Про Квантове Моделювання Інформації в Фінансовій Математиці

Анатолій Прикарпатський
кафедра економічної кібернетики та інновацій
Державний педагогічний університет імені Івана Франка
м. Дрогобич, Україна
AGH науково-технологічний університет
Краків, Польща
pryk.anat@cybergal.com

On Quantum Information Modeling in Financial Mathematics

Anatolij Prykarpatski
Dept of Economical Cybernetics and Innovations
Ivan Franko State Pedagogical University of Drohobych, Ukraine
AGH University of Science and Technology
Krakow, Poland
pryk.anat@cybergal.com

***Анотація*—В доповіді пропонується застосування квантової інформатики до моделювання та аналізу даних фінансової математики. На основі некомутативної теорії операторів встановлена теорема про ціноутворення активів, в якій коротко говориться, що стохастичний процес $S = (S_t)$ не дозволяє арбітражні можливості, якщо і тільки якщо існує *еквівалентна міра ймовірності*, при якій $S = (S_t)$ є мартингалами.**

***Abstract*—In the report there is proposed application of quantum informatics to modeling and data analysis in financial mathematics. Based on noncommutative operator theory there is stated a theorem about option pricing, which says that stochastic process $S = (S_t)$ does not allow arbitrage if and only if there exists an equivalent probability measure for which $S = (S_t)$ is martingale.**

Ключові слова—квантова інформатика; стохастичний процес; тензорний добуток; мартингал; арбітраж

Keywords—quantum informatics; stochastic process; tensor product; martingale; arbitrage

I. Вступ

Як добре відомо, дивлячись у ретроспективі, - наука моделювання інформації та її аналізу в фінансовій математиці зазнала значного розвитку після знакових і видатних праць F. Black і M. Scholes [2] та R. Merton [13] (нагороджених Шведською академією наук спеціальною премією з економіки імені Альфреда Нобеля, і яка, як відомо, не має жодного стосунку до так званих Нобелівських премій - правдиві Нобелевські премії надає, згідно із заповітом короля динаміту Альфреда Нобеля, - особисто Король Швеції спільно із Нобелівським комітетом, що складається із Нобелівських лауреатів, а премії з економіки, котрі мають назву «Премії з економіки імені Альфреда Нобеля», - надає Шведська Академія Наук в особі вчених-економістів, членів Академії, котрі і приймають рішення про нагородження премією, а сам преміальний фонд складається із фінансових вкладів майже виключно від крупних приватних Американських та Європейських банківських трастів), в котрих була отримана знаменита «формула оцінки опціонів Блека-Шоулза». Ідея розробки «формули» для вартості опціону насправді сягає своїми коренями ще 1900 року, коли L. Bachelier написав докторську дисертацію [1] під керівництвом H. Poincare з назвою "Theorie de la speculation". Це був власне L. Bachelier, котрий вперше висунув інноваційну ідею використовувати стохастичний процес в якості моделі для еволюції цін на акції. Для випадкового процесу $(St)_{0<t<T}$ він зробив природний і далеко йдучий вибір використати модель браунівського руху, що в даному контексті інтерпретується наступним чином: So сьогоднішня (тобто відома) ціна запасу (скажімо, частка компанії XYZ, для прикладу), а для часу $t > 0$ ціна St є нормально (за Гауссом) розподіленою випадковою величиною.

Як виявилось, праця L. Bachelier не була належно оцінена в сучасній економічній літературі. Тільки в 1965 році відомий економіст P.R. Samuelson [16] знову зайнявся темою розробки відповідної моделі для процесу оцінки акцій: для цього він запропонував геометричну версію того ж самого броунівського руху. Ця модель геометричного браунівського руху сьогодні стала стандартною, а може і еталонною моделлю для опису еволюції ціни акції, хоча зініційованою Самуельсоном, тепер її часто називають моделлю Блека-Шоулза або навіть «стохастичним світом Блека-Шоулза». Прийнято вважати, що геометрична модель браунівського руху зі знесеннями (чи зсувами, «drifts») є економічно більш адекватною від початкового вибору L. Bachelier, але на питання про те, чи є геометрична модель броунівського руху «кращою моделлю» не можна відповісти простими «так» чи «ні»: це суттєво залежить від контексту і самої мети моделювання. Основна проблема як моделі L. Bachelier, а також сучасних математичних моделей у галузі фінансів в цілому є проблема призначення ціни для умовних, так званих контингентних запитів. L. Bachelier з цією метою використовував класичну умову рівноважності або стійкості. І власне заслугою Блека та Шоулза [2] і Мертона [13] було те, щоб замінити цю умову на так званий принцип «відсутності арбітражу», який має і принципове і важливе значення для всієї теорії. Грубо кажучи, арбітражем є безризиковий спосіб отримати прибуток з нульовим вкладом чистих інвестицій. Вважається вельми економічно розсудливим припущенням щодо фінансового ринку вимога про те, чи немає можливості для арбітражу. Примітним є той факт, що цей простий і ніби примітивний "принцип відмови арбітражу" дозволяє вже визначити унікальну ціну опціону в моделі Блека-Шоулза. Це є темою так званої фундаментальної теореми ціноутворення активів, в якій коротко говориться, що процес $S = (St)$ не дозволяє арбітражні можливості, якщо і тільки якщо існує еквівалентна міра ймовірності, при яких $S = (St)$ є мартингалами. Історія теореми фундаментального ціноутворення активів сходить до видатної роботи Harrison, Kreps і Pliska [9, 10, 11]. Після їх новаторської праці багато авторів внесли свій вклад, поступово покращуючи розуміння цієї фундаментальної теореми, наприклад, Duffie і Huang [8], Stricker [19], Dalang, Morton і Willinger [5, 6] і т.д. В праці [7] була доведена справедливість цієї теореми для досить загальних, але комутативних стохастичних процесів, для яких пізніше вдалось довести [3] важливий не комутативний аналог цієї теореми.

