Оптимізація на сферично розташованих комбінаторних множинах

О.С. Пічугіна
кафедра прикладної математики
Харківський національний
університет радіоелектроніки
Харків, Україна
pichugina_os@mail.ru

Optimization over spherically located combinatorial sets

O.S. Pichugina
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University
of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
pichugina_os@mail.ru

***Анотація*—В роботі представлено підхід до розв'язання оптимізаційних задач на вершинно розташованих множинах, що вписані у гіперсферу та дозволяють ефективне розв'язання лінійних задач. Продемонстровано застосовність даного методу до нелінійних задач на таких комбінаторних класах як загальна множина переставлень, множина розміщень з повтореннями, що індукована двома числами, множини парних переставлень та парних булевих векторів. Показано шляхи розповсюдження результатів на інші класи вершинно розташованих множин.**

***Abstract*—In the paper, an approach to optimization over vertex located sets, lying on a hypersphere and enabling efficient solving linear problems, is presented. Applicability of this method to nonlinear optimization over combinatorial classes such as the general permutation set, the set of partial permutations with repetitions induced by two numbers, the even permutation set and a vertex set of a co-cube is demonstrated. Ways to extend the results to other classes of vertex located sets are shown.**

Ключові слова—комбінаторна оптиміація, лінійна оптимізація, метод умовного градієнта, проекція на множину, вершинно розташована множина, сферично розташована множина, добре описана множина, загальна множина переставлень, множина розміщень з повтореннями, парні переставлення, парні бульові векторів

Keywords—combinatorial oprimization, linear oprimization, the conditional gradient method, projection onto a set, a vertex located set, a spherically located set, a well-described set, the general permutation set, the set of partial permutations with repetitions, the even permutation set, a co-cube vertex set.

I. Вступ

Дискретні задачі оптимізації полягають у виборі найкращого об’єкта чи варіанта дії із скінченої чи зліченої кількості варіантів. Вони виникають у таких областях як математика, економіка, фінанси, геометричне проектування, штучний інтелект, програмної інженерія, тощо. В класі оптимізаційних комбінаторні задач традиційно вважаються найскладнішими і значна кількість серед них є NP-складними. Тому актуальним є виокремлення класів дискретних, зокрема комбінаторних, задач, для яких можливо створення ефективних методів оптимізації на базі дослідження властивостей допустимих множин.

На сьогоднішній момент найбільш досліджена тема – різноманітні евристичні підходи, які досить часто на практиці працюють достатньо добре. Проблемою же є те, що оцінити точність цих результатів зазвичай неможливо. Тому цікавим напрямком досліджень є також розробка наближених методів комбінаторної оптимізації із оцінкою точності. Особливу важливість мають спеціальні методи оптимізації, що використовують специфіку конкретної комбінаторної множини та властивості конкретних цільових функцій на цих множинах.

II. Постановка задачі

Розглянемо задачу оптимізації

$$f(x) \to min, \quad (1)$$

$$x \in E \subset R^n, \quad (2)$$

де E - скінченна множина й функція $f(x)$, визначена на ній.

У якості E виберемо дискретну множину одного з наступних класів [1]-[5]:

$E_{nk}(G)$ - загальна множина перестановок із n-мультимножини G, яка містить k різних елементів:

$$G = \{g_i\}_{i \in J_n},\ g_i \le g_{i+1},\ i \in J_{n-1} = \{1,...,n-1\};$$

$\overline{E}_2^n(G)$ - множина розміщень із повтореннями, що індукована двома елементами;

$E_n^e(G)$ - множина парних перестановок із множини G;

B_n^h - множина парних булевих n-векторів;

$E_{nk}^{\pm}(G)$ - множина, сформована відображенням $E_{nk}(G)$ відносно всіх координатних площин;

Ми пропонуємо загальний підхід до розв'язання задачі (1), (2) на п'яти зазначених класах комбінаторних множин:

$$E \in \left\{E_{nk}(G), \overline{E}_2^n(G), E_n^e, B_n^h, E_{nk}^{\pm}(G)\right\}. \quad (3)$$

Отже, розглядається задача (1)-(3) і пропонується метод її наближеного розв'язання з оцінкою точності, що ґрунтується на застосуванні наступних загальних характеристик даних класів комбінаторних множин: сферичне розташування (Властивість 1), вершинне розташування (Властивість 2); добре описуваність (Властивість 3).

Уведемо необхідні поняття.

