Модель Неусталеного Руху Крові в Судинах з Врахуванням Пружності

Ярослав П'янило
Відділ математичних методів обчислювального експерименту Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
Львів, Україна
danylo794@gmail.com

Володимир Череватий
кафедра диференціальних рівнянь та прикладної математики
Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника
Івано-Франківськ, Україна
volodia4392@gmail.com

The Unstabled Blood Flow Model in the Vessels Considering the Walls Elasticity

Yaroslav Pyanylo
Department for Mathematical Methods of Computing Experiment in Center of Mathematical Modeling of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine
Lviv, Ukraine
danylo794@gmail.com

Volodymyr Cherevatyy
dept. of Computer Science
Precarpathian National University
Ivano-Frankovsk, Ukraine
volodia4392@gmail.com

*Анотація***—В праці розглядається неусталений рух крові в судинах з врахуванням пружності стінок. Вивчається модель руху крові у нестаціонарному випадку. Показано, що розподіл тиску в крові залежить як від параметрів судини, так і від моментів часу.**

*Abstract***—In the labor considered movement blood in the vessels taking into account the elastic walls. We study the model of blood flow in the unsteady case. It is shown that the distribution of blood pressure depends on the parameters of the vessel and from points in time.**

Ключові слова—математична модель, нестаціонарний рух крові, медоди розв'язування, еластичність трубок

Keywords—mathematical model, unsteady movement of blood medody solving, flexibility tubes

I. Вступ

На практиці досить часто є необхідність в розрахунку параметрів руху рідини в гнучких трубках, зокрема судинах крові. Внутрісудинний тиск крові є одним з основних параметрів, за яким судять про функціонування серцево-судинної истеми [3-5]. Між артеріальним тиском, об'ємною швидкістю крові та опором судини існує певна функціональна залежність. Очевидно, що поряд з цими параметрами на процес руху крові мають вплив і інші параметри, зокрема, сила гравітації, еластичність судин, траєкторія руху, тощо. Відмінною особливістю характеристики серцево-судинної системи є вимога обчислювати всі складові параметри в кількісному виді. Для цього будуються адекватні математичні моделі процесу руху крові в судинах. Однією із задач, які можуть бути розв'язані на базі математичних моделей, є введення лікарських препаратів

Формулювання задачі. В цей час в літературі відомо багато математичних моделей руху крові в живих організмах. Всі вони мають місце в деяких просторово-часових інтервалах і з різною адекватністю описують цей процес. Одним із таких підходів може бути застосування математичних моделей руху газів або рідин в трубопроводах. Однак особливістю процесу руху крові в судинах живих організмів є те, що вони мають невелику довжину та їх стінки є еластичними, що необхідно враховувати при розрахунку відповідних параметрів. Однією з таких моделей може бути наступна.

II. Модель усталеного руху рідини за наявності джерел та відборів.

З врахуванням сили тертя і впливу сили тяжіння розподіл тиску рідини в трубках за усталеного руху та усереднених параметрами можна описати диференціальним рівнянням

$$\frac{dp}{dx}+\frac{\lambda\rho q^2}{2DA^2}+\rho g\frac{dh}{dx}=0, \qquad (1)$$

де $p=p(x)$ — розподіл тиску вздовж трубки; ρ — густина рідини, D — внутрішній діаметр трубки; x — біжуча координата $x\in[0,l]$, де l — довжина трубки; g — прискорення вільного падіння; $h=h(x)$ — крива, що описує рельєф трубки (траєкторію руху рідини); $q=\upsilon A$ об'ємна витрата рідини (υ — швидкість); $A=\pi D^2/4$; λ - гідравлічний опір.

1.1. Випадок неперервного рівномірного відбору. Нехай q_n - потік рідини, що входить, а q_k - потік, виходить з трубки. Тоді, $\Delta q=q_n-q_k$ - кількість рідини, яка відбирається вздовж трубки. Будемо вважати, що $q(x)=q_n-\Delta q\, x/l$. Тоді диференціальне рівняння (1) буде мати вигляд

$$\frac{dp}{dx}+\frac{\lambda\rho(q_n-\frac{x}{l}\Delta q)^2}{2DA^2}+\rho g\frac{dh}{dx}=0. \qquad (2)$$

З рівняння (2) отримується розподіл тиску вздовж трубки у випадку рівномірного відбору рідини, який обчислюється за формулою

$$p(x)-p_0=\frac{l\lambda\rho}{6DA^2\Delta q}\left[(q_n-\frac{x}{l}\Delta q)^3-q_n^3\right]-\rho g(h(x)-h_0). \qquad (3)$$

