Методи Розв’язування Крайових Задач з Використанням Дробових Похідних за Часом

Ярослав П’янило
Відділ математичних методів обчислювального експерименту Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
Львів, Україна
danylo794@gmail.com

Олег Браташ
Відділ математичних методів обчислювального експерименту Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
Львів, Україна
olebra31@gmail.com

Галина П’янило
Відділ математичних методів обчислювального експерименту Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
Львів, Україна
danylo794@gmail.com

Валентина Собко
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
Львів, Україна
vg_sobko@ukr.net

Methods for Boundary Value Problems Solving Using Fractional Time Derivatives

Yaroslav Pyanylo
Department for Mathematical Methods of Computing Experiment in Center of Mathematical Modeling of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine
Lviv, Ukraine
danylo794@gmail.com

Oleh Bratash
Department for Mathematical Methods of Computing Experiment in Center of Mathematical Modeling of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine
Lviv, Ukraine
olebra31@gmail.com

Halyna Pyanylo
Department for Mathematical Methods of Computing Experiment in Center of Mathematical Modeling of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine
Lviv, Ukraine
danylo794@gmail.com

Valentyna Sobko
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine
Lviv, Ukraine
vg_sobko@ukr.net

***Анотація*—в даній роботі побудовано спектральний метод дослідження математичних моделей фізичних процесів з використанням похідних за часом дробових порядків.**

***Abstract*—The spectral method for investigation of mathematical models of physical processes using fractional time derivatives are constructed in this paper.**

Ключові слова—спектральні методи, дробові похідні, фільтрація газу, пористі середовища

Keywords—spectral methods, fractional derivatives, gas filtration, porous media

I. Вступ

Процеси руху газу в технологічних об'єктах в системах його транспорту описують, як правило, диференціальними рівняннями в частинних похідних. За теперішніх умов задання вхідної інформації (стосовно її точності та кількості) таких підхід до математичного моделювання забезпечує розв'язання прикладних задач. Однак в деяких випадках є необхідність в штучному заданні деяких параметрів для того, щоб забезпечити фізичну відповідність математичної моделі фізичному процесові. Це, зокрема, має місце у випадку побудови математичної моделі процесу фільтрації газу в пластах підземних сховищ, в яких значення тиску в кожній точці в заданий момент часу залежить від значення його в попередні значення часів. Одним із підходів до розв'язання цього питання є застосування похідних дробових порядків.

Метою роботи є побудова спектрального методу дослідження математичних моделей фізичних процесів, в яких для розв'язування задач математичної фізики використовуються похідні дробових порядків.

II. Визначення дробових похідних

Оператор дробової похідної у термінах Капуто визначається так [6-12]:

$$ {}^{c}D_{\tau}^{\alpha} = \frac{{}^{c}\partial^{\alpha}}{\partial\tau^{\alpha}}\varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)}\int_{0}^{\tau}\frac{\frac{\partial^{m+1}}{\partial\xi^{m+1}}\varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{\alpha-m}}d\xi, \qquad (1) $$

де $m=[\alpha]$; $[\cdot]$ – ціла частина дійсного числа, а в термінахРіммана-Ліувіля –

$$ D_{\tau}^{\alpha} = \frac{{}^{c}\partial^{\alpha}}{\partial\tau^{\alpha}}\varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)}\frac{\partial^{m+1}}{\partial\xi^{m+1}}\int_{0}^{\tau}\frac{\varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{\alpha-m}}d\xi . \qquad (2) $$

Між похідними Капуто іРіммана-Ліувіля має місце наступний зв'язок [12]

$$ {}^{C}D_{\tau}^{\alpha}\varphi = D_{\tau}^{\alpha}\varphi - \sum_{k=0}^{m}\frac{\tau^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}\frac{\partial^{k}}{\partial\tau^{k}}\varphi . \qquad (3) $$

III. Методи розв'язування

1. Аналітичні.

Інтегральні перетворення

Якщо $\mathfrak{I}$ оператор перетворення Лапласа-Карсона, то має місце рівність

$$ \mathfrak{I}\left(D_{a+}^{\alpha}f(t)\right) == s^{\alpha}\left[F(s)-f(0)\right], $$

де $F(s)$ - зображення Лапласа-Карсона оригіналу $f(t)$.

