

# Модифікований Метод Граничних Елементів та Алгоритм Розв'язання Задач Індукованого Магнітного Поля Тонкостінних Конструкцій в Тривимірному Просторі

Володимир Михайлович Рябенський  
кафедра теоретичної електротехніки та електронних систем  
Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова  
Україна, м. Миколаїв  
optron2@gmail.com

Ігор Іванович Чудайкін  
кафедра теоретичної електротехніки та електронних систем  
Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова  
Україна, м. Миколаїв  
igorlu3141509@rambler.ru

Юлія Дмитрівна Таргунакова  
кафедра теоретичної електротехніки та електронних систем  
Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова  
Україна, м. Миколаїв  
golubkajulya@gmail.com

## Modified Boundary Elements Method and Algorithm for Solving Problems of the Thin Structures Induced Fields in Three Dimensional Space.

Volodymyr Myhalovych Ryabenskiy  
Theoretical Electronic and Electronic Systems Department  
Admiral Makarov National University of the Shipbuilding  
Ukraine, Mykolaiv  
optron2@gmail.com

Igor Ivanovych Chudaykin  
Theoretical Electronic and Electronic Systems Department  
Admiral Makarov National University of the Shipbuilding  
Ukraine, Mykolaiv  
igorlu3141509@rambler.ru

Julia Dmytrivna Targunakova  
Theoretical Electronic and Electronic Systems Department  
Admiral Makarov National University of the Shipbuilding  
Ukraine, Mykolaiv  
golubkajulya@gmail.com

*Анотація*—У статті описується розроблений модифікований метод граничних елементів та алгоритм для розрахунку індукованого магнітного поля тонкостінних конструкцій довільної форми в тривимірному просторі. Розроблений метод, на відміну від класичного методу граничних елементів, не вимагає наявності матриці

фундаментальних рішень. Представлений модифікований метод, позбавлений основних недоліків методу граничних елементів і методу скінченних елементів. Наведені приклади розрахунку індукованого магнітного поля тонкостінних конструкцій.

**Abstract**—The article describes developed Modified Boundary Elements Method (MBEM) for calculating the induced magnetic field of arbitrary shape thin-walled structures in a three-dimensional space. Presented MBEM is devoid of the Boundary Elements Method and the Finite Elements Method main drawbacks. Examples of the induced magnetic field calculating of the thin-walled structures are given.

**Ключові слова**—магнітне поле; модифікований метод граничних елементів; алгоритми розрахунку індукованого магнітного поля тонкостінних конструкцій

**Keywords**—magnetic field; modified boundary elements method; algorithm for calculating the induced magnetic field

### I. ВСТУП

У ряді важливих практичних застосувань потрібна інформація про розподіл магнітного поля в околиці

ферромагнітних тонкостінних конструкцій складної просторової конфігурації, які знаходяться в зовнішньому постійному магнітному полі (наприклад, в геомагнітному полі — ГМП). До таких додатків відносяться, зокрема, визначення магнітного поля морських суден, виявлення підводних човнів і мін, виявлення підводних копалин, процес неруйнівного контролю виробів магнітним методом та інше. Для отримання більш достовірної інформації про магнітні параметри подібних тіл є ефективним використання чисельних методів розрахунку.

Пашковський А.В. в своїй роботі [1] привів класифікацію методів розв'язку польових задач. Ця класифікація, котра була розширена і доповнена, зображена на рис. 1.

