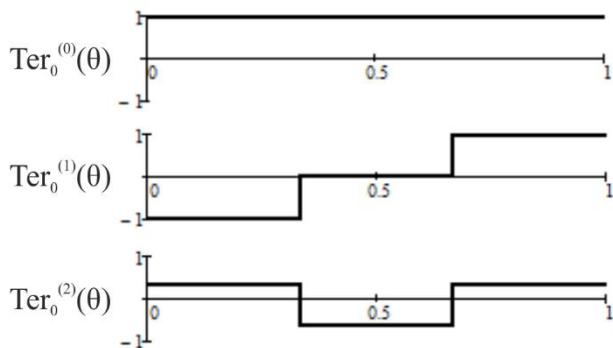


Рис. 1. Графіки функцій нульового набору системи ортогоналізованих добутків трійкових симетричних функцій

У якості материнського вейвлета доцільно обрати функцію  $Ter_0^{(1)}(\theta)$ , оскільки вона являє собою трійкову симетричну функцію у класичному вигляді. Данна функція не є нормалізованою (її норма у просторі  $L_2$  не дорівнює одиниці), тому доцільно використати її нормалізовану форму, яка використовується у відповідному ортогональному перетворенні (детальна інформація про перебіг даної нормалізації може бути знайдена у [8]). Відповідно, трійковий симетричний материнський вейвлет може бути визначений у вигляді (2).

$$\psi_1(t) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{3}{2}}, t \in [0, \frac{1}{3}), \\ \sqrt{\frac{3}{2}}, t \in [\frac{2}{3}, 1), \\ 0, t \notin [0, \frac{1}{3}) \cup [\frac{2}{3}, 1). \end{cases} \quad (2)$$

Функція (2) є вейвлетом, оскільки її середнє значення рівне нулю повсій часовій області, на що вказує значення інтегралу (3).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(t) dt = 0. \quad (3)$$

Зіскінченності інтегралу (4) випливає, що функція (2) володіє скінченною енергією та одиничною нормою у просторі  $L_2$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1(t)|^2 dt = 1. \quad (4)$$

Для того, щоб функція (2) могла бути використаною у якості основи відповідного вейвлет-перетворення необхідно, щоб вона мала принаймні один нульовий момент [9]. Довільна функція  $f(t) \in L_2(R)$  має  $M$  нульових моментів, якщо для всіх цілих значень  $k=0,1,2,\dots,M-1$  виконується рівність (5).

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k f(t) dt = 0. \quad (5)$$

Функція (2) має один і тільки один нульовий момент, оскільки при  $k=0$  інтеграл у рівності (5) рівний нулю, а при  $k=1$  – ні. Цей факт підтверджує те, що функція (2) не є гладкою функцією (вона є кусково-неперевнною).

Функція (2) має компактний носій, що очевидно з її аналітичного виразу. Данна властивість вказує на можливість побудови на основі даної функції швидкого вейвлет-перетворення [9].

Функція (2) задовільняє умову допустимості (6) [9], оскільки для даної функції вираз (6) приймає значення ≈ 0.1152. Скінченість виразу (6) є необхідною умовою існування оберненого вейвлет-перетворення на основі вейвлета  $\psi(x)$  [9].

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} dt < +\infty, \quad (6)$$

де  $\hat{\psi}(x)$  – Фур'є-образ вейвлета  $\psi(x)$ .

Оскільки функція (2) задовільняє усі описані вимоги, то вона може бути використана у якості материнського вейвлета і на її основі можливий синтез відповідного вейвлет-перетворення, зокрема неперервного.

### ІІІ. ДИСКРЕТНЕ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ НА ОСНОВІ ТРІЙКОВИХ СИМЕТРИЧНИХ ФУНКІЙ

У випадку неперервного вейвлет-перетворення відбувається інтегрування по параметрах зсуву та стиску у виразі (1). Неперервне вейвлет-перетворення дозволяє здійснити найточніший вейвлет-аналіз сигналу (у порівнянні з дискретним перетворенням), однак, дуже часто, це доволі громіздкий процес, який не передбачає, навіть, подальше відновлення сигналу [2, 9]. Відповідно, сфераю застосування неперервного вейвлет-перетворення є спеціалізованими системами, які рідко зустрічаються у повсякденних застосунках цифрової обробки інформації. Натомість, дискретне вейвлет-перетворення забезпечує меншу, але цілком прийнятну, точність аналізу сигналів та набагато вищу швидкість обчислення (швидкі алгоритми з використанням згорткових фільтрів), що зумовило широкий спектр його застосування у системах цифрової обробки інформації.

Дискретизація неперервного вейвлет-перетворення накладає ряд обмежень на покривання спектру аналізованого сигналу спектром вейвлет-функцій, для подолання яких необхідно увести масштабну функцію  $\phi$ , причому вона повинна володіти рядом властивостей. По-перше, її середнє значення повинне бути рівне одиниці, по-друге, повинні існувати залежності (7) та (8), по-третє, функції, які породжені функціями  $\phi$  та  $\psi$ , повинні бути ортогональними [9].

$$\phi(x) = \sum_n c_n \phi(a_0 x - b_0 n), \quad (7)$$

де  $\sum_n |c_n| < \infty$ .

$$\psi(x) = \sum_n g_n \phi(a_0 x - b_0 n), \quad (8)$$

де  $\sum_n |g_n| < \infty$ .