Множину E будемо називати <u>сферично розташованою</u>, якщо вона вписана в деяку сферу [6]:

$$\mathrm{E} \subseteq \mathrm{S}_r(a), \quad (4)$$

де

$$\mathrm{S}_r(a) = \left\{x \in R^n : \|x-a\|_2^2 = r^2\right\}. \quad (5)$$

Множина точок E називається <u>вершинно розташованою</u>, якщо вона збігається з множиною вершин своєї опуклої оболонки [7]:

$$E = vert\ P, \quad (6)$$

де

$$P = conv\ \mathrm{E}. \quad (7)$$

Множина точок E - добре описувана (a well described set) [8], якщо лінійна задача на цій множині

$$\mathbf{LP(E,c)}:\ z^{lin,E} = min\ \mathrm{c}^T x,\ x^{lin,E} = arg\,min\ \mathrm{c}^T x.$$

ефективно розв'язна (тобто може бути розв'язана за поліноміальний час).

Якщо для E виконані умови (4) і (6), неважко бачити, що вона утворюється у перетині многогранника (7) зі сферою (5):

$$E = \mathrm{S}_r(a) \cap P. \quad (8)$$

Тому множини вигляду (8) називають поліедрально-сферичними [6].

У п. IV пропонується загальний підхід (далі **Метод А**) до розв'язання задач (1), (2) на добре описуваних поліедрально-сферичних множинах (далі **Задача 1**). Даний метод суттєво використовує можливість упуклення [7],[9],[10] цільової функції, тому п. III головним чином присвячений теорії опуклих продовжень з таких множин. Нарешті, у п. V показано, що множини (3) мають Властивості 1-3, тобто є одночасно поліедрально-сферичними та добре описуваними, отже Метод А застосовний до оптимізації на них. У п. VI наведено інші класи комбінаторних множин, для яких цей метод також застосовний, а також показано напрямки формування нових класів поліедрально-сферичних та добре описуваних множин із множин вигляду (3).

III. Властивості поліедрально-сферичних множин

Як було зазначено в постановці задачі, будемо вважати, що нам задано множину E та деяку функцію $f(x)$, визначену на ній. Якщо до того ж E - вершинно розташована, то при розв'язанні задачі (1), (2) з'являється можливість її зведення до оптимізації опуклої функції в результаті упуклення вихідної цільової функції. Це обґрунтовується наступними теоретичними фактами:

Визначення. Функція $F(x)$ називається продовженням функції $f(x)$ з E на $X \supset E$, якщо

$$F(x) \text{ визначена на } X \quad (9)$$

і збігається з $f(x)$ на E:

$$F(x):\ F(x) \underset{E}{=} f(x). \quad (10)$$

Теорема 1 [7]. Якщо для E виконана умова (6), то існує опукле диференційоване продовження $F(x)$ функції $f(x)$ з E на довільний опуклий компакт $X \supset E$

Це означає існування $F(x)$, яка задовольняє (9), (10):

$$F(x) \text{ - опукла, диференційована на } X. \quad (11)$$

Наслідок 1. Якщо для E виконано (6), то існує неперервно диференційоване продовження $F(x)$ функції $f(x)$ з E на довільний опуклий компакт $X \supset E$.

Якщо E не тільки вершинно розташована, а ще й поліедрально-сферична, з неї існують двічі неперервно диференційовані продовження. Дійсно, мають місце наступні теореми:

Теорема 2 [11]. Якщо $f(x) \in C^2(R^n)$ й E - сферично розташована, то опукле (сильно опукле з параметром $\rho > 0$) продовження функції $f(x)$ з E на опуклий компакт $X \supset E$ існує у формі:

$$F(x) = f(x) + \lambda\left((x-a)^2 - r^2\right), \text{ де } \lambda \in R.$$

Теорема 3. Якщо E - поліедрально-сферична множина, то існує двічі неперервно диференційоване опукле продовження $F(x)$ функції $f(x)$ з E на довільний компакт $X \supset E$.

Доведення. Згідно з наслідком 1, існує

$$\varphi(x): \ \varphi(x) \underset{E}{=} f(x), \ \varphi(x) \in C^1(R^n). \qquad (12)$$

Розглянемо функцію $\xi(x): \xi(x) = \varphi^2(x)$. З одного боку, $\xi(x) \underset{E}{=} f(x)$ і $\xi(x)$ також визначена на X, тобто $\xi(x)$ є продовженням $f(x)$ з E на X. З іншого боку, $\nabla\xi(x) = 2\varphi(x) \cdot \nabla\varphi(x)$, звідки, згідно (12), слідує, що $\xi(x) \in C^2(R^n)$. Отже, $\xi(x)$ - двічі неперервно диференційоване продовження $f(x)$ з E на X.