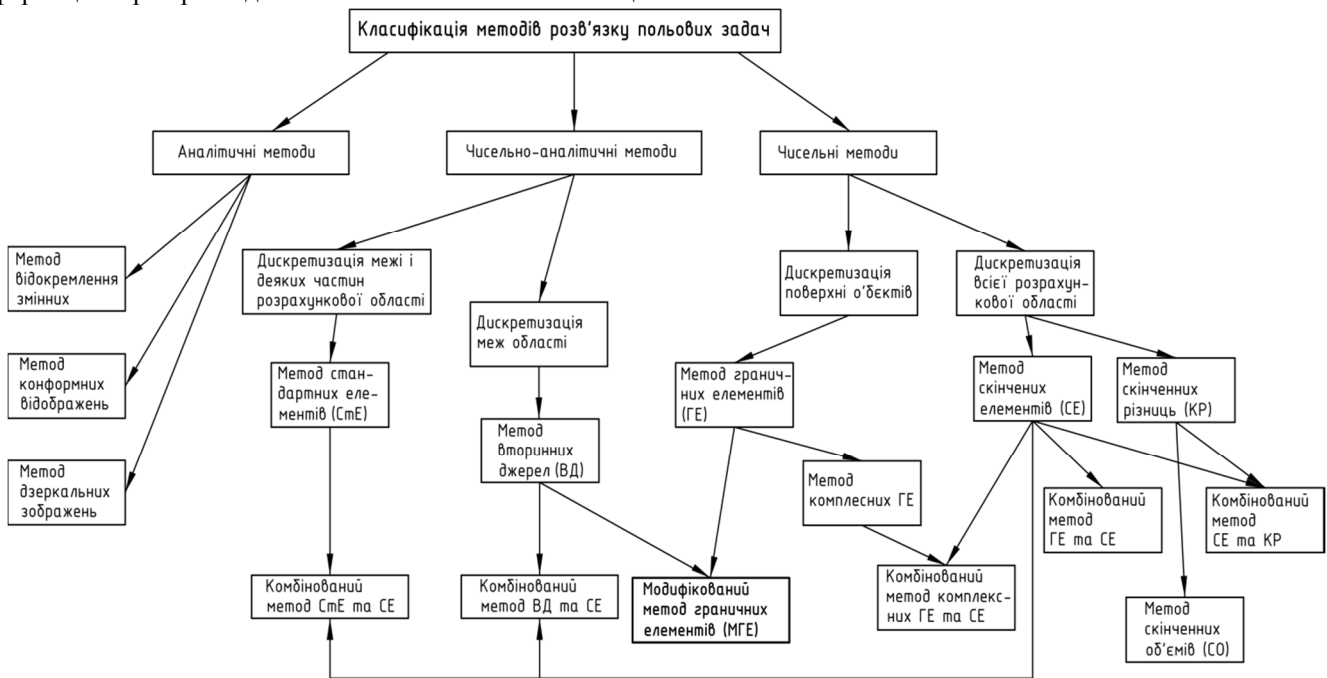


Рис. 1. Класифікація методів розв'язку польових задач.

Найбільш популярним обчислювальним методом є метод скінченних елементів (МСЕ). Понад 90% сучасних інженерних програм розрахунку ґрунтуються на цьому методі. Однак у метода існує ще цілий ряд істотних недоліків — штучне обмеження області розрахунку, дискретизація навколишнього простору, виконання нової дискретизації при зміні положення елементів і ін. Це призвело до пошуків альтернативних методів, з яких найбільш перспективним є метод граничних елементів (МГЕ).

Кацикаделіс Дж.Т. в своїй книзі [2] описав переваги і недоліки МГЕ. Переваги МГЕ: 1. Дискретизації підлягає тільки межа тіла, що полегшує чисельне моделювання за допомогою МГЕ і на порядок зменшує число невідомих. Таким чином, спрощується і зміна моделі, пов'язана з урахуванням змін проекту. 2. МГЕ дозволяє обчислювати розв'язок та його похідні в будь-якій точці розглянутої

області та в будь-який момент часу. Це можливо тому, що метод використовує інтегральне представлення розв'язку отриманого аналітичного виразу, яке можна диференціювати і використовувати як аналітичну формулу. Це неможливо при використанні МСЕ, так як розв'язок можна отримати тільки в вузлових точках. 3. Метод дуже ефективний для обчислень похідних польових функцій. Можна з легкістю оперувати зосередженими силами і моментами як в області, так і на її межі. На поточній стадії розвитку МГЕ можна виділити наступні недоліки методу: 1. Чисельна реалізація МГЕ призводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), у яких матриці коефіцієнтів повністю заповнені і несиметричні. При використанні МСЕ отримані матриці мають стрічкову структуру. Хоча, зазначений недолік МГЕ компенсується значно меншою розмірністю матриць. 2. Застосування МГЕ вимагає наявності фундаментальної

матриці розв'язків. Для побудови граничних елементів треба мати функцію Гріна для відповідної області. Такі функції знайдені не для всіх можливих областей. Цей метод не може використовуватися для задач, фундаментальний розв'язок яких не відомий чи не визначений. 3. Розроблені програми та підпрограми на базі МГЕ носять локальний характер і були створені лише для розв'язку конкретних задач в досліджуваній області, без особливих засобів візуалізації та повної автоматизації, що свідчить про необхідність розробки нової САПР, яка відповідає всім сучасним вимогам.

Філіппов Д.М. в своїй роботі [3] розвив метод вторинних джерел для моделювання плоскопаралельного магнітного поля електромагнітних систем, в якому при складанні СЛАР для знаходження густини вторинних джерел вперше запропоновано застосовувати інтегральні закони поля до елементів межі розділу середовищ.