1.*2. Випадок зосереджених відборів.*

Нехай вздовж трубки довжини l є I - зосереджених відборів рідини маси m_i в точках x_i. Розподіл тиску $p(x)$ на кожному з проміжків обчислюється за формулою [1]

$$p(x)-p_0=-\frac{\lambda m^2}{2DA^2}\frac{x}{\rho_c}-\rho_c gh(x). \qquad (4)$$

Використання формули (4) для визначення кінцевих тисків на кожному i - му проміжку веде до наступної формули для обчислення розподілу тиску

$$p_n-p_0=-\frac{1}{2\rho_c}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i m_i^2 l_i}{D_i A_i^2}-g\sum_{i=1}^{n}\rho_i h_i.$$

Остання формула дає можливість змінювати геометричні розміри трубки та параметри рідини на кожному з проміжків. Якщо вважати, що гідравлічний опір λ, густина ρ та діаметр D трубки на кожному проміжку приймають ті самі значення, то

$$p_n-p_0=\frac{\lambda}{2\rho_c DA^2}\sum_{i=1}^{n}m_i^2 l_i+\rho g\sum_{i=1}^{n}h_i.$$

Якщо задано величини масових відборів в кожному з вузлів, тобто вузлу x_i відповідає відбір - δ_i, то

$$p_n-p_0=\frac{1}{2\rho_c}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i l_i}{D_i A_i^2}(m_0-\sum_{j=1}^{i}\delta_j)^2+g\sum_{i=1}^{n}\rho_i h_i.$$

1.3. Неперервний відбір з врахуванням залежності гідравлічного опору від чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}=\upsilon_c D/\nu$, ν - кінематична в'язкість, υ_c - середнє значення лінійної швидкості руху рідини на $[0,x]$.

У випадку ламінарного руху $\lambda=\lambda_0\mu A/\rho q d$, де λ_0 - деяка стала, яка визначається експериментально, та

$$\frac{\lambda\rho q^2}{2DA^2}=\frac{\rho q^2}{2DA^2}\cdot\frac{\lambda_0\mu A}{\rho q d}=\frac{\lambda_0\mu}{2DA}q.$$

У випадку рівномірного відбору

$$\frac{\lambda\rho q^2}{2DA^2}=\frac{\lambda_0\mu}{2DA}\left[q_n-\frac{x}{l}\Delta q\right].$$

Таким чином, якщо врахувати залежність числа Рейнольдса від величини потоку, то отримаємо рівняння

$$\frac{dp}{dx}+\frac{\lambda_0\mu}{2DA}\left[q_n-\frac{x}{l}\Delta q\right]+\rho g\frac{dh}{dx}=0,$$

розв'язок якого має вигляд

$$p(x)-p_0=\frac{\lambda_0\mu}{2DA}\cdot\frac{l}{2\Delta q}\left[(q_n-\frac{x}{l}\Delta q)^2-q_n^2\right]-\rho g(h(x)-h_0).$$

III. Вплив параметрів судини на процес усталеного руху крові в усталеному режимі.

Постановка задачі. В рівнянні (1) перейдемо від швидкості руху крові до об'ємної витрати q за формулою $q=\upsilon A$, де $A=\pi D^2/4$. Тоді отримаємо

$$dp=-\frac{\lambda m^2}{2D\rho A^2}dx-\rho g dh. \qquad (5)$$

В рівнянні (5) $m=\rho q$ - масова витрата крові. Оскільки кров вважається нестисливою рідиною, то з рівняння (5) отримаємо

$$p(x) - p_0 = -\frac{\lambda m^2}{2DA^2}\frac{x}{\rho} - \rho g h(x)$$.(6)

В літературі модель процесу руху крові в судинах в усталеному випадку за сталого поперечного перерізу описується рівнянням

$$\frac{dp}{dx} + \frac{2\pi \upsilon r}{\delta}\frac{m}{A^2} + \frac{m^2}{\rho A}\frac{d}{dx}\frac{1}{A}. \qquad (7)$$

Інтегрування рівняння (7) дає співвідношення

$$p_0 - p(x) = \frac{2\pi \upsilon r}{\delta}\frac{m}{A^2}x. \qquad (8)$$

В рівняннях (7) та (8) позначено: $D = 2r$, δ - товщина судини, ν - кінематична в'язкість крові.

Очевидно, що на рух крові впливає як барометричний перепад тиску, так і деформація судин. Тому доцільно побудувати математичну модель руху крові в судинах з врахуванням згаданих факторів.

