

Математичне Моделювання та Аналіз Міцності Деревини

Софія Поберейко
кафедра інформаційних технологій
Національний лісотехнічний університет України
Львів, Україна
Sofi_23@i.ua

Ярослав Соколовський
кафедра інформаційних технологій
Національний лісотехнічний університет України
Львів, Україна
sokolowsky@ukr.net

Mathematical Modeling and Analysis of the Strength of Wood

Sofia Pobereyko
dept. of Information Technology
National Forestry and Wood Technology University of
Ukraine
Lviv, Ukraine
Sofi_23@i.ua

Yaroslav Sokolovskyy
dept. of Information Technology
National Forestry and Wood Technology University of
Ukraine
Lviv, Ukraine
sokolowsky@ukr.net

Анотація—синтезовано математичну модель для визначення міцності анізотропних матеріалів в умовах двовісного напруженого стану та проведено її апробацію на деревині листяних та хвойних порід. Зокрема, побудовано криві короткочасної міцності для деревини сосни та дуба. На основі їх аналізу виявлено, що запропонована модель задовільно відображає особливості граничного напруженого стану досліджуваних порід деревини у радіально-тангенціальній площині структурної симетрії.

Abstract—the mathematical model was synthesized to determine the strength of anisotropic materials under biaxial stressed state and its approbation was held using broad – and needle – leaved trees. In particular, the short – term strength curved lines were made for wood of pine and oak. On the basis of their analysis it revealed that the offered model reflects the features of the limiting stressed state of the investigated timber species in radial and tangential plane of structural symmetry satisfactorily.

Ключові слова—математична модель; міцність; напруження; деформації; відносна об'ємна деформація; густина потенціальної енергії

Keywords—mathematical model; strength; strain; warp; volumetric strain; potential energy density

I. ВСТУП

Підвищення показників якості продукції та зниження енергетичних витрат на її виготовлення є однією з головних умов успішного розвитку деревообробних підприємств. Визначальна роль у вирішенні цієї проблеми

належить дослідженням короткочасної міцності деревини зі складним напруженим станом, бо міцність є одним із тих факторів, що істотно обмежують інтенсифікацію процесів зневоднення пиломатеріалів. Тривалість цих процесів повинна бути такою, щоб в усіх точках висушеного матеріалу значення компонентів тензора напружень не перевищували граничних значень. Інакше матимуть місце залишкові напруження, які є основними чинниками зниження показників якості матеріалу. Для визначення граничних напружень у деревині з одновісним напруженим станом використовують експериментальні методи дослідження, а у деревині зі складним напруженим станом – метод математичного моделювання.

Застосування відомих критеріїв міцності [1] для моделювання кривих та поверхонь міцності деревини з двовісним, плоским та об'ємним напруженими станами є не достатньо обґрунтованим. Жодна із зазначених моделей не адаптована і не апробована на деревині хвойних та листяних порід. Складність вирішення цієї задачі полягає у тому, що вхідними даними цих моделей (критеріїв) є сталі міцності (наприклад, межі зсуву ортотропного матеріалу вздовж діагональних площин структурної симетрії), які на сьогодні не підлягають експериментальному визначенню.

На сьогоднішній день не існує технічних рішень щодо визначення напружень у виробках з деревини, а існуючі механічні теорії міцності з недостатньою повнотою описують їх міцність в умовах складного напруженого стану. Тому задача моделювання міцності деревини є актуальною. Відсутність емпіричних даних з визначення

меж міцності чистого зсуву вздовж головних та діагональних площин структурної симетрії для деревини різних порід не дає змоги підтвердити або заперечити достовірність відомих на сьогодні критеріїв міцності для досліджуваного матеріалу. Зокрема, не адаптовано та не апробовано жодну модель на деревині хвойних та листяних порід.

II. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ МІЦНОСТІ АНІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ

Для вирішення цієї задачі побудовано нову математичну модель для визначення короточасної міцності анізотропних матеріалів в умовах двовісного напруженого стану. Складовими цієї моделі є:

- умова міцності [1]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{E_{11}E_{22}}} \left((1 - \mu_{23}\mu_{32}) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} \sigma_{11}^2 + (\mu_{13}\mu_{32} + \mu_{23} \cdot \right. \\ & \cdot \mu_{31} - \mu_{12} - \mu_{21}) \sigma_{11} \sigma_{22} + (1 - \mu_{13}\mu_{31}) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \sigma_{11}^2 \left. \right) - \\ & - \frac{k}{E_{11}} \left(1 - \mu_{23}\mu_{32} + (\mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21}) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} + (\mu_{32}\mu_{21} - \right. \\ & \left. - \mu_{31}) \cdot \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}} \right) (\sigma_{11} - a) - \frac{k}{E_{22}} (1 - \mu_{13}\mu_{31} + (\mu_{13}\mu_{32} - \\ & - \mu_{12}) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} + (\mu_{31}\mu_{12} - \mu_{32}) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{33}}}) (\sigma_{22} - b) - c = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

- залежності модулів пружності матеріалу від способу навантаження [2]:

$$E_{ii} = \begin{cases} E_{ii}^P & \text{для } \sigma_{ii} > 0 \text{ і } \sigma_{jj} - \text{будь-якого, } i \neq j; \\ E_{ii}^C & \text{для } \sigma_{ii} < 0 \text{ і } \sigma_{jj} - \text{будь-якого, } i \neq j; \end{cases} \quad (2)$$

- умова для визначення сталих a , b моделі (1): значення меж міцності розтягу σ_{ii}^{P-} та σ_{ii}^{P+} в умовах двовісних напружених станах ($\sigma_{ii} > 0, \sigma_{jj} \rightarrow -0, i \neq j$) та ($\sigma_{ii} > 0, \sigma_{jj} \rightarrow +0, i \neq j$) є тотожно рівними

$$\sigma_{ii}^{P-} = \sigma_{ii}^{P+} = \sigma_{ii}^P. \quad (3)$$

Тут

$$c = \frac{1}{2\sqrt{E_{11}^P E_{22}^P}} \left((1 - \mu_{23}\mu_{32}) \sqrt{\frac{E_{22}^P}{E_{11}^P}} a^2 + (\mu_{13}\mu_{32} + \right. \quad (4)$$

$$\left. + \mu_{23}\mu_{31} - \mu_{12}\mu_{21}) ab + (1 - \mu_{13}\mu_{31}) \sqrt{\frac{E_{11}^P}{E_{22}^P}} b^2 \right);$$

μ_{ij} – коефіцієнти Пуассона; E_{ii} – модулі пружності; σ_{ii} – компоненти тензора напружень; a , b і k – сталі коефіцієнти; E_{ii}^P та E_{ii}^C – значення модулів пружності розтягу та стиску в i -му напрямку анізотропії матеріалу.

Побудована модель на відміну від відомих дає змогу розрахувати граничні напружені стани як матеріалів із слабкою так і матеріалів із сильною асиметрією меж міцності. Тому оскільки деревина хвойних порід належить до матеріалів із сильною асиметрією меж міцності у тангенціальному та радіальному напрямках ортотропії, а деревина листяних порід – до матеріалів із слабкою асиметрією меж міцності у цих напрямках, то запропонована модель може бути використана для моделювання міцності як деревини листяних так і деревини хвойних порід у радіально-тангенціальній площині структурної симетрії

III. ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ А І В МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Для вирішення поставленої задачі проведемо дослідження кривої (1) у точках ($\sigma_{11} = \sigma_{11}^P; \sigma_{22} = 0; \sigma_{33} = 0$) та ($\sigma_{11} = 0; \sigma_{22} = \sigma_{22}^P; \sigma_{33} = 0$). Для цього розглянемо такі випадки: ($\sigma_{11} > 0; \sigma_{22} \rightarrow -0; \sigma_{33} \equiv 0$), ($\sigma_{11} > 0; \sigma_{22} \rightarrow +0; \sigma_{33} \equiv 0$), ($\sigma_{11} \rightarrow -0; \sigma_{22} > 0; \sigma_{33} \equiv 0$), ($\sigma_{11} \rightarrow +0; \sigma_{22} > 0; \sigma_{33} \equiv 0$).