## II. МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Для тонких оболонок фундаментальна матриця розв'язків визначається складними громіздкими виразами, а для пологої сферичної оболонки виражається спеціальними функціями. Тому досліджень щодо розв'язку завдань з теорії пологих оболонок МГЕ небагато. У зв'язку з цим актуальною темою дослідження є розробка модифікованого методу граничних елементів (ММГЕ) і алгоритмів, заснованих на розробленому методі, для розв'язку лінійних і нелінійних задач теорії тонких оболонок, заснованих на застосуванні фундаментальних розв'язків, які визначаються простими аналітичними виразами. Для цього треба розробити аналітичні вирази для розв'язування задач тривимірного магнітного поля складної конфігурації на основі рівнянь для розв'язку задач плоскопаралельного магнітного поля [3]. Створити нову САПР, яка буде мати всі необхідні засоби візуалізації та буде повністю автоматизованою, що відповідає всім сучасним вимогам для розв'язку поставлених задач.

У запропонованому методі застосований інтегро-інтерполяційний спосіб дискретизації крайової задачі, заснований на дотриманні балансу магнітних потоків для контрольних об'ємів (КО) і представлення розв'язку у вигляді потенціалу в центрі КО.

Математичною основою збіжності методу є обмеженість операторів, зворотних проєктуючим операторам та оператору граничних умов, а також густина в просторі неперервних функцій, побудована на основі дискретизації простого шару. При цьому консервативність схеми апроксимації граничних умов забезпечує «фізичність» розв'язку, отриманого при будь-якому, в тому числі і грубому, розбитті граничної поверхні. Остання обставина підтверджується, зокрема, наявним досвідом аналогового і аналого-цифрового моделювання поля намагнічення тонкостінних конструкцій на електричних сітках, при якому розв'язок може бути отриманий шляхом ітераційного підбору дискретних джерел струму (магнітного потоку), що задаються в вузлових точках однорідної R – сітки. Між моделюванням на електричних сітках і моделюванням чисельним методом, що пропонується, є майже повна аналогія.

Відмінність полягає тільки в заміні розподілених джерел точковими.

## III. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У стаціонарному випадку (при впливі постійного в часі зовнішнього магнітного поля  $\vec{H}_0$ ) потенціал  $\varphi_m$  шуканого поля намагнічування  $H_m = -grad \varphi_m$  тонкостінних конструкцій задовольняє [4,5] рівнянню Лапласа:

$$\varphi_m = 0 \quad (1)$$

Та наближеним («некласичним») граничним умовам на серединній поверхні конструкції  $S$  :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_m^- - \varphi_m^+ &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_m^-}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_m^+}{\partial n} + div_s \mu_s^* grad \varphi_m &= div_s \mu_s^* \vec{H}_{0s} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

де  $\mu_s^* = \mu \delta$ ,  $\mu^* = \frac{\mu}{\mu_0}$  та  $\delta$  - відносна магнітна проникність і товщина конструкції відповідно.

Зовнішнє поле  $\vec{H}_0$  вважається заданим. Потрібно знайти потенціал  $\varphi_m$  та значення напруженості  $\vec{H}_m$  індукованого магнітного поля тонкостінних оболонок  $S$ .

Відомо [5], що розв'язок крайової задачі (1)–(2) може бути представлений у вигляді потенціалу простого шару (ППШ) з густиною  $g$  :

$$\varphi_m(t) = \int g(q) \Psi_m(t, q) dS_q \quad (3)$$

де  $t$  — точка спостереження;  $q$  — поточна точка поверхні  $S$ ;  $\Psi_m(t, q)$  — фундаментальний розв'язок Лапласа.

При цьому ППШ визначається з рішення інтегро-диференціального рівняння:

$$-g(t) + div_s \mu_s^* grad_s \int_S g(q) \Psi_m(t, q) dS_q = div_s \mu_s^* grad_s \vec{H}_{0s} \quad (4)$$

Перша основна ідея розробленого ММГЕ полягає в дискретизації рівняння (4) інтегро-інтерполяційним методом [6, 7] шляхом інтегрування по ділянці поверхні  $\Delta S_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ). При цьому, переходячи від поверхневих інтегралів до контурних, одержуємо:

$$\begin{aligned} - \int_S g(t) dS_t + \int_{L_j} \mu_s^*(l) \left[ \frac{\partial}{\partial n_l} \int_S g(q) \Psi_m(t, q) dS_q \right] dl &= \\ = div_s \mu_s^* grad_s \vec{H}_{0s} \end{aligned} \quad (5)$$

де  $n_i$  - зовнішня нормаль до контуру  $L_j$ , що обмежує поверхню  $\Delta S_j$ .

