Алгоритми Побудови Ортогональних Базисів на Основі Рекурсивних Функцій Ґалуа

Наталія Превисокова
кафедра інформатики
Прикарпатський національний університет
Івано-Франківськ, Україна
prevysokova.n@gmail.com

Любомир Петришин
кафедра управління
Університет AGH
Краків, Польща
L.b.petryshyn@gmail.com

Algorithms for Constructing Orthogonal Basis From the Recursive Galois Functions

Nataliia Prevysokova
Department of Computer Science
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
Ivano-Frankivsk, Ukraine
prevysokova.n@gmail.com

Lubomyr Petryshyn
dept. of Computer Science
AGH University
Krakow, Poland
L.b.petryshyn@gmail.com

***Анотація*—Розроблено алгоритми побудови ортогональних систем функцій на основі рекурсивної системи функції Ґалуа для виконання дискретних перетворень в цифровій обробці сигналів. Доведено властивості побудованих базисів.**

***Abstract*—It is developed algorithms of orthogonal functions construction on recursive Galois functions system base to perform a discrete transform in digital signal processing. The properties of the built bases are proved.**

Ключові слова—дискретне ортогональне перетворення; системи функцій Ґалуа; базис перетворення; властивості базису

Keywords—discrete orthogonal transform; Galois functions system; transform base; basis properties

I. Вступ

Останнім часом поширеними є методи цифрової обробки інформаційних потоків на основі дискретних перетворень, серед яких найчастіше використовуються дискретні перетворення Фур'є, косинусне, Уолша, Хаара, вейвлет-перетворення та ін. [1-3]. Дискретні ортогональні перетворення використовуються для кодування, обробки, зменшення надлишковості інформації, зокрема, при обробці зображень, у системах зв'язку, спектроскопії, радіолокації.

Підвищення вимог щодо швидкості і якості обробки інформації зумовлює необхідність розробки методів ефективних перетворень [1-3]. Однією із важливих проблем реалізації методів обробки інформації є вибір базису перетворення [1, 3], придатного для подання інформаційного потоку.

Дискретне пряме та обернене перетворення одновимірного інформаційного потоку $X(t)$ зі скінченною енергією, заданого вектором $X = [X(0), X(1),..., X(N-1)]$ у базисі ψ_i, визначаються за формулами

$$Y_i = \langle X, \psi_i \rangle,$$

$$X = \sum_{i=0}^{N-1} \langle X, \psi_i \rangle \tilde{\psi}_i ,$$

де Y_i – координати вектора коефіцієнтів перетворення (спектр) $Y = [Y(0), Y(1),..., Y(N-1)]$, $i = 0,1,..., N-1$; $\langle \, , \rangle$ – позначення скалярного добутку; $\tilde{\psi}_j$ – біортогональний (взаємний) базис до ψ_i, $\langle \psi_i, \tilde{\psi}_j \rangle = \delta_{i,j}$, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера: $\delta_{i,j} = 1$ для $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ для $i \neq j$; $X(t) = X(j)$, $t \in [j, j+1)$; $\langle X(t), \psi_i(t) \rangle = \int_a^b X(t) \psi_i(t) dt$ або $\langle X, \psi_i \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} X_N(j) \psi_i(j)$.

Ортогональний базис одночасно біортогональний до себе, тому ортогональне перетворення є частинним випадком біортогонального.

У матричній формі дискретне перетворення вхідного інформаційного потоку X в базисі, заданому матрицею M, подається згідно

$$Y = MX \ .$$

Оптимальним для подання є перетворення Карунена-Лоева, яке потребує виконання обчислень матриць власних значень та власних векторів для кожного вхідного інформаційного потоку, тому на практиці не використовується [1 – 3]. Це зумовлює необхідність дослідження та формування нових базисів, які дозволяють ефективно розв'язувати окремі задачі цифрової обробки інформації.

Автором розвивається напрям синтезу базисів перетворень і розв'язується задача розробки алгоритмів побудови ортогональних базисів на основі рекурсивних систем функцій Ґалуа.

II. Основна Частина

Рекурсивні системи функцій Ґалуа [2] $\{Gal(n,\theta,i)\}$, $i = 0,1,...,2^n - 1$ утворюються відповідно до породжуючого вектора поля Ґалуа $GF(2^n)$.