У випадку коли $\sigma_{11} > 0, \sigma_{22} \rightarrow -0$, а $\sigma_{33} \equiv 0$ значення модулів пружності E_{11} , E_{22} та E_{33} , згідно залежностей (2), дорівнюють відповідно E_{11}^P , E_{22}^C та E_{33}^P , а рівняння міцності (1) має вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \mu_{23}\mu_{32}}{2E_{11}^P} (\sigma_{11}^P)^2 + \frac{k}{E_{11}^P} \left(1 - \mu_{23}\mu_{32} + (\mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21}) \sqrt{\frac{E_{11}^P}{E_{22}^C}} + \right. \\ & \left. + (\mu_{32}\mu_{21} - \mu_{31}) \sqrt{\frac{E_{11}^P}{E_{33}^P}} \right) (\sigma_{11}^P - a) - \frac{k}{E_{22}^C} \left((\mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12}) \sqrt{\frac{E_{22}^C}{E_{11}^P}} + \right. \\ & \left. + (1 - \mu_{13}\mu_{31}) + (\mu_{31}\mu_{12} - \mu_{32}) \sqrt{\frac{E_{22}^C}{E_{33}^P}} \right) b - c = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогічним чином визначасмо вигляд умови (1) для інших зазначених вище випадків. У результаті одержимо чотири рівняння, які з врахуванням тотожності (3) можна подати у вигляді системи двох рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21} + (\mu_{32}\mu_{21} - \mu_{31})\sqrt{\frac{E_{22}^P}{E_{33}^P}} + \right. \\ & \left. + (1 - \mu_{23}\mu_{32})\left(\sqrt{\frac{E_{22}^P}{E_{11}^P}} + \sqrt{\frac{E_{22}^P}{E_{11}^C}}\right) \right) a + \\ & + (\mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12})b = (\mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12})\sigma_{22}^P; \\ & \left(\mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12} + (\mu_{31}\mu_{12} - \mu_{32})\sqrt{\frac{E_{11}^P}{E_{33}^P}} + \right. \\ & \left. + (1 - \mu_{13}\mu_{31})\left(\sqrt{\frac{E_{11}^P}{E_{22}^P}} + \sqrt{\frac{E_{11}^P}{E_{22}^C}}\right) \right) b + \\ & + (\mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21})a = (\mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21})\sigma_{11}^P \end{aligned} \right. \quad (6)$$

З системи рівнянь (6) визначено сталі a і b математичної моделі короткочасної міцності анізотропних матеріалів (1) – (3):

$$a = B_2 \frac{B_1\sigma_{22}^P - A_1\sigma_{11}^P}{A_2B_2 - A_1B_2}; \quad (7)$$

$$b = A_1 \frac{A_2\sigma_{11}^P - B_2\sigma_{22}^P}{A_2B_1 - A_1B_2}, \quad (8)$$

де

$$A_1 = \mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21}; \quad B_2 = \mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & \mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21} + (\mu_{32}\mu_{21} - \mu_{31})\sqrt{\frac{E_{22}^P}{E_{33}^P}} + \\ & + (1 - \mu_{23}\mu_{32})\left(\sqrt{\frac{E_{22}^P}{E_{11}^P}} + \sqrt{\frac{E_{22}^P}{E_{11}^C}}\right); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B_1 = & \mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12} + (\mu_{31}\mu_{12} - \mu_{32})\sqrt{\frac{E_{11}^P}{E_{33}^P}} + \\ & + (1 - \mu_{13}\mu_{31})\left(\sqrt{\frac{E_{11}^P}{E_{22}^P}} + \sqrt{\frac{E_{11}^P}{E_{22}^C}}\right); \end{aligned} \quad (11)$$

Значення сталої k математичної моделі визначається за формулою наведеною у роботі [1]

$$k = \frac{f(\sigma_{11}^P; 0) - f(0; \sigma_{22}^P)}{\varepsilon_V(\sigma_{11}^P; 0) - \varepsilon_V(0; \sigma_{22}^P)}, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} f(\sigma_{11}^P; 0) - f(0; \sigma_{22}^P) = & \frac{1 - \mu_{23}\mu_{32}}{2E_{11}^P} (\sigma_{11}^P)^2 - \\ & - \frac{1 - \mu_{13}\mu_{31}}{2E_{22}^P} (\sigma_{22}^P)^2; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_V(\sigma_{11}^P; 0) - \varepsilon_V(0; \sigma_{22}^P) = & \frac{1}{E_{11}^P} \left(1 - \mu_{23}\mu_{32} + \right. \\ & + (\mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21})\sqrt{\frac{E_{11}^P}{E_{22}^P}} + (\mu_{32}\mu_{21} - \mu_{31})\sqrt{\frac{E_{11}^P}{E_{33}^P}} \left. \right) \cdot \\ & \cdot \sigma_{11}^P - \frac{1}{E_{22}^P} \left(1 - \mu_{13}\mu_{31} + (\mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12})\sqrt{\frac{E_{22}^P}{E_{11}^P}} + \right. \\ & \left. + (\mu_{31}\mu_{12} - \mu_{32})\sqrt{\frac{E_{22}^P}{E_{33}^P}} \right) \sigma_{22}^P. \end{aligned} \quad (14)$$