Власне, у даній праці теж маємо справу із некомутативним аналогом цієї теореми на основі математичної теорії гільбертових просторів та їх тензорних добутків.

Автором подається зформалізоване визначення ***квантового арбітражу і квантових ринкових стратегій***. Встановлюються відповідні теореми ціноутворення на основі принципу відсутності арбітражу і опціонального розкладу. Зокрема, дається також характеристика повних ринкових моделей для випадку некомутативного опису фінансової моделі. Також встановлено, що для так званої біноміальної ринкової моделі із некомутативними даними процесу одноступенева модель із не комутативними параметрами має бути обов'язково неповною.

II. Квантові (Некомутативні) Ринкові Стратегії та Стохастичні Процеси

Нехай H буде певним сепарабельним гільбертовим простором із нормою ||...||, а $\mathbf{A}$ буде фільтрованою параметром $t \in R_+$ унітальною сімєю слабо *-замкнених в H алгебр операторів, тобто таких (A_t), $t \in R_+$, що $A_s \subset A_t$ для всіх $s \le t$, причому $A_0 := \mathbf{C}I$. Приймаємо також, що на $\mathbf{A}$ є задана операторна trace-норма

$$\| A \| p := \left[\mathrm{trace}(A^* A)^p\right]^{1/p} \tag{1}$$

для довільного оператора $A \in \mathbf{A}$ та $p \in [1,\infty)$, котра визначає банахів простір $L_p(\mathbf{A})$, ***тобто повний нормований простір операторів.*** Оскільки для будь-якого $A \in \mathbf{A}$ коректно визначена функція

$$L_p(A) \ni A \to \mathrm{trace}\ A \in C \tag{2}$$

то існує єдине *умовне математичне сподівання* $E := \mathrm{trace} : L_p(\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ на алгебрі $\mathbf{A}$, для якого можна визначити таку важливу характеристику як ***мартингал*** щодо вказаної вище фільтрації $A_s \subset A_t$ для всіх $s \le t$

$$E(M_t \mid A_s) = E(M_s). \tag{3}$$

Його некомутативне узагальнення дається таким визначенням.

Визначення 1. Нехай $\rho : L_p(\mathbf{A}) \to C$ є довільним невідємно визначеним *станом* на алгебрі A, тобто для певного оператора $\hat{p} \in L_p(\mathbf{A})$ виконується нерівність $trace(\hat{p} A) \ge 0$ для всіх невідємно-визначених операторів $A \in \mathbf{A}_+$. Тоді відображення

$$R_+ \ni t \to M_t \in L_p(A)\ , \tag{4}$$

для якого має місце властивість

$$\rho(AM_t A^*) = \rho(AM_s A^*) \tag{5}$$

для кожного оператора $A \in A_s$ та всіх $s \le t$ називається ***некомутативним мартингалом***. Легко зауважити, що у випадку $\hat{p} = I$ вираз (5) із визначення 1 переходить у вираз (3). Тепер ми можемо перейти до побудови так званого біпроцесу як відображення

$$R_+ \ni t \to H_t \in A \otimes A, \tag{6}$$

де позначено, як звичайно, через "$\otimes$" тензорний добуток алгебри операторів A. Вважатимемо також, що біпроцес є ***адаптованим,*** тобто існує такий набір часів $0 = t_0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_N$, що має місце наступна адитивна факторизація

$$H_t = \sum_{j=1,m} A_{j,t} \otimes B_{j,t} \in A \otimes A, \tag{7}$$

причому $A_{j,t} \otimes B_{j,t} := A_{j,t_k} \otimes B_{jt_k}$ для всіх $j = 1, m$ $j = \overline{1,m}$ та $k = \overline{0, N}$, а також $A_{j,t} = 0 = B_{j,t}$ для всіх $t \ge t_N$, $j = 1, m$.