Зокрема, у полі $GF(2^4)$ існують чотири породжуючі вектори: $(1,0,0,1,1)$, $(1,0,0,1,\bar{1})$, $(1,1,0,0,1)$, $(1,1,0,0,\bar{1})$. На основі даних векторів із початкових векторів $(g_0, g_1, g_2, g_3) = (1,1,1,1)$ і $(g_0, g_1, g_2, g_3) = (0,0,0,0)$ генеруються рекурсивні послідовності $g_0, g_1, g_2, \dots g_{2^n-2}$ за правилами, які відповідають породжуючим векторам [2], наприклад $(1,0,0,1,1) \to g_{j+4} = g_j \oplus g_{j+3}$; $(1,1,0,0,1) \to g_{j+4} = g_j \oplus g_{j+1}$; $j = 0,1,...,2^n - 2$. Фрагмент із $n-1$ нульових елементів послідовності доповнюється нулем.

Рекурсивні функції Ґалуа $\{Gal(n,\theta,i)\}$ в точках $\theta = \frac{j}{N}$ визначаються із послідовностей $\{g_j\}$ та доозначаються до неперервних функцій на інтервалах $\theta \in [\frac{j}{N};\frac{j+1}{N})$, $N = 2^n$

$$Gal(n,\theta,0) = Gal(n,\frac{j}{N},0) = 1 - 2g_j \ , \qquad (1)$$

$$Gal(n,\theta,i+1) = Gal(n,\theta + \frac{1}{N},i) \ .$$

Відповідно до наведених процедур побудови матриці рекурсивних систем функцій Ґалуа є тоепліцевими циклічними або ганкелевими антициклічними (циркулянтами) [2].

У результаті обчислення рангів матриць рекурсивних систем функцій Ґалуа різних порядків встановлено, що будь-яка підсистема із $2^n - 1$ функцій є лінійно незалежною, оскільки ранг її матриці дорівнює $2^n - 1$, водночас, будь-яка функція системи із 2^n функцій є лінійною комбінацією інших функцій.

З властивості $\sum_{s=0}^{2^n-1} Gal(n,\theta_s,i) = 0$ та властивості симетрії $\sum_{i=0}^{2^n-1} Gal(n,\theta_s,i) = 0$ слідує, що $Gal(n,\theta_s,j) = -\sum_i Gal(n,\theta_s,i)$, де $i \neq j$ і кожна функція є лінійною комбінацією інших функцій системи. Зокрема, остання функція є лінійною комбінацією інших функцій системи.

Отже, рекурсивна система $N = 2^n$ функцій Ґалуа є лінійно залежною і не утворює повної системи в просторі $L_2[0,1)$, що обмежує її застосування для розкладання інформаційних потоків.

Розроблено два алгоритми побудови ортогональних базисів на основі рекурсивних функцій Ґалуа.

A. Алгоритм 1.

На першому етапі алгоритму рекурсивна система функцій Ґалуа [2] модифікується шляхом зміни нумерації перших $2^n - 1$ функцій

$$Gal_m(n,\theta,i) = Gal(n,\theta,i-1) \ ,$$

де $\theta \in [0;1)$, $n = 1,2,\dots$ – порядок функції, $i = 0,1,...,2^n - 1$.

На другому етапі здійснюється доповнення системи одиничною функцією

$$Gal_m(n,\theta,0) = 1 \ .$$

На третьому етапі до функцій одержаної на попередніх двох етапах модифікованої системи застосовується процедура ортогоналізації Грама-Шмідта [3], в результаті якої одержують ортогональні функції $\{G(n,\theta,i)\}$

$$G(n,\theta,0) = 1,$$

$$G(n,\theta,1) = Gal_m(n,\theta,1) - \frac{\langle Gal_m(n,\theta,1), G(n,\theta,0)\rangle}{\|G(n,\theta,0)\|^2_{L_2}} G(n,\theta,0),$$

$$G(n,\theta,2)=Gal_m(n,\theta,2)-\frac{\langle Gal_m(n,\theta,2),G(n,\theta,0)\rangle}{\|G(n,\theta,0)\|_{L_2}^2}G(n,\theta,0)-$$

$$\frac{\langle Gal_m(n,\theta,2),G(n,\theta,1)\rangle}{\|G(n,\theta,1)\|_{L_2}^2}G(n,\theta,1),$$