Рівняння (5) виражає умови балансу магнітного потоку для контрольного об'єму (елемента тонкостінної конструкції), обмеженого циліндричною поверхнею з твірною  $L_j$ .

В запропонованому методі апроксимується не сама функція  $\varphi_m$ , а простий шар, який її визначає, тобто формально використовується розкладання  $\varphi_m$  по неортогональним функціям [8]. Ця друга основна ідея методу має просту фізичну інтерпретацію: простий шар замінюється системою точкових джерел з інтенсивністю  $Q_j = \int_{S_j} g(t) dS_t$ , розміщених в вузлах  $q_j$  ( $j=1, \dots, N$ ). Так як потенціал  $\varphi_m(t)$  є неперервною-диференційованою гладкою функцією на границі  $L_j$  всіх ділянок  $\Delta S_j$ , при вказаному способі апроксимації (6) консервативність методу не порушується.

$$\varphi_m(t) = \sum_{i=1}^N Q_i \Psi_m(t, q_i) \quad (6)$$

В результаті рівняння (4) зводиться до наступної СЛАР відносно значень  $Q_j$ :

$$-Q_j + \int_{L_j} \mu_s^*(l) \left[ \frac{\partial}{\partial n_l} \sum_{i=1}^N Q_i \Psi_m(t, q_i) \right] dl = \int_{L_j} \mu_s^*(l) H_{0n}(l) dl, \quad j=1, \dots, N \quad (7)$$

Перепишемо рівняння (7) в компактному вигляді та поменяємо порядок додавання та інтегрування:

$$-Q_j + \sum_{i=1}^N a_{ij} Q_i = c_j, \quad j=1, \dots, N, \quad (8)$$

де

$$a_{ij} = \int_{L_j} \mu_s^*(l) \frac{\partial \Psi_m(t, q_i)}{\partial n_l} dl; \quad c_j = \int_{L_j} \mu_s^*(l) H_{0n}(l) dl \quad (9)$$

Інтеграли в вище згаданому рівнянні зв'язують вузол  $q_j$ , де використовується фундаментальний розв'язок, з вузлом  $q_i$  ( $i=1, \dots, N$ ).  $a_{ij}$  та  $c_j$  часто називаються коефіцієнтами впливу. Точка  $q_j$  залишається незмінною (опорна точка) (рис. 2), в той час коли точка  $q_i$  змінюється по  $i$ -му елементу (точка інтегрування).

Контурний інтеграл (7) розраховується за формулою прямокутників на відрізках  $l_{jkl}$  ( $k=1, \dots, P_j$ ;  $l=1, 2$ ). Тоді вираз для коефіцієнтів впливу в (8) матиме вигляд:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{P_j} \sum_{l=1}^2 \mu_s^*(t_{jkl}) l_{jkl} \left. \frac{\partial \Psi_m(t, q_i)}{\partial n_{jkl}} \right|_{l_{jkl}}, \quad (10)$$

$$c_j = \sum_{k=1}^{P_j} \sum_{l=1}^2 \mu_s^*(t_{jkl}) l_{jkl} H_{0n_{jkl}}, \quad (11)$$

де  $l_{jkl}$  та  $l_{jk2}$  - відрізки, що з'єднують центр мас трикутника з серединою сторін його бічних граней;  $\bar{n}_{jkl}$  та  $\bar{n}_{jk2}$  - зовнішні (відносно  $\square S_j$ ) нормальні вектори до відрізків  $l_{jkl}$  та  $l_{jk2}$ , що лежать в площині  $\square_{jk}$ .

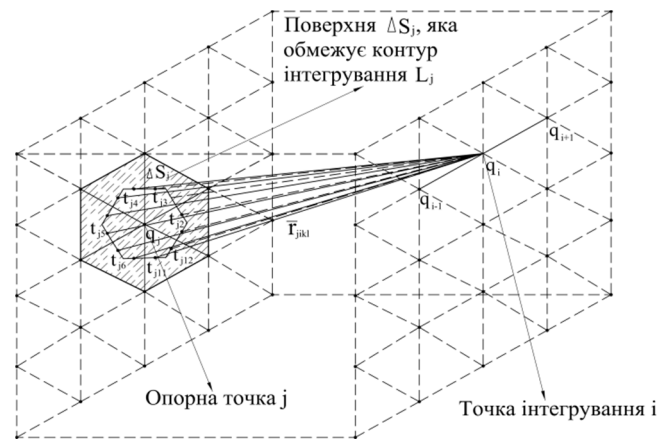


Рис. 2. Апроксимація тривимірної поверхні при розрахунку коефіцієнтів впливу

Після розв'язку СЛАР шуканий потенціал  $\varphi_m$  розраховується за формулою (6), а напруженість поля визначаються за формулами:

$$\bar{H}_m(t) = - \sum_{i=1}^N Q_i \text{grad}_i \Psi_m(t, q_i) \quad (12)$$

При  $\mu_s = \infty$  вихідне рівняння (4) зводиться до інтегрального рівняння першого роду. Спектр оператора цього рівняння містить нульове власне число, яке є причиною нестійкості чисельного розв'язку СЛАР (7). Щоб запобігти нестійкості розв'язку СЛАР в ліву частину вводимо добавку  $\gamma$  [9], яка змінює спектр матричного оператора:

$$-Q_j + \sum_{i=1}^N a_{ij} Q_i + \gamma = c_j \quad j=1, \dots, N \quad (13)$$

В рівняння (13) додається умова рівності нулю сумарного магнітного заряду:

$$\int_S g(t) dt = \sum_{i=1}^N Q_i + \gamma = 0 \quad (14)$$

СЛАР (14) в матричному вигляді:

$$[A]\{Q\} = \{C\} \quad (15)$$

Матриця  $A$  - це вироджена матриця. Для її розв'язку найефективніше використовувати метод найменших квадратів, а в якості ортогонального розкладання використовувати SVD (singular value decomposition) або сингулярне розкладання.

Після сингулярного розкладання матриця  $A$  матиме вигляд:

$$A = USV^T \quad (16)$$

де  $S$  — матриця такого ж розміру, як і матриця  $A$ , у котрій елементи, що лежать на головній діагоналі — це сингулярні числа (а всі елементи, які не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю);  $U$  і  $V$  — це дві унітарні матриці, що складаються з лівих і правих сингулярних векторів відповідно.

СЛАР (15) з урахуванням (16) матиме вигляд:

$$[U][S]\{Q\} = \{C\}[V] \quad (17)$$

Тепер отриману СЛАР можна вирішити за допомогою методу найменших квадратів.

Розроблений ММГЕ складається з наступних кроків: на першому етапі відбувається триангуляція поверхні заданого об'єкта; обчислення коефіцієнтів  $a_{ij}$  матриці  $A$ ; обчислення коефіцієнтів  $c_j$  вектору  $C$ ; сингулярне розкладання матриці (16); розрахунок значень інтенсивності  $Q_j$  в опорних точках  $q_j$ ; розрахунок магнітного потенціалу та напруженості індукованого поля в будь-якій точці простору за формулами (18) і (19) відповідно:

$$\varphi_m = \Psi_m(t, q_i) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{P_j} \frac{Q_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{mx} &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{P_j} \frac{Q_j(x_i - x_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} \\ H_{my} &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{P_j} \frac{Q_j(y_i - y_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} \\ H_{mz} &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{P_j} \frac{Q_j(z_i - z_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} \end{aligned} \right\} (19)$$

На базі розробленого ММГЕ була створена програма для розрахунку індукованого магнітного поля

тонкостінних конструкцій в тривимірному просторі Mesh\_lab, алгоритм якої наведено на рис. 3.

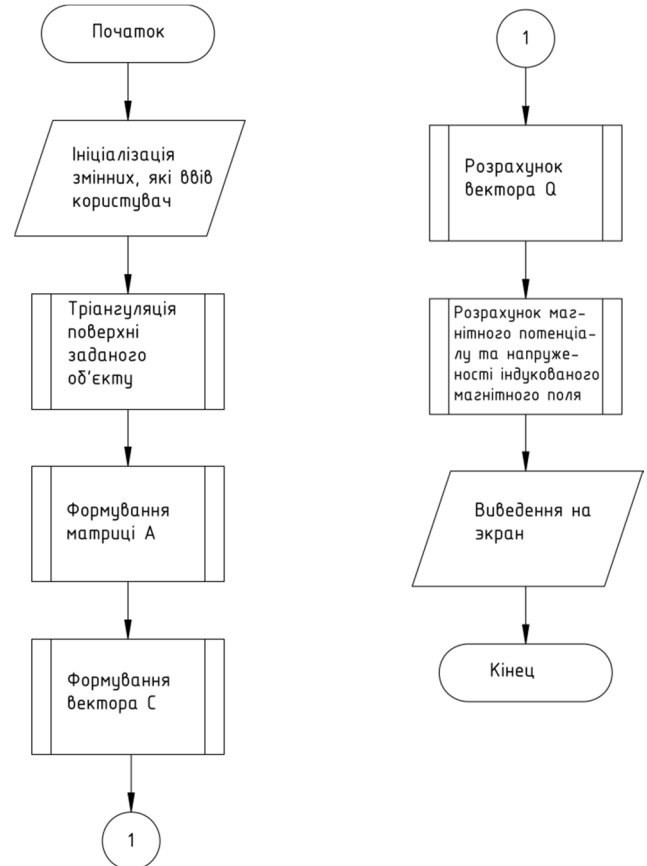


Рис. 3. Алгоритм роботи програми

Програма, реалізована мовою C++ з використанням Open Source бібліотеки GNU GSL. Алгоритм програми Mesh\_lab складається з наступних основних блоків:

*Триангуляція поверхні заданого об'єкта (тонкостінної конструкції).* Будується поверхнева конформна триангуляція області за допомогою портативних бібліотек Api3D [10]. Вхідна інформація: параметри об'єкта і крок триангуляції. Вихідна інформація: файл mesh.out, що містить кількість точок розбиття (nV) і їх координати, кількість трикутників (faces) і номери вершин, що входять в кожен трикутник. Також, виводиться поверхнева трикутна сітка заданого об'єкта на екран.

*Формування масивів для обробки результатів триангуляції, які зберігаються в файлі mesh.out.*

*Формування матриці A.* Функція get\_A () обчислює елементи матриці  $A$  в кожній  $j$ -тій точці (опорна точка) розбиття поверхні і знаходить коефіцієнт впливу  $a_{ij}$  від цієї точки на інші  $i$ -ті точки (точки інтегрування) за формулою (10).

*Формування матриці C.* Функція get\_C () обчислює елементи векторів  $C$  в кожній точці розбиття поверхні за формулою (11).

*Визначення інтенсивності точкових джерел  $Q$ .*

Функція `get_X ()` формує матриці і вектори для розрахунку інтенсивності точкових джерел  $Q_j$  і викликає функції `sl_linalg_SV_decomp ()` і `gsl_linalg_SV_solve ()` з бібліотеки GNU GSL; `sl_linalg_SV_decomp ()`, розраховує сингулярне розкладання матриці (16), де  $S$  — діагональна матриця такого ж розміру, як матриця  $A$ , у якої елементи, що лежать на головній діагоналі - це сингулярні числа;  $U$  та  $V$  — це унітарні матриці, що складаються з лівих і правих сингулярних векторів відповідно. Функція `gsl_linalg_SV_solve ()` вирішує СЛАР (16). Результати розрахунку зберігаються в вектор  $Q$  і записуються в файл `result.txt`.

*Обчислення індукованого магнітного поля в заданій точці простору.* Функція `calc_field()` обчислює значення потенціалу  $\varphi_m$  за формулою (18) і напруженості  $\vec{H}_m$  за формулою (19) в заданій точці простору.

Детальніше зупинимося на алгоритмі формування матриці  $A$ , який зображений на рис. 4.

В першу чергу функція `get_A()` ініціалізує масив для зберігання елементів матриці  $A$ , розміром  $nV \times nV$ . Далі читаємо координати поточної вершини та розраховуємо коефіцієнт впливу між цією вершиною та усіма іншими вершинами за формулою (10). Для цього навколо кожної вершини розраховується елемент  $\Delta S_j$ , який складається з трикутників, що примикають до цієї вершини. Межа контуру — це межа елемента  $\Delta S_j$ .