Визначення 2. Нехай $R_+ \ni t \to H_t \in A \otimes A$ є адаптованим біпроцесом. Тоді стохастичний інтеграл щодо процесу $S := (S_t)_{t \in R+}$ задається стандартним виразом

$$\begin{aligned} \int_{t \in R_+} H_t \circ dS_t &:= \sum_{j=1,N} H_{t_k} \circ (S_{j,t_k+1} - S_{j,t_k}) = \\ &= \sum_{j=1,N} \sum_{j=1,m} \sum_{j=1,m} A_{j,t_k} (S_{j,t_k+1} - S_{j,t_k}) B_{j,t_k} \in A, \end{aligned} \tag{8}$$

незалежним від розкладу (7).

Тепер в стосунку до стохастичного процесу $S := (S_t)_{t \in R+}$ можна дати визначення **мартингального стану** $p : L_p(A) \to C$.

Визначення 3. Квантовий стан $p : L_p(A) \to C$ називається ***мартингальним,*** якщо стохастичний процес $S := (S_t)_{t \in R+}$ *є* мартингалом на фільтрованій алгебрі $(A_t)_{t \in R+}$.

Додатково впровадимо важливе поняття ***квантових ринкових стратегій*** для стохастичного процесу $S := (S_t)_{t \in R+}$.

Визначення 4. Елементи $H := \{H : (H_t)_{t \in R+} \in A \otimes A\}$ будемо називати набором квантових ринкових стратегій для стохастичного процесу $S := (S_t)_{t \in R+}$, якщо $(H_t)_{t \in R+}$ є простим симетричним біпроцесом вигляду

$$H_t = \sum_{j=1,m} \xi_j A_{j,t} \otimes A^*_{j,t} \in A \otimes A, \tag{9}$$

де $\xi_j \in R, j = \overline{1,m}$.

III. Оптимальна Стратегія Безарбітражної Оцінки Активів для Квантового Стохастичного Процесу

Якщо для заданого стохастичного процесу $S := (S_t)_{t \in R+}$ розглянути опуклий конус $C^s(S;H)$ всіх самоспряжених елементів $A \in A$, що задовольняють умову $A \le \overline{H} \circ S$ для деякої ринкової стратегії $\overline{H} \in H$, то можна ввести так званий безарбітражний, або "***no-free-lunch***"-принцип

$$C^s(S;H) \cap (\cup_{t \in R+} A_t) = 0, \tag{10}$$

сформульований у 1997 році David Wolpert та William Macready в праці *"No Free Lunch Theorems for Optimization"* [20, 14], і який полягає в тому, що коли заданий стохастичний процес передбачає оптимальну ціну акцій на заданій множині квантових ринкових стратегій, тоді цей процес є обовязково затратним на залишковій множині стратегій. Оскільки арбітражем є ***безризиковний спосіб отримати прибуток з нульовим вкладом чистих інвестицій,*** то вказаний принцип «**відсутності арбітражу**» має принципове значення для всієї теорії фінансової математики.

Стосовно заданого квантового стохастичного процесу ми додатково позначимо через $M_f(S)$ множину всіх введених вище квантових мартингальних станів $\rho : L_p(A) \to C$. Якщо $M_f(S) \neq \{0\}$, то кажемо, що квантовий стохастичний процес є властивим.

Грунтуючись на введених вище поняттях можна сформулювати основне твердження про оцінювання акцій в фінансовій математиці. А саме, має місце наступна теорема.

Теорема 5. Заданий некомутативний (квантовий) самоспряжений стохастичний процес $S := (S_t)_{t \in R+}$ задовільняє принцип безарбітражності (10) тоді і лише тоді, коли він є властивим, тобто множина $M_f(S)$ квантових мартингальних станів $\rho : L_p(A) \to C$ є нетривіальною.

Нарис доведення.

Лема 6. Нехай квантова стратегія $H_t \in H$ і $\rho : Lp(A) \to C$ є квантовим станом на алгебрі A. Якщо процес $S := (S_t)_{t \in R+}$ є мартингалом щодо стану ρ, то відображення $R_+ \ni t \to (H \circ S)_t \in A$ є також мартингалом щодо стану ρ.