Сімейство функцій, породжених функцією  $\phi$  утворюється згідно залежності (1), з параметрами зсуву та стиску аналогічними до обраної функції  $\psi$ . Очевидно є вимога рівності носіїв функцій  $\phi$  та  $\psi$ .

У якості масштабної функції для вейвлета  $\psi$  найпростіше обрати характеристичну функцію на проміжку  $[0, 1]$  (9), яка є масштабною функцією у вейвлет-перетворенні Хаара [9].

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (9)$$

Прийнято вважати, що у виразі (1)  $a_0 > 1$ , а  $b_0 > 0$ , хоча дані обмеження не є обов'язковими [9]. Для кожного вейвлета параметри стиску та зсуву підбираються індивідуально. При розробці багатьох систем вейвлетів параметр  $a_0$  приймається рівним 2, а параметр  $b_0 = 1$ , як найпростіший можливий варіант [9]. Застосування даної практики до функцій (2) та (9) приведе до неортогональної системи функцій та неможливості формування для функцій  $\varphi$  та  $\psi$  виразу (8). Однак, якщо покласти параметр  $a_0$  рівним 3, а  $b_0 = 1$ , то можливість формування залежності (8) стає очевидною, а система функцій породжених функцією (2) (система, яка породжена функцією (9) формується аналогічно) буде задана аналітичним виразом (10).

$$\psi_{m,n}(x) = 3^{-m/2} \psi(3^{-m} x - n). \quad (10)$$

Водночас, як показано у [9], при стисненні функцій у 3 рази з кожною новою ітерацією перетворення, спектр, який покривається функціями  $\varphi$  та  $\psi$  буде теж зменшуватись утрічі, тобто покриватись буде лише 2/3 спектру вхідного сигналу. Відповідно, виникає необхідність уведення ще одного материнського вейвлета і відповідної йому системи функцій ( побудованої аналогічно до (10)). Враховуючи взаємну ортогональність функцій  $Ter_n^{(i)}(\theta)$  та отримані у роботах [5–8] результати, у якості другого материнського вейвлета доцільно обрати нормалізовану функцію  $Ter_0^{(2)}(\theta)$  у вигляді (11).

$$\psi_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & t \in [0, \frac{1}{3}) \cup [\frac{2}{3}, 1], \\ -\sqrt{2}, & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ 0, & t \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (11)$$

Функція (11) задовільняє усі наведені вимоги для вейвлет-функцій та має 2 і тільки 2 нульових моменти, що збільшує можливості вейвлет-аналізу гладких функцій. Аналітична залежність виду (8) для функцій (9) та (11) є очевидною.

Враховуючи те, що функції (2), (9) та (11) є, за своєю суттю, нормалізованими функціями  $Ter_0^{(i)}(\theta)$ ,  $i=0,\dots,2$ , та ортогональність матриці їх значень на проміжку  $[0, 1]$  [8], а також трійкову природу їх проміжків значень, можна стверджувати, що породжені ними згідно (10) функції утворюють ортогональну систему, з чого випливає можливість синтезу на основі функцій (2), (9) та (11) дискретного вейвлет-перетворення.

#### IV. ЕФЕКТИВНІСТЬ ЗАСТОСУВАННЯ ДИСКРЕТНОГО ТРІЙКОВОГО СИМЕТРИЧНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ

Одним із завдань вейвлет-аналізу у системах цифрової обробки інформації є відновлення сигналу за частиною вейвлет-коєфіцієнтів [2, 10]. Для оцінювання ефективності функціонування вейвлет-перетворень за даним критерієм використовується критерій середньо-квадратичної похиби відновлення MSE (12) [10].

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (X(i) - X_r(i))^2, \quad (12)$$

де  $X(i)$  – вхідні дані,  $X_r(i)$  – відновлені за частиною коєфіцієнтів дані.

Згідно критерію (12) здійснено оцінку ефективності відновлення сигналів за 10%, 5%, 1% коєфіцієнтів вейвлет-перетворення дискретного трійкового симетричного вейвлет-перетворення (ST) у порівнянні з вейвлетом Хаара (Haar) та біортогональним вейвлетом з параметрами 1.3 (bior1.3). Аналіз проводився з використанням тестових сигналів freqbrk (два синусоїdalні сигнали з різними частотами), noissin (зашумлений синусоїdalний сигнал) та sumsing (сума двох синусоїdalних сигналів). Результати проведеного аналізу наведено у табл. 1.