IV. РЕЗУЛЬТАТИ АПРОБАЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НА ДЕРЕВИНІ ЛИСТЯНИХ ТА ХВОЙНИХ ПОРІД

Проведено апробацію моделі (1) – (11) на деревині хвойних та листяних порід. Для цього використано алгоритм [2], практична реалізація якого полягає у: 1) табулюванні функції $\phi(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ з кроками табулювання $\Delta\sigma_{11}$ та $\Delta\sigma_{22}$; 2) знаходженні для фіксованих значень аргументу σ_{11} таких значень аргументу σ_{22} для яких виконується хоча б одна із умов:

$$\phi(\sigma_{11}, \sigma_{22}) > 0, \quad \text{а} \quad \phi(\sigma_{11}, \sigma_{22} + \Delta\sigma_{22}) < 0 \quad (15)$$

або

$$\phi(\sigma_{11}, \sigma_{22}) < 0, \quad \text{а} \quad \phi(\sigma_{11}, \sigma_{22} + \Delta\sigma_{22}) > 0, \quad (16)$$

де $\phi(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ – функція, значення якої тотожно дорівнюють значенням виразу у лівій частині нелінійного рівняння (1); 3) виборі з пари чисел σ_{22} та $\sigma_{22} + \Delta\sigma_{22}$ такого числа для якого абсолютне значення функції $\phi(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ є мінімальним; 4) побудові кривих міцності за знайденими точками $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$.

За допомогою цього алгоритму визначено граничні напружені стани деревини сосни та дуба, значення фізико-механічних характеристик яких наведено у табл. 1.

ТАБЛИЦЯ І. ФІЗИКО-МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕРЕВИНИ СОСНИ ТА ДУБА З ТЕМПЕРАТУРОЮ $T = 20^\circ\text{C}$ ТА ВІДНОСНОЮ ВОЛОГІСТЮ $W = 12\%$ [3]: У ЧИСЕЛЬНИКУ – ЗНАЧЕННЯ РОЗТЯГУ, А В ЗНАМЕННИКУ – ЗНАЧЕННЯ СТИСКУ

Порода	Модулі пружності, ГПа			Межі міцності, МПа		
	E_a	E_r	E_t	σ_r	σ_t	
Сосна	11,9	0,54	0,47	3,23	2,63	
	11,9	0,67	0,55	5,10	7,50	
Дуб	14,2	1,18	0,91	8,0	6,5	
	14,2	1,40	1,01	-	-	
Коефіцієнти Пуассона						
	μ_{ar}	μ_{at}	μ_{rt}	μ_{ra}	μ_{ta}	μ_{tr}
Сосна	0,03	0,037	0,38	0,49	0,41	0,79
Дуб	0,07	0,09	0,34	0,43	0,41	0,83

Побудовано криві міцності для цих матеріалів в умовах двовісного напруженого стану у радіально-тангентальних площинах структурної симетрії (рис.1).

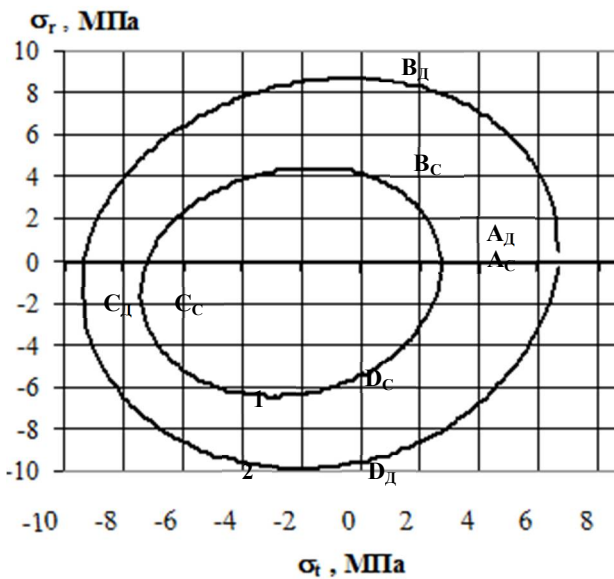


Рис. 1. Криві короткочасної міцності деревини з температурою $T = 20^\circ\text{C}$, відотною вологістю $W = 12\%$ та двовісним напруженим станом у радіально-тангентальній площині структурної симетрії: 1 – сосна, 2 – дуб