Для знаходження оригіналів зображень з параметром перетворення s^{α} використовується теорема Ефроса.

Теорема Єфроса. Якщо оператор $\overline{a}(p)$ можна подати у вигляді $\overline{a}(p) = \dfrac{\overline{\Phi}(q(p))}{pq(p)}$, причому:

◊) $\overline{\Phi}(p) = p\int_{0}^{\infty}\Phi(t)e^{-pt}dt$ ∫◊ $\int_{0}^{\infty}\left|\Phi(t)\right|e^{-\gamma_0 t}dt < \infty$, ™∑ ©$_0$ >0;

б) $q(p)$ аналітична в півплощині $Re\ p>\gamma_0\geq 0$ функція яка задовільняє в півплощині умову $Re\ q(p)\geq\gamma_0$, тоді оператор $\overline{a}(p)$ зводиться до функції $\overline{a}(p) = \int_{0}^{\infty}L(t,\xi)\Phi(\xi)d\xi$, де

$$ L(t,\xi) = \frac{1}{p}e^{-\xi q(p)} . $$

Числові. Схема Грюнвальда-Летнікова.

Розклад дробової похідної $\dfrac{\partial^{\alpha}p}{\partial t^{\alpha}}$ за схемою Грюнвальда-Летнікова:

$$ {}^{GL}D_{\tau}^{\alpha}p := \lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t)^{-\alpha}\sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]}(-1)^{j}\binom{\alpha}{j}p(\tau-j\Delta t). $$

Оператор Грюнвальда-Летнікова (11) апроксимується на проміжку $[0, \tau]$ з підінтервальним кроком Δt як

$$ {}^{GL}D_{\tau}^{\alpha}p(\tau) \approx \sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]}c_{j}^{(\alpha)}p(\tau-j\Delta t), $$

де $c_{j}^{(\alpha)}$ – коефіцієнти Грюнвальда-Летнікова, які визначаються як

$$ c_{j}^{(\alpha)} = (\Delta t)^{-\alpha}(-1)^{j}\binom{\alpha}{j}. $$

Використавши рекурентне співвідношення [6]

$$ c_{j}^{(\alpha)} = (\Delta t)^{-\alpha}, \quad c_{j}^{(\alpha)} = \left(1-\frac{1+\alpha}{j}\right)c_{j-1}^{(\alpha)}, $$

ми можемо обчислити коефіцієнти $c_{j}^{(\alpha)}$. Для $j = 1$ маємо $c_{1}^{(\alpha)} = -\alpha(\Delta t)^{-\alpha}$.

2. Застосування квадратурних формул. Метод скінченних елементів. Особливості застосування

До числа відкритих і невирішених завдань, пов'язаних з дробовим обчисленням слід віднести:

створення ефективних методів, алгоритмів і програм вирішення нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь нецілого порядку;

розвиток числових методів, адаптованих до вирішення практичних завдань та їх реалізація;

розробка методів вирішення та комп'ютерного моделювання інтегро-диференціальних рівнянь змінних нецілих порядків із заданими початковими і крайовими умовами;

розвиток методів структурної і параметричної ідентифікації динамічних систем, математичні моделі яких містять інтегро-диференціальні оператори нецілих порядків, тощо.

Значний вплив має значення параметру порядку похідної (задача Даніловської).

IV. Модель фільтрації газу в пористому середовищі

Процес масопереносу в пористих середовищах розглядається на прикладі фільтрації газу та рідини, яка описується рівнянням із дробовою похідною за часовою змінною [2-4]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^l}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^l}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^l}{\partial z}\right)=2mh\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{p}{\chi}\right)+2qp_{at}\right). \qquad (4)$$

В останньому рівнянні $l=2$ для газу та l=1 для нестисливої рідини; $\alpha\epsilon(0,2]$ – степінь дробової похідної; $k=k(x,y,z,t)$, $m=m(x,y,z)$ та $h=h(x,y,z)$ коефіцієнти проникності, пористості та товщина середовища відповідно; μ – динамічна в’язкість речовини, p_{at} – атмосферний тиск, q – густина відбору, χ – коефіцієнт стисливості газу.