Для $\xi(x)$ виконані припущення теореми 2, отже, існує двічі неперервно диференційоване опукле продовження функції $f(x)$ у формі:

$$F(x) = \xi(x) + \lambda\left((x-a)^2 - r^2\right), \text{ де } \lambda \in R. \qquad (13)$$

Таким чином, ми довели можливість побудови двічі неперервно диференційованих продовжень із поліедрально-сферичних множин за допомогою рівняння описаної сфери (5).

Тут ми тільки вкажемо на можливість одержання нижньої оцінки z^u для z^*:

$$z^* = \min_E f(x), \ x^* = \arg\min_E f(x). \qquad (14)$$

за допомогою опуклого продовження $F(x)$ цільової функції.

Формування нижніх оцінок z^* забезпечується опуклістю $F(x)$ та еквівалентністю задач (1), (2) та (2),

$$F(x) \to \min. \qquad (15)$$

Так, наприклад, якщо $X = P$, тобто будується опукле продовження $f(x)$ на многогранник (7), то $z^u \geq z^P$, де

$$z^P = \min_P F(x), \ x^P = \arg\min_P F(x). \qquad (16)$$

Задача (16) являє собою поліедральну релаксаційну задачу (далі **Задача 2**) до дискретної задачі (2), (15) (далі **Задача 3**) й може бути розв'язана опуклими методами гладкої оптимізації. Якщо до того E - добре описувана, для її розв'язання може бути застосована модифікація методу умовного градієнта, наведена в п. IV.

Те ж саме стосується і вибору кулі в якості X, наприклад, якщо $X = C_r(a) = conv\, S_r(a)$, то $z^u \geq z^C = \min_{C_r(a)} F(x)$.

Ще одна – сферична релаксація – формується ослабленням в (8) умови належності многограннику. Якщо функція $f(x)$ дозволяє знаходження розв'язку $z^S = \min_S F(x)$, де $S = S_r(a)$, значення z^S можна обрати в якості нижньої оцінки, $z^u \geq z^S$, яка в багатьох випадках точніше за z^C, z^P.

Якщо E має Властивості 1-3, тобто, є поліедрально-сферичною та добре описуваною, то квадратична задача пошуку проекції довільної точки на цю множину розв'язна за поліноміальний час.

Теорема 4. Якщо E - добре описувана поліедрально-сферична множина, то задача пошуку проекції на неї довільної точки $x \in R^n$ може бути розв'язана за поліноміальний час.

Доведення. Нехай $y = Pr_E\, x$. Згідно визначення проекції точки на множину, y - це найближча точка E до x, тобто вона є розв'язком квадратичної задачі:

$$h(x,y) = (y-x)^2 \to \min_{y \in E}. \qquad (17)$$

Спростимо h, враховуючи сферичне розташування E:

$$\begin{aligned} h(x,y) &= (y-x)^2 = \left((x-a)+(a-y)\right)^2 = \\ &= (x-a)^2 + 2(a-x)\cdot(y-a) + (a-y)^2 \underset{E}{=} \\ &= \left((x-a)^2 + r^2 - 2a(a-x)\right) + 2(a-x)\cdot y. \end{aligned}$$

Перший доданок у правій частині – константа, тому що a, x - фіксовані вектори. Таким чином, задача (17) еквівалентна задачі $(a-x)\cdot y \to \min_{y \in E}$. Остання – це $LP(E, a-y)$, яка, за припущенням, розв'язна за поліноміальний час.

IV. Метод А оптимізації на поліедрально-сферичних множинах

Викладемо Метод А розв'язання задачі (1), (2) на множині вигляду (8), для якої відомий поліноміальний алгоритм $MLP(E,c)$ розв'язання $LP(E,c)$ (далі **Задача 4**):

Етап 1. Побудувати опукле диференційоване продовження $F(x)$ (наприклад, у формі (13)) і перейти від Задачі 1 до еквівалентної Задачі 3 з опуклою цільовою функцією.

Етап 2. Перейти до поліедральної релаксації Задачі 3 та розв'язати отриману Задачу 2.