Розв'язування задачі. Скористаємося рівнянням нерозривності

$\rho \upsilon A \equiv const$. (9)

Очевидно, що $A = \pi r^2$ та $A_0 = \pi r_0{}^2$. Якщо враховувати пружні властивості судин, то зміна їх радіуса в залежності від тиску крові виражається формулою :

$$r = r_0\left(1 + \frac{r_0}{E\delta_0}p\right). \qquad (10)$$

Тут δ_0 та r_0 - товщина і радіус судини в початковому стані. З рівності (9) отримуємо $\upsilon_0 A_0 = \upsilon A$, звідки

$$\upsilon = \upsilon_0\frac{A_0}{A} = \upsilon_0\frac{\pi r_0^2}{\pi r^2} = \frac{\upsilon_0}{(1 + \frac{r_0}{E\delta_0}p)^2}. \qquad (11)$$

Якщо позначити $\beta = \frac{r_0}{E\delta_0}$, тоді рівність (11) запишеться:

$$\upsilon = \upsilon_0(1 + \beta p)^{-2}. \qquad (12)$$

Продиференціюємо рівняння (9) і отримаємо наступне співвідношення:

$$d\upsilon / dx = -2\beta\upsilon_0(1 + \beta p)^{-3}\, dp/dx. \qquad (13)$$

З рівняння (1), враховуючи рівність (12), будемо мати:

$$\left(1 - \frac{2\beta\rho_0\upsilon_0}{(1+\beta p)^3}\right)\frac{dp}{dx} + \frac{\lambda\rho}{2D}\frac{\upsilon_0{}^2}{(1+\beta p)^4} + \rho g\frac{dh}{dx} = 0. \qquad (14)$$

Введемо позначення:

$$\psi_1 = \left(\frac{\lambda\rho}{2D}\frac{\upsilon_0{}^2}{(1+\beta p)^4}\right)\left(1 - \frac{2\beta\rho_0\upsilon_0}{(1+\beta p)^3}\right)^{-1};\ \psi_2 = \rho g\left(1 - \frac{2\beta\rho_0\upsilon_0}{(1+\beta p)^3}\right)^{-1}.$$

Тоді рівняння (14) буде запишеться так:

$$dp/dx + \psi_2\, dh/dx = -\psi_1. \qquad (15)$$

Рівняння (12) є нелінійним за тиском. Для його розв'язування можна використати числові методи, або побудувати ітераційний алгоритм, який полягає в наступному. У величинах ψ_1 та ψ_2 значення тиску будемо вважати постійним, рівним значенню, знайденому на попередньому кроці. Тоді отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$d(p + \psi_2 h) = -\psi_1 dx,$$

розв'язок якого є

$$p(x) = p_0 - \psi_2 h(x) - \psi_1 x. \qquad (16)$$

Алгоритм розв'язування такого рівняння наступний.

1. Для початкового значення тиску p_0 обчислюються величини ψ_1 та ψ_2.
2. Для початкового значення x_z визначається відповідне значення тиску $p(x_z)$.
3. Уточнюються величини ψ_1 та ψ_2 та визначається уточнене значення тиску.
4. Процес продовжується до того часу, поки різниця між двома сусідніми ітераціями буде менше заданої величини.

IV. ВПЛИВ ПАРАМЕТРІВ СУДИНИ НА 424РОЦЕСС УСТАЛЕНОГО РУХУ КРОВІ В НЕУСТАЛЕНОМУ РЕЖИМІ.

В ізотермічному випадку поширеною математичною моделлю руху крові в судині є система взаємопов'язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних [5,6]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} + \upsilon\alpha\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\upsilon^2}{2}\right) + \rho g\dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{\lambda\rho\upsilon^2}{2D} + \dfrac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial x} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial p}{\partial t} = \Psi(x,t). \end{cases} \qquad (17)$$

Тут ρ, v, p – відповідно, густина, швидкість руху і тиск крові; λ – коефіцієнт гідравлічного опору; D – діаметр судини; t – час; x – біжуча координата, $x \in [0, L]$; L – довжина судини; c – швидкість звуку в рідині. Функція

$$\Psi(x,t) = \frac{4}{\pi \ D^2} \sum_{j=1}^{J} \varpi_j(t) \ \delta \ \left(x - x_j\right)\left[\eta \ \left(t - t_{1i}\right) - \eta\left(t - t_{2i}\right)\right] \quad (18)$$

моделює наявність на вздовж судини в точках x_i $\left(i = \overline{1, J}\right)$ наявність відводів–закачування деяких речовин, t_{1i} та t_{2i} – відповідно часи включення та виключення масових відводів, $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда, $\delta(x)$ – дельта–функція Дірака. Будемо вважати кров нестискуючою рідиною. Очевидно, що на рух крові впливає як барометричний перепад тиску, так і деформація судин. Тому доцільно побудувати математичну модель руху крові в судинах з врахуванням згаданих факторів.