Проведено аналіз координат таких точок побудованих кривих, які характеризують такий граничний напружений стан матеріалу, характеристики якого є емпірично визначеними. Цими точками є точки перетину цих кривих з осями координат A_c , C_c , B_c , D_c та A_d , C_d , B_d , D_d . Тому що, згідно рис.1, значення абсцис точок A_c і C_c та A_d і C_d – це значення меж міцності розтягу та стиску деревини сосни та дуба відповідно у радіальному напрямку ортотропії, а ординати точок B_c і D_c та B_d і D_d – це значення меж міцності розтягу та стиску зазначених порід деревини у тангентальному напрямі, які на сьогоднішній день є відомими і наведені у довідниковій літературі [2]. Аналіз координат цих точок показав, що математична модель (1) – (4) задовільно відображає анізотропію та асиметрію міцності досліджуваних порід деревини вздовж головних напрямків симетрії. Дійсно, оскільки абсциса точки A_c є більшою за ординату точки B_c , а абсолютне

значення абсциси точки C_c є меншим за абсолютне значення ординати точки D_c , то межа короткочасної міцності розтягу деревини сосни у радіальному напрямку є більшою за межу міцності розтягу у тангентальному напрямку, а у випадку стиску навпаки: абсолютне значення межі міцності у радіальному напрямку є меншим за абсолютне значення межі міцності у тангентальному напрямі, що підтверджується результатами експериментальних досліджень [2]. Знайдене співвідношення меж міцності розтягу у радіальному і тангентальному напрямках анізотропії для деревини сосни має місце і для деревини дуба.

Отже, з огляду на результати відомих на сьогодні експериментальних досліджень короткочасної міцності деревини з одновісними напруженими станами у напрямках анізотропії, математична модель (1) – (12) адекватно описує граничний напружений стан деревини сосни та дуба в умовах двовісного розтягу-розтягу, стиску-стиску та розтягу-стиску. Окрім цього, зазначимо, що характеристики побудованих кривих (рис.1) задовольняють основним евристичним вимогам побудови відомих феноменологічних механічних теорій міцності твердих тіл [4, 5]: 1) криві граничного напруженого стану (криві короткочасної міцності) повинні бути плавними та випуклими; 2) криві короткочасної міцності матеріалу повинні охоплювати початок декартової системи координат.

V. ВИСНОВКИ

Показано, що розрахункові криві короткочасної міцності деревини сосни та дуба з двовісним напружено-деформівним станом у радіально-тангентальній площині структурної симетрії задовільно описують результати експериментальних випробовувань матеріалу на одновісну міцність розтягу та стиску у радіальному та тангентальному напрямках анізотропії. Зокрема, підтверджено: а) межа короткочасної міцності розтягу деревини сосни у радіальному напрямку є більшою за межу міцності розтягу у тангентальному напрямку, а у випадку стиску навпаки: абсолютне значення межі міцності у радіальному напрямку є меншим за абсолютне значення межі міцності у тангентальному напрямі; б) абсолютні значення меж міцності розтягу у радіальному та тангентальному напрямках анізотропії деревини сосни є меншими за відповідні абсолютні значення меж міцності стиску.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] С. Поберейко, Я. Соколовський, “Математична модель міцності анізотропних матеріалів в умовах двовісного напруженого стану” in *Вісник НУ “Львівська політехніка”: Комп’ютерні науки та інформаційні технології*, Львів: НУ “Львівська політехніка”, 2016, № 604, С. 148–153.
- [2] S. V. Pobereyko, O. M. Petriv, B. P. Pobereyko, “Developing software for modelling the strength of biaxially stressed wood” in *Forestry, Forest, Paper and Woodworking Industry: міжвідомчий наук.-техн. збірник*, Львів: НЛТУ України, 2014, Вип. 40, С. 18 – 20.
- [3] А. М. Боровиков, Б. Н. Уголев, *Справочник по древесине*, Москва: Лесная промышленность, 1989, 296 с.
- [4] В. В. Божидарник, Г. Т. Сулим, *Елементи теорії пластичності та міцності*, Львів: Світ, 199, Т.2, 532 с.
- [5] В. Ф. Яценко, *Прочность композиционных материалов*, К.: Выща школа Головное изд-во, 1988, 191 с.