Зауваження 1. Оскільки Задача 2 - опукла, її глобальний розв'язок може бути знайдений методами опуклої оптимізації, такими як метод проекції градієнта [12]. Проблема ж полягає в тому, що ці методи оперують із лінійної системою обмежень многогранника, тобто з H -представленням многогранника P. Таким чином, для їх застосування потрібно попередньо розв'язати задачу пошуку такого представлення, яка сама по собі є нетривіальною проблемою. Саме тому остання є центральною проблемою у поліедральній комбінаториці [13],[14]. Але навіть якщо ця проблема вирішена, обмежень комбінаторних многогранників звичайно настільки багато, що використання стандартних методів оптимізації стає практично неможливим. Так, наприклад, серед множин (3) тільки гіперкуб $\overline{\Pi}_2^n(G)=conv\overline{E}_2^n(G)$ містить поліноміальну кількість обмежень, інші ж класи включають множини, H -представлення яких задаються неполіноміальним числом обмежень [1]-[4],[15].

Обчислювальна схема розв'язання Задачі 2 заснована на диференційованості $F(x)$, застосуванні Властивості 3 та V -представлення (7) многогранника P.

Скористаємося модифікацією [16] методу умовного градієнта [12], суть якої полягає у тому, що розв'язання допоміжних лінійних Задач 4 здійснюється за допомогою $MLP(E,.)$.

У ході ітераційного процесу розв'язання Задачі 2 формується дві послідовності:

1) наближених розв'язків Задачі 2:

$$\left\{x^k\right\}_{k\in Z_+}:\ x^k\underset{k\to\infty}{\rightarrow}x^P,\ z^{Pk}=F\left(x^k\right)\underset{k\to\infty}{\rightarrow}z^P;$$

2) наближених розв'язків Задач 1, 3:

$$\left\{y^k\right\}_{k\in Z_+}:\ y^k=Pr_E\,x^k,\ z^k=\min_{i\in J_k^0}F\left(y^k\right)=\min_{i\in J_k^0}f\left(y^k\right)$$

де $J_K^0=J_K\cup\{0\}$.

Відзначимо, що при цьому розв'язок Задачі 2 покращується на кожній ітерації, у той час як розв'язок Задач 1,3 – по мірі того як будуть знайдені нові рекорди цільової функції.

Для застосування методу умовного градієнта, потрібна допустима точка x^0 області в якості початкового наближення. Ми пропонуємо вибирати за x^0 центр описаної сфери (5) мінімального радіуса: якщо $a\in P$, то

$$x^0=a\ . \tag{18}$$

Інакше можна обрати довільну точку E .

Процес закінчується по досягненні заданої точності ε :

$$K:\ \left|z^{Pk}-z^{P,k-1}\right|>\varepsilon\ \forall k\in J_{K-1},\ \left|z^{PK}-z^{P,K-1}\right|\le\varepsilon\ .$$

$\left(x^K,z^{PK}\right)$ - наближений розв'язок Задачі 2, найкращий з $\left(y^K,z^K\right)$ - Задач 3 і, відповідно, Задачі 1:

$$\left(x^P,z^P\right)\approx\left(y^K,z^{PK}\right),$$
$$\left(x^*,z^*\right)\approx\left(x^{k*},z^{k*}\right):\ z^{k*}=\min_{k\in J_K^0}z^k,\ x^{k*}=\arg\min z^{k*}.$$

Відносна похибка розв'язку Задачі 1 - $\delta=\left|\dfrac{z^{PK}-z^K}{z^K}\right|$.

Якщо $x^P\in int\,P$, оцінка точності може бути поліпшена за рахунок z^S (див. п. III).

V. Обґрунтування застосовності методу А для оптимізації на множинах (3)

Обґрунтуємо можливість використання Методу А до розв'язання Задачі 1 на множинах (3). Для цього достатньо показати, що всі вони мають Властивості 1-3.

A. Властивість 1.

При демонстрації сферичного розташування кожної з множин E вигляду (3), наведемо параметри сфери мінімального радіуса $S^{min}(E)$, що описана навколо множини E. Для цих класів комбінаторних множин центри даних гіперсфер є також допустимими точками многогранника, тому вони можуть бути використані в якості x^0 (див. (18)).

1) $E_{nk}(G)$ - загальна множина перестановок з мультимножини $G=\left\{e_1^{n_1},\ldots,e_k^{n_k}\right\}:\sum_{i=1}^{k}n_i=n$, $e_i<e_{i+1}$, $i\in J_{k-1}=\{1,...,k-1\}$.