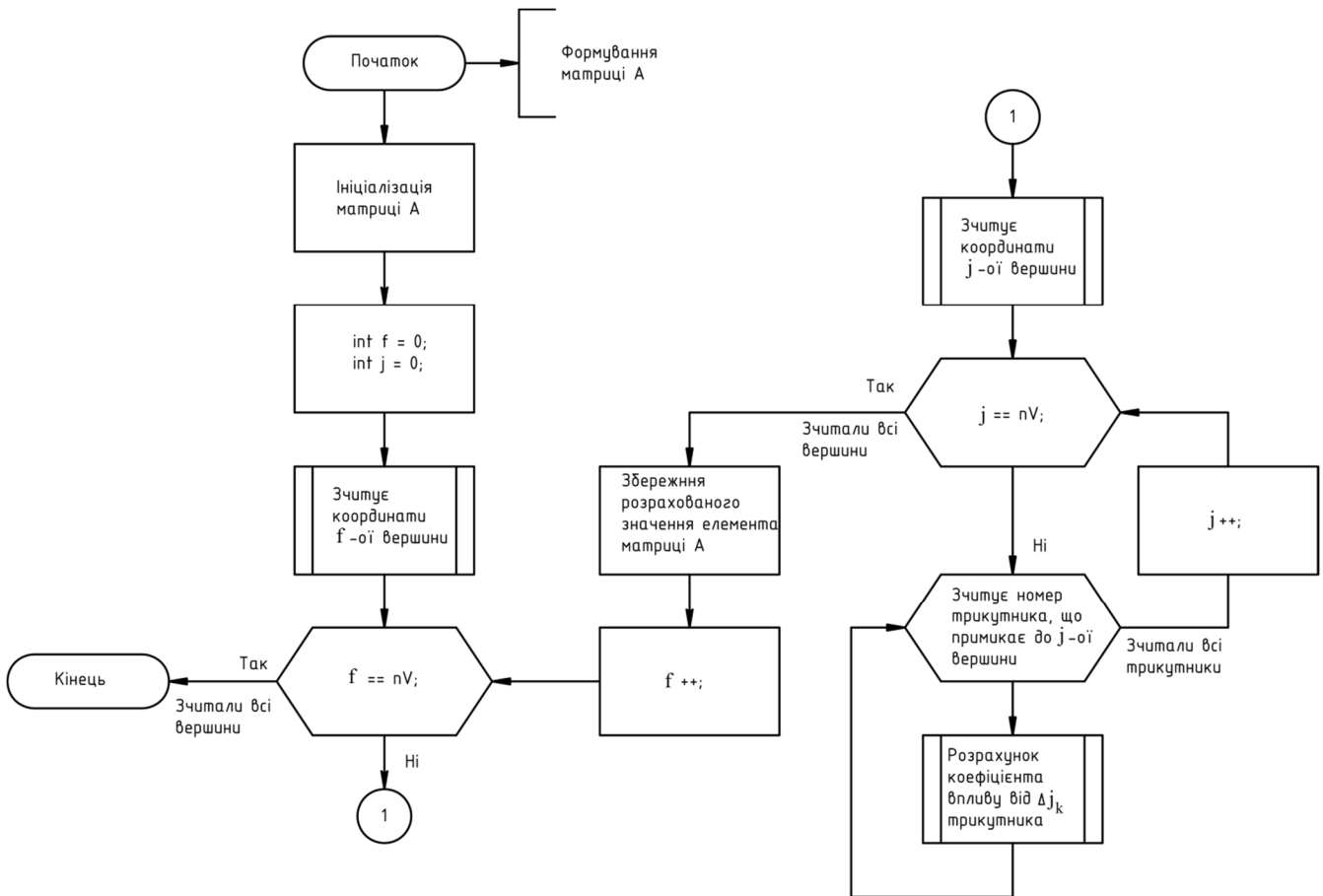


Рис. 4. Алгоритм формування матриці  $A$ .

Розглянемо роботу розробленого ММГЕ на прикладі. Розрахуємо магнітну індукцію залізної труби, зовнішній радіус  $r_1 = 1\text{ м}$ , внутрішній радіус  $r_2 = 0,7\text{ м}$ , довжина труби  $l = 8\text{ м}$ , магнітна проникність заліза  $\mu = 400$ . Знаходиться в зовнішньому полі  $H_{0x} = 0\text{ А/м}$ ,  $H_{0y} = 1\text{ А/м}$ ,  $H_{0z} = 0\text{ А/м}$ . Вісь труби співпадає з віссю  $z$ . Центр труби співпадає з початком координат.

Напруженість магнітного поля була розрахована на відстані  $2\text{ м}$  від осі циліндру ( $y = 2\text{ м}, z = 0\text{ м}$ ) на відрізьку з координатами по осі абсцис  $[-5;5]$  метрів (рис. 5а). Значення індукованої магнітної напруженості  $\vec{H}_m$  були розраховані за допомогою розробленого ММГЕ (рис. 5б). Отримані значення були перевірені за допомогою МСЕ в програмі ANSYS (рис. 5в). На рис. 5в зображено значення напруженості результуючого поля  $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_m$ . Як видно

на рис. 5, значення індукованої магнітної напруженості  $\vec{H}_m$  тонкостінного циліндру, розрахованих на основі ММГЕ, були підтверджені результатами напруженості  $\vec{H}$ , отриманими в ANSYS.