$\lhd$ Покладемо $H_t := A \otimes A^* 1_{[t1,\, t2)}(t)$ де $A \in A_{t1}$ і візьмемо довільний елемент $B \in A_s$ для $s \le t$. Треба показати, що

$$\rho(B \int_s^t H_T \circ dS_T B^*) = 0. \tag{11}$$

Оскільки $\int_s^T H_T \circ dS_T = A(S_{\min(\max(t,t_1),t_2)} - S_{\max(\min(s,t_2),t_1)})A^*$ і за визначенням $S := (S_t)_{t \in R+}$ є мартингалом, легко отримуємо справедливість рівності (11).

Для доведення теореми 5 тепер достатньо припустити, що квантовий процес $S := (S_t)_{t \in R+}$ є мартингалом щодо стану ρ. Тоді на основі Леми 6 робимо висновок, що

$$\rho((H \circ S)_\infty) = \rho((H \circ S)_0) = 0 \tag{12}$$

для кожної квантової стратегії $H \in H$. Навпаки, якщо $s \le t$ і довільне $B \in As$, тоді для $H_\tau := B \otimes B * 1_{[s,t)}(\tau)$ легко отримати, що $(H \circ S)_\infty = B(S_t - S_s)B*$, звідки слідує $\rho(B(St - Ss)B*) = 0$, що завершує доведення теореми.

Вказана теорема є апріорним критерієм вибору оптимальної квантової ринкової стратегії при заданому некомутативниму стохастичнму процесі $S := (S_t)_{t \in R+}$. Так, при умові арбітражу існує така квантова ринкова стратегія, при котрій початкова нульова інвестиція приводить до кінцевої ненульової вартості акції.

Зокрема, легко показати, що для так званої біноміальної ринкової моделі (9) із некомутативними даними квантового стохастичного процесу його одноступенева модель із некомутативними параметрами має бути обов'язково неповною, тобто існування мартингального стану $\rho : L_p(A) \to C$ може не існувати.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

[1] L. Bachelier, Theorie de la speculation, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 17, 21-86 (1900). English translation in: The Random Character of Stock Market Prices, P.Cootner ed., MIT Press, Cambridge, Mass., 1964, pp 17-78

[2] F. Black, M.Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, J. Political Econ., 81(1973), 637-659

[3] Z. Chen, A non-commutative version of the fundamental theorem of asset pricing, Preprint (quant-ph/0112159), 2001

[4] J.C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein, Option pricing: A simplified approach, J. Finance Econ., 7(1979), 229-263

[5] R.C. Dalang, A. Morton, W. Willinger, Equivalent martingale measures and noarbitrage in stochastic securities market model, Stochastics Stoch. Rep., 29(1990), 185-201

[6] F. Delbaen, W. Schachermayer, A general version of the fundamental theorem of asset pricing, Math. Ann., 300(1994), 463-520

[7] F. Delbaen, W. Schachermayer, The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes, Math. Ann., 312(1998), 215-250

[8] D. Duffie, C.F. Huang, Multiperiod security markets with differential information: martingales and resolution times, J. Math. Econom., 15(1986), 283-303

[9] J.M. Harrison, D.M. Kreps, Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, J. Econ. Theory, 20(1979), 381-408

[10] J.M. Harrison, S.R. Pliska, Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, Stoch. Proc. Appl., 11(1981), 215-260

[11] D.M. Kreps, Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities, J. Math. Econ., 8(1981), 15-35

[12] B.Yu. Kyshakevych, A.K. Prykarpats'kyi, and I.P. Tverdokhlib. Analysis of optimal strategies for a competing stock market portgolio model with a polyvariant profit function. Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 47, No. 2, 210-227

[13] R.C. Merton, Theory of rational option pricing, Bell J. Econ. Manag. Sci., 4(1973), 141-183 P92 K.R.Parthasarathy, An Introduction to Quantum Stochastic Calculus, Birkhauser Verlag, Basel, 1992

[14] https://en.wikipedia.org/wiki/No_free_lunch_theorem

[15] K.R. Parthasarathy, An Introduction to Quantum Stochastic Calculus, Birkhauser Verlag, Basel, 1992

[16] P.A. Samuelson, Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly, Industrial Manage. Review, 6(1965), 42-49

[17] W. Schachermayer, Introduction to the Mathematics of Financial Markets, (St. Flour summer school 2000), to appear in Lecture Notes in Math. Sch66 H.H.Sch?afer, Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 1966

[18] C. Stricker, Arbitrage et lois de martingale, Ann. Inst. H. Poincare, Probab. Statist., 26(1990), 451-460

[19] D.H. Wolpert, W.G. Macready, "No Free Lunch Theorems for Optimization IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1(1997), p. 67