$S^{min}\left(E_{nk}(G)\right)$ має параметри [2]:

$$a=\left(\left(\frac{S_1}{n}\right)^n\right)^T,\ r=\sqrt{S_2-\frac{S_1^2}{n}}, \tag{19}$$

де $S_1=\sum_{i=1}^{n}g_i$, $S_2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$.

2) $\overline{E}_2^n(G)$ - множина розміщень із повтореннями з $G=\{e_1^n, e_2^n\}$, $e_1 < e_2$: параметри $S^{min}\left(\overline{E}_2^n(G)\right)$ -

$$a = \left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right)^n,\ r = \frac{e_2 - e_1}{2}\sqrt{n}. \qquad (20)$$

3) $E_n^e(G)$ - множина парних перестановок з n-елементної множини G, тобто перестановок з множини G з парним числом інверсій. $E_n^e(G)$ - підмножина множини перестановок $E_n(G)$ з тієї ж самою сферою мінімального радіуса (19), що й $E_n(G)$.

4) B_n^h - множина парних булевих векторів, тобто таких елементів булевої множини $B_n = \{0,1\}^n$, сума координат яких – парна. У цьому випадку $S^{min}\left(B_n^h\right) = S^{min}\left(B_n\right)$, а параметри $S^{min}\left(B_n\right)$ визначаються з (20), враховуючи що $B_n = \overline{E}_2^n\left(\{0^n, 1^n\}\right)$:

$$a = (0.5)^n,\ r = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

5) $E_{nk}^{\pm}(G)$ відноситься до класу композиційних образів розміщень і перестановок і є множиною перестановок розміщень [17]. Для її формування на першому етапі з кожної з мультимножин $G^i = \{\pm g_i\},\ i \in J_n$ обирається по одному елементу, а потім зі сформованої n-мультимножини формується загальна множина перестановок.

Параметри $S^{min}\left(E_{nk}^{\pm}(G)\right)$ наступні:

$$a = \mathbf{0},\ r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} g_i^2}. \qquad (21)$$

Зауваження 2. Співпадіння описаних мінімальних сфер для пар $E_n^e(G)$ і $E_n(G)$, а також для B_n^h й B_n випливає з того, що вимірність відповідних многогранників не зменшується при переході від перестановок (булевих векторів) до парних перестановок (парних булевих векторів).

B. Властивість 2.

Вершинне розташування всіх перерахованих вище комбінаторних множин обґрунтуємо в наступній теоремі:

Теорема 5. Довільна скінченна сферична множина – вершинно розташована.

Доведення. Припустимо, що $E \subset R^n$ задовольняє (4) й:

$$|E| < \infty. \qquad (22)$$

Гіперсфера $S_r(a)$ являє собою границю опуклого тіла – кулі $C_r(a)$. Легко бачити, що $S_r(a)$ - множина крайніх точок $C_r(a)$, тобто жодна із точок $S_r(a)$ не представляється опуклою лінійною комбінацією інших точок $S_r(a)$. Це ж можна сказати й про точки E, оскільки виконане включення (4). У силу (22), опукла оболонка множини E є многогранником. Множина E буде множиною його крайніх точок, а отже і його вершин. Теорему доведено.

Усі множини (3) – скінчені, адже вони є містять вибірки зі скінчених мультимножин. З іншого боку, усі вони – сферично розташовані. Таким чином, згідно Теореми 5, вони є вершинно розташованими.

C. Властивість 3.

Для множин $E_{nk}(G)$, $\overline{E}_2^n(G)$ розв'язки лінійних задач відомі [3],[15].

Теорема 6. Якщо

$$\left(i_j\right)_{j\in J_n}:\ \left\{i_j\right\}_{j\in J_n} = J_n,\ c_{i_j} \ge c_{i_{j+1}},\ j \in J_{n-1},$$

то

$$x_{i_j}^{lin,E_{nk}(G)} = g_j,\ j \in J_n,\ z^{lin,E_{nk}(G)} = \sum_{j=1}^{n} c_{i_j} g_j. \qquad (23)$$

Теорема 7.

$$\forall i \in J_n\ x_i^{lin,\overline{E}_2^n(G)} = \begin{cases} e_1, \text{ якщо } c_i \ge 0 \\ e_2, \text{ якщо } c_i < 0 \end{cases}, \qquad (24)$$

$$z^{lin,\overline{E}_2^n(G)} = e_1 \sum_{i:c_i \ge 0} c_i + e_2 \sum_{i:c_i < 0} c_i.$$

Таким чином, $E_{nk}(G)$, $\overline{E}_2^n(G)$ - добре описувані множини. Метод $MLP(E_{nk}(G),c)$ зводиться до упорядкування координат вектору c із наступним присвоюванням (23). $MLP(\overline{E}_2^n(G),c)$ полягає у порівнянні координат вектору c із нулем і присвоюванні (24).