ТАБЛИЦЯ I. ЗНАЧЕННЯ ПОХИБОК ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ ЗА 10%, 5%, 1% КОЕФІЦІЄНТІВ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ

| Сигнал  | %<br>коєфіцієнтів | ST     | Haar   | bior1.3 |
|---------|-------------------|--------|--------|---------|
| freqbrk | 10%               | 0,0335 | 0,0443 | 0,0402  |
|         | 5%                | 0,0917 | 0,1094 | 0,1029  |
|         | 1%                | 0,2504 | 0,2731 | 0,3066  |
| noissin | 10%               | 0,0618 | 0,0615 | 0,0637  |
|         | 5%                | 0,083  | 0,0811 | 0,0844  |
|         | 1%                | 0,2349 | 0,2241 | 0,2615  |
| sumsing | 10%               | 0,6249 | 0,6585 | 0,6738  |
|         | 5%                | 0,7873 | 0,8071 | 0,8246  |
|         | 1%                | 1,1335 | 1,1343 | 1,2227  |

З табл. 1 випливає, що в узагальненому випадку за критерієм (12) дискретне трійкове симетричне вейвлет-перетворення ефективніше у порівнянні з перетворенням Хаара на 5,4%, у порівнянні з біортогональним вейвлетом з параметрами 1.3 на 8,8%. При цьому, спостерігається менша (приблизно на 1,5%) ефективність у порівнянні з перетворенням Хаара для сигналу noissin, яка пов’язана із синусоїdalним трендом даного сигналу, який ефективніше апроксимується синусоподібними функціями Хаара.

Загальна ефективність розробленого перетворення пояснюється вищою концентрацією енергії у апроксимуючих коєфіцієнтах за рахунок зменшення їх кількості на кожній ітерації, у порівнянні з перетвореннями, для яких параметр стиску рівний 2.

#### ВИСНОВКИ

Трійкові симетричні функції задовільняють вимоги щодо материнських вейвлетів, а тому можуть слугувати основою для синтезу відповідного дискретного вейвлет-перетворення. Водночас, синтез даного перетворення вимагає принципово відмінного підходу щодо формування сімейств вейвлет-функцій, а саме використання параметру стиску  $a_0$  рівного 3 (замість найбільш уживаного значення 2). Даний підхід вимагає уведення другого материнського вейвлета у перетворення, що спричиняє зміну співвідношення кількості апроксимуючих та деталізуючих (яких тепер удвічі більше, і які поділені на дві групи) коєфіцієнтів. Дано конструктивна відмінність створює ряд потенційних переваг синтезованого перетворення, які потребують подальшого вивчення.

Подальші дослідження полягають у розширеному аналізі ефективності застосування синтезованого перетворення на основі критерію (12) для великих груп тестових сигналів та порівнянні отриманих результатів з більшою кількістю сімейств вейвлетів. Доцільним є аналіз ефективності на основі відмінних від (12) критеріїв. Окреслені дослідження дозволяють чітко визначити спектр застосування синтезованого вейвлет-перетворення.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Э. Айфичер, Б. Джервис. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 992 с.
- [2] P.S. Addison, The Illustrated Wavelet Transform Handbook: Introductory Theory and Applications in Science, Engineering, Medicine and Finance (Second Edition) / P.S. Addison, CRC Press, 2016, P. 446.
- [3] S. Prasad, Information Fusion in the Redundant-Wavelet-Transform Domain for Noise-Robust Hyperspectral Classification / S. Prasad, W. Li, J.E. Fowler, L.M. Bruce // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – September 2012. – Vol. 50, No. 9. – P. 3474-3486. doi: 10.1109/TGRS.2012.2185053
- [4] B. Hayes, Computing science. Third base. A reprint from American Scientist, the magazine of Sigma Xi, the Scientific Research Society, vol. 89, Nr. 6. November–December 2001, pp. 490-494
- [5] А.В. Ізмайлів, Аналіз властивостей систем трійкових симетричних функцій та їх застосування для цифрової обробки інформації у комп’ютеризованих системах управління / А.В. Ізмайлів, Л.Б. Петришин // Інформаційні технології: сучасний стан та перспективи : монографія / за заг. ред. В.С. Пономаренка. – Х. : ТОВ «ДІСА ПЛЮС», 2018. – С. 208-222.
- [6] A. Izmailov, L. Petryshyn, "Symmetric ternary functions and their application in orthogonal transforms," 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), Kiev, 2017, P. 836-841. doi: 10.1109/UKRCON.2017.8100364
- [7] А.В. Ізмайлів, Трійкові симетричні функції та їх застосування в цифровій обробці інформації / А. В. Ізмайлів, Л. Б. Петришин // Системи обробки інформації. – 2016. – № 4. – С. 41-44.
- [8] А.В. Ізмайлів, Застосування ортогонального перетворення на основі трійкових симетричних функцій для цифрової обробки інформації / А.В. Ізмайлів // Методитазасобі кодування, захисту та зберігання інформації : тезисоповідей Шостої Міжнародної науково-практичної конференції, м. Вінниця, 24-25 жовтня 2017 року. – Вінниця: ВНТУ, 2017. – С. 93-96.
- [9] И. Добеши, Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. / И. Добеши. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
- [10] Д. Сэломон, Сжатие данных, изображений и звука / Д. Сэломон; пер. с англ. В.В. Чепыжкова. – М.: Техносфера, 2004. – 368 с.