Рух газу в трубопроводах з використанням дробових похідних порядку α за часом, описується системою

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\omega(x,t)+\frac{\partial p}{\partial x}+a\omega-bp=\Theta(x,t),$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}p(x,t)=\Psi(x,t).$$

Якщо $k=0$, то отримуємо похідну Рімана-Ліувіля, а при $k=1$ – Капуто.

V. Обчислювальний експеримент. Модель фільтрації газу в пористому середовищі

Задача полягає в знаходженні розв’язку $p=p(x,y,z,t)$ рівняння (4) за відомими значеннями тиску $p(x_i, y_i, z_i, t_i)$ у заданих точках середовища та умовою непроникності на контурі середовища. При цьому необхідно, щоб виконувалась умова балансування маси газу в сховищі

$$M=\int_V \rho dv.$$

Інтегрування проводиться по об’єму сховища V, M – маса газу в сховищі, ρ – густина газу, яка пов’язана з тиском рівнянням стану $p=\rho\chi RT$. Тут R – газова стала, T – абсолютна температура газу.

Подамо функції $p(x,t)$ та $\omega(x,t)$, які входять у розв’язок задачі, у ряд Фур’є за многочленами Лагерра $L_m(t)$.

$$p(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}p_m(x)L_m(t),\quad \omega(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\omega_m(x)L_m(t).$$

(5)

Використовуючи формулу (6) та розклавши функцію $k(t)$ яка є ядром інтегралу, у ряд Фур'є за многочленами $L_m(t)$, отримаємо

$$\frac{d}{dt}\int_0^t k(t-\tau)p(\tau)d\tau=\sum_{n=0}^{\infty}k_n\sum_{m=0}^{\infty}p_m L_{n+m}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n L_n(t), \qquad (6)$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x)L_n(t)+\sum_{n=0}^{\infty}p'_n(x)L_n(t)+\\ +a\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n(x)L_n(t)-b\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)L_n(t)=0,\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\omega'_n(x)L_n(t)+\frac{1}{c^2}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x)L_n(t)=0.\end{cases} \qquad (7)$$

В останній формулі

$$c_n(x)=\sum_{m=0}^{n}k_m\omega_{n-m}(x)=\sum_{m=0}^{n}\omega_m(x)k_{n-m},$$

$$d_n(x)=\sum_{m=0}^{n}k_m p_{n-m}(x)=\sum_{m=0}^{n}p_m(x)k_{n-m}.$$

Розв'язок останньої системи будемо шукати у вигляді експоненціальних рядів Фур’є виду

$$p_j(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}p_{jn}(\tau)e^{n\pi ix/l},\qquad x\in(0,l), \qquad (8)$$

де

$$p_{jn}=\frac{1}{l}\int_0^l p_j(x)e^{-n\pi ix/l}dx.$$

Запропонована схема розв’язування диференціального рівняння апробована в ході обчислювального експерименту на основі даних пористого середовища, площею $S=16$ *млн* $м^2$, за наступних початкових параметрів:$\mu=0{,}000011$ Па·с, $h=18{,}2$ м, $R=506{,}7$ $Дж/кг\,°K$, $T=293\ °K$, $z=0{,}87$, $m=0{,}31$, $k=1{,}8e-12\ м^2$.

На рис. 1-4 приведені обчислені значення тисків газу в околі свердловин (рис. 1), в примежовій зоні пласта (рис. 2), в середині області пласта (рис. 3) та середньопластових тисків (рис. 4) для різних значень порядку дробової похідної α.

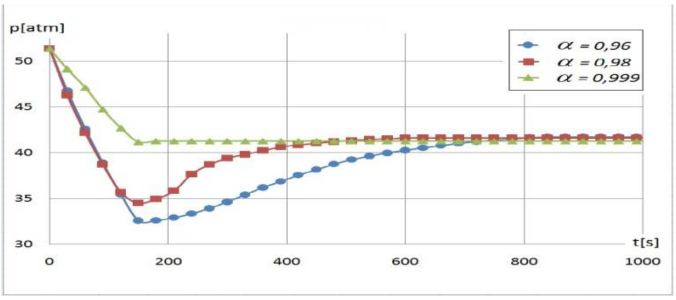

Рис. 1. Значення тисків газу в околі свердловин для різних значень порядку дробової похідної α.