Для $E_n^e(G)$, B_n^h запропонуємо $MLP(E_n^e(G),c)$, $MLP(B_n^e,c)$, виходячи зі способу їх формування з множин E_n, B_n. Неважко бачити, що у многограннику $\Pi_n(G)$ усі $n-1$ перестановки, суміжні до парної, – непарні й навпаки. Те ж стосується одиничного гіперкуба $PB_n = conv\, B_n$ й напівкуба $PB_n^h = conv\, B_n^h$: у многограннику PB_n кожний парний булевий вектор має n суміжних непарних булевих векторів і навпаки.

Окрім цього, критерії суміжності $\Pi_n(G)$, PB_n відомі [1],[15]:

- у многограннику перестановок $\Pi_n(G)$ суміжними з $x \in E_n$, є точки, отримані перестановкою g_i й g_{i+1} тільки вони;

- в одиничному гіперкубі PB_n суміжними з $x \in B_n$, є точки, отримані із x заміною однієї нульової координати одиницею або однієї одиничної координати на 0.

Перераховані особливості дозволяють запропонувати єдину схему розв'язання $LP(E,c)$ для

$$E = E_n^e, B_n^h. \tag{25}$$

1) Схема розв'язання $LP(E,c)$:

<u>Крок 1</u>. Розв'язати $LP(E',c)$ на надмножині E' множини E, $E' \supset E$. Якщо $x^{lin,E'} \in E$, задачу $LP(E,c)$ розв'язано: $x^{lin,E} = x^{lin,E'}$, інакше перейти до Кроку 2:

<u>Крок 2</u>. Знайти множину $N_{P'}\left(x^{lin,E'}\right)$ суміжних вершин до $x^{lin,E'}$ у многограннику $P' = convE'$, вибрати мінімальне зі значень $c^T x$ на $N_{P'}\left(x^{lin,E'}\right)$:

$$z^{lin,E} = \min_{x \in N_{P'}\left(x^{lin,E'}\right)} c^T x,\ x^{lin,E} = \arg\min_{x \in N_{P'}\left(x^{lin,E'}\right)} c^T x.$$

Ясно, що даний алгоритм є поліноміальним, якщо E' - добре описувана й кількість суміжних вершин до кожної вершини – поліноміально залежить від n. При застосуванні до множин (25), він перетворюється на $MLP(E_n^e(G),c)$, $MLP(B_n^e,c)$ відповідно.

Отже, ми повністю обґрунтували можливість застосування Методу А до п'яти множин (3).

VI. Обговорення результатів

Метод А може бути безпосередньо використаний для інших підмножин та окремих випадків $E_{nk}(G)$, $\overline{E}_2^n(G)$, на яких легко розв'язати лінійну задачу. Серед підмножин $E_{nk}(G)$ це, наприклад, множина поліпереставлень, серед підмножин $\overline{E}_2^n(G)$ - загальна множина розміщень [15], індукована двома числами, серед підмножин B_n - множина переставних матриць Π_n [18], серед спеціальних класів $E_{nk}(G)$ та B_n - множина $0-1$-переставлень $B_n(m)$ [16], тощо.

Слід відзначити, що Декартів добуток вищеозначених множин зберігає Властивості 1-3, тож у різних комбінаціях множин (3) ми отримуємо нові класи комбінаторних множин, до оптимізації на яких можна застосувати також Метод А.

Метод А може бути узагальнено у декількох напрямках. Наприклад, якщо множина E – вершинно розташована, але не є поліедрально-сферичною, тоді, побудувавши для неї опукле диференційоване продовження (яке існує згідно Теореми 1) і замінивши задачу проектування на комбінаторну множину E задачею комбінаторного заокруглення до елемента E, ми отримаємо одне таке узагальнення (далі **Модифікація 1**).