Розв'язування задачі. Для цього використаємо рівняння нерозривності

$$\rho \upsilon s = c \equiv const \,.$$

Тут s - площа поперечного перерізу судини. Очевидно, що вона залежить від тиску крові і для її обчислення можна використати емпіричну формулу

$$s = s(p) = s_0(1 + \beta(p - p_0)) \,.$$

Тут h та D_0 - товщина судини і її діаметр, E - модуль Юнга.

$$\beta = D_0 / Eh$$

Індексом 0 будемо позначати стан крові в діастолічній фазі роботи серця. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s_0} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1 + \beta(p - P_d)}\right) = \frac{\beta}{s_0\left(1 + \beta(p - P_d)\right)^2} \frac{\partial p}{\partial x},$$

то рівняння нерозривності

$$\partial(\rho \upsilon)/\partial x + c_z^{-2} \, \partial p/\partial t = \Psi(x,t)$$

Буде мати вигляд

$$q_1 \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{c_z^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \Psi(x,t) \,. \quad q_1 = \frac{c\beta}{s_0\left(1 + \beta(p - P_d)\right)^2} \,. \quad (19)$$

Рівняння (18) є нелінійним. Отримати його розв'язок в аналітичному вигляді не завжди можливо. Як випливає з аналізу літературних джерел, ефективним способом розв'язування задач такого типу є побудова ітераційних процедур.

Відомо, що параметр β є малою величиною. У зв'язку з тим на першому етапі параметр q_1 будемо вважати сталим. Розв'язок рівняння (19) будемо шукати операційним методо в базисі перетворення Лапласа-Карсона. В цьому випадку в зображеннях Лапласа-Карсона рівняння (19) буде мати вигляд

$$q_1 c_z^2 \bar{p}' + s\bar{p} = sp(x,0) + c_z^2 \bar{\Psi}(x,s) \quad (20)$$

Розв'язок рівняння (20) має вигляд

$$\bar{p}(x,s) = e^{-\frac{sx}{q_1 c_z^2}} \left(\bar{p}(0,s) + \frac{1}{q_1 c_z^2} \int_0^x \left[sp(y,0) + c_z^2 \bar{\Psi}(y,s)\right] e^{\frac{sy}{q_1 c_z^2}} dy\right) .$$

За початковий розподіл тиску можна взяти вираз

$$p(x,0) = p_c + \Delta p_c \cos(\alpha_c x + \gamma_c) \,,$$

параметри якого задаються за заміряними даними частоти сердечних скорочень (ЧСС). Аналогічний вигляд має і граничний розподіл тиску

$$p(0,t) = p_t + \Delta p_t \cos(\alpha_t x + \gamma_t) \,.$$

Такий вигляд крайових умов пояснюється тим, що робота серця має періодичний характер з певною частотою та амплітудою

Переходячи від зображень до оригіналів, отримуємо рішення сформульованої задачі:

V. ВИСНОВОК

Отримані результати дозволяють розраховувати розподіл тиску за довжиною трубки у випадку, коли є стоки та джерела, а також аналізувати вплив еластичності як гнучких трубок, так і великих кровоносних суден на процес розподілу тиску в них. Отримані результати підтверджують необхідність врахування розміщення трубки відносно горизонту, оскільки розподіл тиску у вертикальних і горизонтальних судинах істотно відрізняється. Як показує числовий експеримент, на рух рідини має істотний вплив і пружність трубки, яка характеризується модулем Юнга.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

[1] Hotra O., P'yanylo Y. On Approach to the Modeling Process of the Flow of Blood in Vessels. // Intelligent Information and Electronic Technology, 2008.-IIET 2/- P.103-119.

[2] П'янило Я.Д., Лопатьєв А.О., Готра О.З., Трач В.М., П'янило Г.М. Прямі та обернені задачі моделювання рухуу речовини в об'єктах складної структури // Теорія та методика фізичного виховання.- 2009.-№7.- с.11-15.

[3] Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.

[4] Левтов В.А., Регирер С.А., Шадрина Н.Х. Реология крови. М.: Медицина, 1982. 272 с.

[5] Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. М.: Мир, 1981. 624 с..

[6] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736