……………………………………………………………

$$G(n,\theta,k+1)=Gal_m(n,\theta,k+1)-$$

$$-\sum_{i=0}^{k}\frac{\langle Gal_m(n,\theta,k+1),G(n,\theta,i)\rangle}{\|G(n,\theta,i)\|_{L_2}^2}G(n,\theta,i)\,, \qquad (2)$$

де $k=0,1,\ldots,N-1$, $\|G(n,\theta,i)\|_{L_2}^2$ – норма в просторі інтегровних з квадратом функцій $L_2[0,1)$, $\langle Gal_m(n,\theta,k+1),G(n,\theta,i)\rangle$ – скалярний добуток.

Для прикладу, наведемо матрицю значень ортогональних функцій Ґалуа $G(3,\theta,i)$ в точках $\theta=\frac{j}{8}$

$$\left\|\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1\\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1\\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1\\
-1/2 & 3/2 & -1/2 & -3/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2\\
3/2 & -1/2 & -3/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2\\
1/6 & -1/2 & -1/6 & -1/2 & 5/6 & 1/6 & -5/6 & 7/6\\
-2/5 & 2/15 & -2/5 & 2/15 & 2/3 & -14/15 & 2/3 & 2/15
\end{array}\right\|.$$

На рис. 1 наведені графіки одержаної в результаті ортогоналізації системи ортогональних функцій Ґалуа $G(3,\theta,i)$.

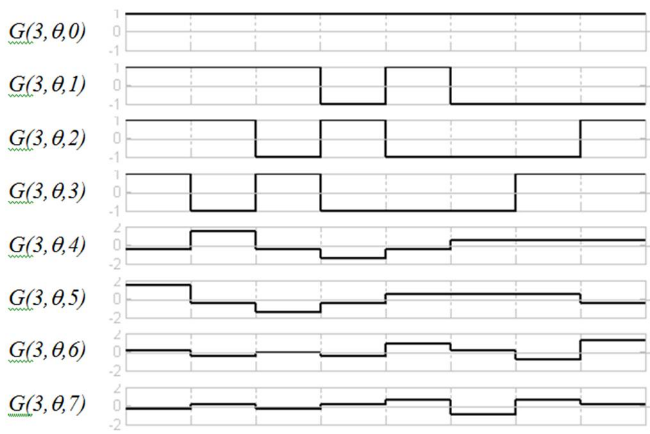

Рис. 1. Система ортогональних функцій Ґалуа, $n=3$.

У результаті дослідження залежностей (2) здійснено факторизацію матриці перетворення G і подання її у формі добутку матриць

$$G=C\times Gal_m\,,$$

де C – трикутна матриця ортогоналізації $N\times N$, Gal_m – матриця значень функцій $\{Gal_m(n,\theta,i)\}$ в точках $\theta=\frac{j}{N}$,

$$C=\begin{bmatrix} c_{00} & 0 & \ldots & 0\\ c_{10} & c_{11} & .. & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ c_{N-1,0} & c_{N-1,1} & \ldots & c_{N-1,N-1}\end{bmatrix}.$$

Елементи матриці C є дійсними числами, які визначаються рекурсивно

$$c_{k+1,j}=Gal_m(n,\frac{j}{N},k+1)-\sum_{i=0}^{k}\frac{\sum_{l=0}^{N-1}c_{il}\cdot Gal_m(n,\frac{l}{N},k+1)}{\sum_{l=0}^{N-1}(c_{il})^2}c_{ij}\,.$$

Встановлено, що для всіх $k\le n$, $j\le n$ елементи матриці C задовольняють умови $c_{kk}=1$; $c_{kj}=0,\ k>j$.

Доведено наступні властивості одержаної на основі даного алгоритму системи функцій [4].

1) Функції системи лінійно-незалежні та ортогональні.

Система, одержана в результаті ортогоналізації, є ортогональною. Ортогональна система функцій є лінійно незалежною.

2) Система функцій є повною в просторі $L_2[0,1)$.

Встановлено, що ортогональні функції Ґалуа утворюють повну систему функцій у просторі $L_2[0,1)$, оскільки система функцій Уолша повна, та досліджено, що оператор лінійного перетворення матриці Уолша розміру $N\times N$ в матрицю Ґалуа такого ж розміру є обмеженим. Властивість повноти дозволяє застосовувати побудовану систему в якості базису для розкладання інформаційних потоків та виконання дискретних ортогональних перетворень.