Якщо легко знайти наближений розв'язок $LP(E,c)$, можна замінити ним точку $x^{lin,E}$ в Методі А, а також використати цей прийом наближеного розв'язку лінійної задачі при проектуванні на множину. В результаті отримаємо ще одне узагальнення, яке в дає наближений розв'язок задач 1-3. Нажаль оцінки точності в такому випадку дати неможливо.

Нарешті, якщо про множину E мало що відомо і навіть наближений розв'язання лінійної задачі викликає труднощі, тоді, замість поліедральній релаксації, можна перейти до релаксації на кулі $C_r(a)$, адже її межа – сфера $S_r(a)$ - є добре описуваною множиною. В результаті такої заміни буде одержано

$$z^C = \min_C F(x),\ x^C = \arg\min_C F(x)$$

так наближений розв'язок задачі 1, причому z^C служитиме нижньої оцінкою для z^*.

Представлені модифікації дозволяють розповсюдити результаті статті ще на один клас множин – це прямі суми поліедрально-сферичних множин. В результаті цієї операції формується множна, що є еліпсоїдальною (тобто такою, що вписана в еліпсоїд), опукле продовження з якої можна побудувати за допомогою рівняння еліпсоїда.

Це означає, що до довільної послідовності прямих сум і добутків вищеозначених множин застосовна Модифікація 1. Так, наприклад, цілий клас множин вершин многогранників Ханнера [19] утворюється в результаті послідовностей прямих сум і Декартових добутків бінарної множини $\{-1,1\}$, що є окремим випадком $\overline{E}_2^1(G)$ для $G = \{-1,1\}$.

Перерахуємо ще деякі класи вершинно розташованих множин, дослідження екстремальних властивостей лінійних функцій на яких дозволить використати Метод А та його модифікації до оптимізації на них. Ці множини являють собою підмножини та спеціальні класи множин $E_{nk}(G)$, B_n, тож за конструкцією вони є поліедрально-сферичними.

Так для $E_{nk}(G)$ серед таких множин:

1. $E_n(G)$- підмножина – множина $E_n^c(G)$ циклічних

переставлень, тобто таких, що містять єдиний цикл [20],[21];

2. $E_{nk}(G)$-підмножина – множина почережних переставлень $E_n^p(G)$, координати яких формують послідовність, у якій на парних місцях елементи, що не перевищують двох сусідніх, на непарних – що не менше обох сусідніх [21];
3. $E_{nk}(G)$-підмножина – множина повних переставлень $E_{nk}(G,x)$ до заданого переставлення $x \in E_{nk}(G)$. Вона включає ті переставлення, жодна координата яких не збігається з відповідною координатою x [21];
4. Підмножиною $E_n(G)$ та узагальненням множини $E_n^e(G)$ є множина $E_n(G,m)$ переставлень, що розташовані у $E_n(G)$ на відстані $m \ge 1$. Зокрема $E_n^e(G) = E_n(G,1)$.

Також відомі численні B_n-підмножини, опуклі оболонки яких називаються 0-1-політопами [22]-[24], відповідно, ці множини будуть множинами вершин 0-1-політопів. Серед них відзначимо наступні:

1. Множина 0-1-розміщень $B_n(m_1,m_2)$ ($0 \le m_1 < m_2 \le n$), кількість одиничних координат яких обмежена числами m_1, m_2 [16];
2. Множина вершин простого 0-1-політопа, тобто такого, вершини якого утворені у перетині гіперграней, кількість яких збігається з вимірністю многогранника [23]. Цей клас множин має таку властивість, що він утворюється як декартів добуток множин $B_n(1)$;
3. Множина вершин дворівневого 0-1-многограннника, тобто такого, вершини якого розкладаються по двох паралельних гіпергранях в напрямку кожної своєї гіперграні [24]. Це дуже широкий клас, адже відомо, що кожен 2-рівневий многогранник афінно-еквівалентний деякому 2-рівневому 0-1-многограннику. Серед таких многогранників, окрім многогранників Ханнера, Біркгофа (що є опуклою оболонкою Π_n), є також многогранники порядку, Хансена і т.п. [24].

VII. Висновки

В даній роботі представлено метод розв'язання нелінійних задач на широкому класі поліедрально-сферичних комбінаторних множин. Обґрунтовано застосовність даного методу та його модифікацій до оптимізації на довільних поліедрально-сферичних множинах, зокрема до загальної множини переставлень, множини розміщень із повтореннями, індукованої двома числами, а також на їхніх Декартових добутках, прямих сумах та деяких підмножинах.