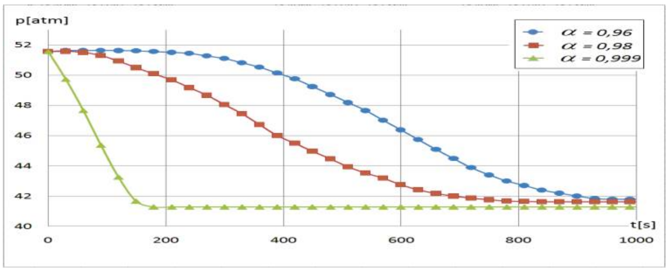

Рис. 2. Значення тисків газу в примежовій зоні пласта для різних значень порядку дробової похідної α.

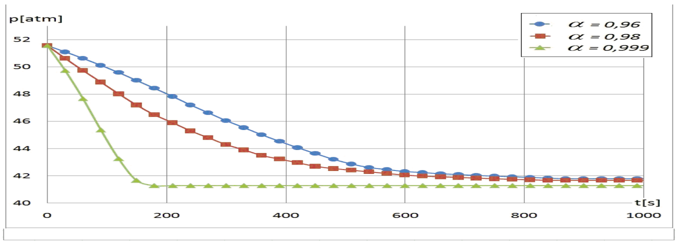

Рис. 3. Значення тисків газу в середині області пласта для різних значень порядку дробової похідної α.

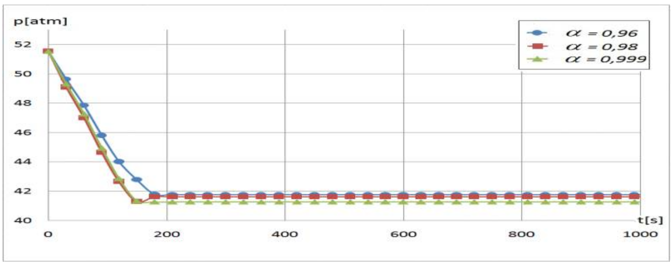

Рис. 4. Значення середньопластових тисків для різних значень порядку дробової похідної α

VI. Висновок

Застосування спектральних многочленів дає можливість побудувати ефективний автоматизований алгоритм для розв’язування крайових задач. Зокрема, застосування многочленів Лагерра дозволяє згортку двох функцій звести до сумування згортки рядів. Тому уникається використання процедури дискретизації, яка вносить значну похибку в процес обчислень. Аналіз результатів, поданих в рисунках, показує, що порядок дробової похідної має значний вплив на розв’язок вихідної задачі. Звідси випливає необхідність апріорної інформації для визначення порядку дробової похідної при моделювання фізичних процесів. Разом з тим, як випливає з обчислювального експерименту модельної задачі, застосування спектрального методу для задач такого типу дозволяє знаходити параметричні подання інтегральних перетворень, ядрами яких є многочлени Лагерра.

Література References

[1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

[2] Васильев В. В., Симак Л. А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. — Киев: Научное издание НАН Украины, 2008 — 256 с.

[3] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — Научно-исследовательский ин-т приклад, математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН. — Москва: Наука, 2005. — 199 с.

[4] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — Москва: Физматлит, 2003. — 272 с.

[5] Нахушева В. А. Некоторые классы дифференциальных уравнений математических моделей нелокальных физических процессов. — Нальчик: КБНЦ РАН, 2002. — 100 с.

[6] Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. — Москва: Высшая школа, 1975. — 407 с.

[7] Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. — Москва: Высшая школа, 1965. — 466 с.

[8] П’янило Я., Васюник М., Васюник І. Використання многочленів Лагерра до спектрального методу розв'язування рівнянь у дробових похідних за часом // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – Вип.17. – С. 163-167

[9] П’янило Я.Д., Собко В.Г. Побудова та дослідження біортогональних поліномів на базі многочленів чебишева . – Прикл. проблеми мех.. і мат. – 2013.-Вип. 11.- С. 181-189.