3) Оскільки система є повною, то може використовуватись в якості базису дискретного ортогонального перетворення.

B. Алгоритм 2.

На першому етапі будується рекурсивна послідовність аналогічно як в першому алгоритмі: вибирається примітивний незвідний поліном певного степеня n і на основі полінома генеруються періодичні рекурсивні послідовності $g_0, g_1, g_2, \dots g_{2^n-2}$ з періодом $M = 2^n - 1$.

На другому етапі з рекурсивної послідовності із $2^n - 1$ елементів утворюється перша функція $\{GR(n, \theta, 1)\}$ системи $\{GR(n, \theta, i)\}$ та доозначається до неперервної функції на інтервалах $\theta \in [\frac{j}{N}; \frac{j+1}{N})$ за правилом

$$GR(n, \frac{j}{N}, 1) = 1 - 2g_j,$$

$$GR(n, \theta, 1) = GR(n, \frac{j}{N}, 1).$$

На третьому етапі здійснюється побудова функцій $\{GR(n, \theta, 2)\}, \{GR(n, \theta, 3)\}, \dots, \{GR(n, \theta, 2^n - 1)\}$ за допомогою циклічного зсуву першої функції та кожної наступної одержаної функції вправо на $\frac{1}{N}$, а також паралельне перенесення всіх функцій на інтервал $\theta \in [\frac{1}{N}; 1)$:

$$Gal_{ort}(n, \theta, i) = GR(n, \theta - \frac{1}{N}, i - 1).$$

На четвертому етапі система із $2^n - 1$ функцій доповнюється одиничною функцією

$$G_{ort}(n, \theta, 0) = 1.$$

На наступному етапі здійснюється доповнення значень всіх функцій на інтервалі $\theta \in [0; \frac{1}{N})$

$$G_{ort}(n, \theta, i) = 1.$$

Матриця значень ортогональних функцій системи $Gal_{ort}(3, \frac{j}{N}, i)$ на прикладі n=3

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Доведено наступні властивості одержаної на основі другого алгоритму системи функцій.

1) Функції системи лінійно-незалежні та ортогональні;

2) Система функцій є повною в просторі $L_2[0,1)$ і може використовуватись в якості базису дискретного ортогонального перетворення.

Встановлено, що побудовані функції утворюють повну систему функцій у просторі $L_2[0,1)$, оскільки система функцій Уолша повна, та досліджено, що оператор лінійного перетворення матриці Уолша розміру $N \times N$ в матрицю побудованої системи такого ж розміру є обмеженим. Властивість повноти дозволяє застосовувати побудовану систему в якості базису для розкладання інформаційних потоків та виконання дискретних ортогональних перетворень.

3) Матриця оберненого перетворення співпадає з матрицею прямого перетворення, що дозволяє використовувати однакові алгоритми прямого та оберненого перетворень.

III. Висновки

Таким чином, розроблено два алгоритми побудови повних ортогональних систем функцій на основі рекурсивної системи функцій Ґалуа. Перший алгоритм реалізується на основі процедури ортогоналізації Грама-Шмідта модифікованої лінійно незалежної рекурсивної системи функцій Ґалуа, доповненої одиничною функцією. Другий алгоритм базується на заміні окремих значень функцій системи. Доведено властивості побудованих базисів.

Запропоновані алгоритми дозволяють будувати повні ортогональні базиси для спектрального аналізу на основі виконання дискретних ортогональних перетворень інформаційних потоків.

Література References

[1] А. И. Солодовников, А. М. Спиваковский, Основы теории и методы спектральной обработки информации, Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.

[2] Л. Б. Петришин, Теоретичні основи перетворення форми та цифрової обробки інформації, К.: ІЗіМН МОУ, 1997.

[3] В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов, Спектральные методы расчета и проектирования систем управления, М.: Машиностроение, 1986.

[4] Н. В. Превисокова. Метод обробки інформації на основі дискретного ортогонального перетворення Ґалуа / Н. В. Превисокова // Вісник Хмельницького нац. ун-ту. Технічні науки. – 2010. – № 2 (146). – С.149 –156.