Література References

[1] V. A. Yemelichev, M. M. Kovalev, M. K. Kravtsov, Polytopes, graphs and optimization, Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

[2] Y. G. Stoyan, S. V. Yakovlev, Mathematical models and optimization methods in Geometric Design, Kiev: Naukova Dumka, 1986.

[3] Y. G. Stoyan, O. A. Yemets, Theory and methods of Euclidean combinatorial optimization, Kiev: ISSE, 1993.

[4] A. Postnikov, "Permutohedra, associahedra, and beyond," IMRN: International Mathematics Research Notices. 6, pp. 1026-1106, 2009.

[5] R. M. Green, "Homology representations arising from the half cube, II," Journal of Combinatorial Theory: Series A, 117(8), pp. 1037-1048, 2010.

[6] O.S. Pichugina, S.V. Yakovlev, "On the continuous representations and functional extensions in combinatorial optimization," Cybernetics and Systems Analysis, 52(6), pp. 102-113, 2016.

[7] S. V. Yakovlev, "The theory of convex continuations of functions on vertices of convex polyhedra," Computational Mathematics and Mathematical Physics, 34(7), pp. 1112-1119, 1994.

[8] Y. Berstein, J. Lee, S. Onn, R. Weismantel, "Parametric nonlinear discrete optimization over well-described sets and matroid intersections,"Mathematical Programming, 124(1/2), pp. 233-253, 2010.

[9] S. V. Yakovlev, "Bounds on the minimum of convex functions on Euclidean combinatorial sets," Cybernetics and Systems Analysis, 25(3), pp. 385-391, 1989.

[10] H. D. Sherali, W. P. Adams, A reformulation-linearization technique for solving discrete and continuous nonconvex problems, P. M. Pardalos (eds.), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[11] Y. G. Stoyan, S. V. Yakovlev, O. A. Emets, O. A. Valuiskaya, "Construction of convex continuations for functions defined on a hypersphere," Cybernetics and Systems Analysis, 34(2), pp. 176-184, 1998.

[12] D. P. Bertsekas, Nonlinear Programming, 2nd edn. Belmont: Athena Scienific, 1999.

[13] W. R. Pulleyblank, "Edmonds, matching and the birth of polyhedral combinatorics," Documenta Mathematica, Extra Volume ISMP, pp. 181-197, 2012.

[14] P. M. Pardalos, D. Du, R. L. Graham, Handbook of combinatorialoptimization, New York: Springer, 2013.

[15] S. V. Yakovlev, I. V. Grebennik, "Some classes of optimization problems on a set of arrangements and their properties," Izv.Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 35(11), pp. 74-86, 1991.

[16] O. Pichugina, S. Yakovlev, "Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications," J. Coupled Syst. Multiscale Dyn, 4, pp. 129-152, 2016.

[17] Y. G. Stoyan, I. V. Grebennik, "Combinatorial species for the enumeration of combinatorial configurations with special properties," Dopov. Nats.Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki, 7, pp. 28-32, 2010.

[18] R. A. Brualdi, Combinatorial matrix classes, T. Britz (eds.), Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[19] R. Sanyal, A. Werner, G. M. Ziegler, "On Kalai's Conjectures Concerning Centrally Symmetric Polytopes," Discrete & Computational Geometry, 41(2), pp. 183–198, 2008.

[20] J. F. Korsh, P. S. LaFollette, "Loopless array generation of multiset permutations, " The Comp. Journ., 47 (5), pp. 612–621, 2004.

[21] E. W. Weisstein, CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Second Edition, Boca Raton: CRC Press, 2002.

[22] G. M. Ziegler, "Lectures on 0/1-Polytopes," in Polytopes — Combinatorics and Computation, G. Kalai and G. M. Ziegler, Eds. Birkhäuser Basel, 2000, pp. 1–41.

[23] V. Kaibel and M. Wolff, "Simple 0/1-Polytopes," European Journal of Combinatorics, vol. 21, no. 1, pp. 139–144, Jan. 2000.

[24] A. Bohn, Y. Faenza, S. Fiorini, V. Fisikopoulos, M. Macchia, K. Pashkovich, "Enumeration of 2-Level Polytopes," in Algorithms - ESA 2015, N. Bansal and I. Finocchi, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer. — 2015, pp. 191–202.