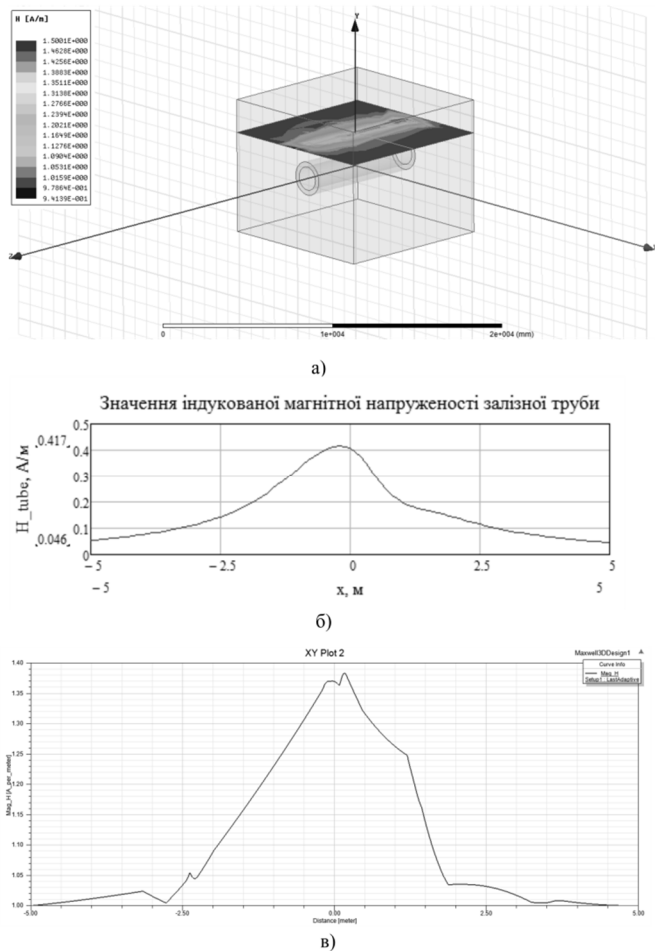


Рис. 5. Розрахунок магнітного поля тонкостінного циліндру.

#### IV. ВИСНОВКИ

Запропоновано новий актуальний модифікований метод граничних елементів та алгоритм розв'язання задач індукованого магнітного поля тонкостінних конструкцій. ММГЕ базуються на методі граничних елементів та методі вторинних джерел.

Застосування ММГЕ дозволяє підвищити точність та швидкість розрахунку індукованого магнітного поля будь-якої конфігурації. На базі розробленого ММГЕ було розроблено алгоритм, на базі якого була створена програма для розрахунку індукованого магнітного поля тонкостінних конструкцій в тривимірному просторі

Mesh\_lab. Необхідно підкреслити, що сфера застосування розробленого методу величезна. Це і визначення магнітного поля морських суден, виявлення підводних човнів і мін, виявлення підводних копалин, процес неруйнівного контролю виробів магнітним методом та інше.

Розроблений ММГЕ, на відміну від класичного МГЕ, не вимагає наявності матриці фундаментальних розв'язків. Для цього були розроблені універсальні коефіцієнти впливу, за допомогою яких можна розв'язувати завдання з довільною геометрією. Представлений ММГЕ позбавлений вище зазначених недоліків МГЕ і МСЕ, тому, в порівнянні з ними, перспектива його використання набагато вище.

Розроблена програма для розрахунку індукованого поля тонкостінних конструкцій за допомогою ММГЕ може бути інтегрована в програмний комплекс Gmsh. Цей комплекс містить чотири модулі для опису геометрії, створення сітки і подальшої обробки розв'язку задачі (візуалізації результатів). Gmsh підтримує параметричне введення і володіє сучасними механізмами візуалізації. На базі цієї програми планується створити нову САПР, що володіє всіма засобами візуалізації і повної автоматизації, що відповідає всім сучасним вимогам.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Пашковский А.И. Численно-аналитические методы стандартных элементов для моделирования стационарных физических полей в линейных кусочно-однородных и нелинейных средах: автореферат дис. доктор техн. наук. — Новочеркасск, 2014. — 36 с.
- [2] Katsikadelis, John T The Boundary Element Method for Engineers and Scientists 2nd Edition. — Academic Press, 2016, 464 p.
- [3] Филиппов Д.М. Развитие метода вторичных источников для моделирования плоскпараллельного магнитного поля электромагнитных систем: автореферат дис. канд. техн. наук. — Харьков, 2013. — 24 с.
- [4] Цейтлин Л.А. Об определении магнитных и электрических полей тонких слоев и оболочек. — Журнал технической физики, 1958, т. 28, вып.6, с. 1326 – 1329.
- [5] Краснов И.П. Орешении задач некоторых граничных задач теории гармонических функций. — Дифференциальные уравнения, 1975, т. XI, № 11, с. 2052 – 2066.
- [6] Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981, 416 с.
- [7] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984, 152 с.
- [8] Алексидзе М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.: Наука, 1978, 352 с.
- [9] Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. — М.: Наука, 1978, 352 с.
- [10] Данилов А. А. Способы построения трёхмерных поверхностных триангуляций и тетраэдральных сеток // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2010. Т. 65, № 1. С. 87–92.