Стохастичний Аналог Задачі Лінійного Програмування з Ефектом Галуження

Фахріддін Мірзоахмедов
кафедра математичного та інформаційного моделювання
Фінансово-економічний інститут Таджикістану
Душанбе, Таджикістан
mirfakh@mail.ru

Stochastic Analog Linear Programming Problem the Effect of Branching

Fakhriddin Mirzoahmedov
Department of Mathematical and Information Modeling
Finance and Economics Institute of Tajikistan
Dushanbe, Tajikistan
mirfakh@mail.ru

***Анотація*—У статті проаналізовано ефективний алгоритм симплексного методу для вирішення загальної задачі лінійного програмування, який також використовується при вирішенні стохастичного варіанту цієї ж задачі. Доведено збіжність алгоритму рішення стохастичного варіанту задачі з урахуванням ефекту розгалуження, що підтверджено тестовим прикладом.**

***Abstract*—The article provides an efficient algorithm simplex method for solving the general problem of linear programming, which is also used in solving stochastic version of the same problem. The convergence of the algorithm for solving the stochastic version of the problem with allowance for the branching effect is given and is confirmed by a test example.**

***Ключові слова*—детермінована і стохастична задача; розгалуження; квазіградієнт; алгоритм рішення; теорема збіжності; чисельний експеримент**

***Keywords*—deterministic and stochastic task; branching; kvazihradient; solution algorithm; convergence theorem; numerical experiment**

I. ВСТУП

В сучасних умовах з точки зору новизни та прикладного застосування, необхідними умовами математичного моделювання є наявність таких факторів, як невизначеність, нелінійність, неоднозначність, критичні точки, розгалужені процеси тощо.

У даній роботі досліджено стохастический аналог задачі лінійного програмування (ЗЛП) з урахуванням біфуркаційного ефекту та алгоритму її рішення.

II. ДЕТЕРМІНОВАНА ПОСТАНОВКА ЗЛП

Класична детермінована ЗЛП в канонічній формі представлена наступним чином [1]:

$$x_j^{\ *} = \arg\ \min\Big\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j / x_j \in X \Big\} \rightarrow min, \qquad (1)$$

де

$$X = \Big\{ x_j : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, b_i \geq 0, i = \overline{1,m} \Big\}. \qquad (2)$$

Параметри економічної постановки задачі можуть бути інтерпретовані наступним чином: n - кількість видів продукції, що випускається; b_i – запаси i-го виду ресурсів; a_{ij} - технологічні коефіцієнти, які вказують, скільки i-го ресурсу потрібно для виробництва продукту j-го виду; x_j - обсяг виробництва j-го продукту; c_j - витрати, пов'язані з виробництвом одиниці продукту j-го виду.

Нижче проаналізовано ефективний алгоритм вирішення задачі (1) - (2) симплексним методом [1], який використовується при наближених рішеннях стохастичної задачі на кожній ітерації.

Алгоритм 1. Завдання (1) - (2) вирішується за допомогою симплекс-методу, заданого оператором:

$$x_j^{s+1} = \psi(x_j^s), \quad x_j^0 = 0.$$

Тут x_j^0 - початкове наближення для симплекс-методу, що є базисним рішенням, вектори x_j^{s+1} і x_j^s являють собою наступне і попереднє рішення, тобто

$$x_j^{s+1} = \min_{x_{ij}^s}[x_i^s / x_{ij}^s] = x_l^s / x_{lk}^s,$$

$$x_i^{s+1} = x_i^s - (x_{ij}^s - x_j^{s+1}), \quad i \in I_{s+1}; \quad i \neq j,$$

$$x_j^{s+1} = 0, \qquad j \notin I_{s+1}. \tag{3}$$

Обчислення елементів нової симплекс-таблиці на ($s+1$) -ій ітерації здійснюється згідно формули:

$$x_{ik}^{s+1} = \begin{cases} x_{ik}^s - (x_{ij}^s - x^s{}_{lk})/x_{lj}^s, & якщо \quad i \neq l, \\ x_{lk}^s / x_{lj}^s, & якщо \quad i = l. \end{cases}$$

III. СТОХАСТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗЛП

Додатково до розглянутих параметрів при постановці детермінованої ЗЛП (1) - (2) введемо наступні позначення: ω_j - незалежні випадкові величини, наприклад, попит на j-ту вироблену продукцію; α_i і β_i - питомі витрати, пов'язані зі зберіганням залишків і втрати від дефіциту j -ї продукції x_j. У зв'язку з випадковістю попиту в процесі прийняття рішень щодо обсягу виробництва продукції виникають такі ефекти розгалуження:

- якщо обсяг виробленої продукції x_j в потрібний момент перевищує обсяг попиту ω_j, тобто $x_j \geq \omega_j$, то фірма-виробник понесе витрати на зберігання надлишково виробленої продукції, що рівні $\alpha_j(x_j - \omega_j)$, j=1, 2, ..., n, та пов'язані з профіцитом у розмірі $x_j - \omega_j$;
- якщо обсяг попиту ω_j в потрібний момент перевищує обсяг виробленої продукції x_j, тобто $\omega_j > x_j$, то фірма виробник терпить збитки, рівні $\beta_j(\omega_j - x_j)$, що пов'язані з дефіцитом в розмірі $\omega_j - x_j$.

Функція витрат $f_j(x_j, \omega_j)$, пов'язана з обсягом виробництва продукції x_j, з урахуванням випадкового попиту ω_j, може бути представлена у вигляді наступної опуклої разгалуженої (кусочно-лінійної) функції витрат:

$$f_j(x_j, \omega_j) = \begin{cases} \alpha_j(x_j - \omega_j), якщо \quad x_j \geq \omega_j, \alpha_j > 0, \\ \beta_j(\omega_j - x_j), якщо \quad x_j < \omega_j, \beta_j > 0. \end{cases} \tag{4}$$

На рис. 1 показано функцію $f_j(x_j, \omega_j)$ для випадку $c_j < \beta_j$.

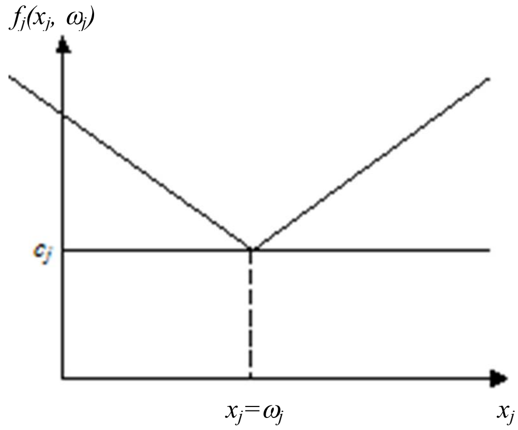

Рис. 1. Виникнення ефекту розгалуження при $x_j \neq \omega_j$.

Таким чином, стохастичний аналог ЗЛП (1) - (2) набуде вигляду

$$x_j^* = \arg\min\{F(X)/X\}, \tag{1a}$$

де

$$F(x) = M(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j, \omega_j)) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j +$$
$$+ M\sum_{j=1}^{n} \max\{\alpha_j(x_j - \omega_j); \beta_j(\omega_j - x_j)\} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n}(\int_0^{x_j} \alpha_j(x - \omega_j) P(d\omega_j) +$$
$$+ \int_{x_j}^{\infty} \beta_j(\omega_j - x_j) P(d\omega_j)).$$

Тут M - оператор математичного очікування; $f(x_j, \omega_j)$ - вимірна функція при кожному ω_j; ω_j - елементарна подія імовірнісного простору (Ω, Z, P), де Ω - множина елементарних подій; Z є σ-алгебра вимірних множин з Ω, P - певна в Ω імовірнісна міра, тобто $P(\Omega)$=1. У свою чергу, Z можна інтерпретувати як перелік всіх трьох груп конкретних результатів, які можна приписати для всіх груп з Z (наприклад, це може бути аналітична функція тощо).

Цільова функція $F(x)$ крім витрат на виробництво у виразі (1), також містить очікувані витрати, пов'язані з *дефіцитом* і *профіцитом* виробленої продукції. Завдання (1a) - (2) є окремим випадком загальної задачі стохастичного програмування [2]. Нижче розглянемо алгоритм вирішення цієї задачі.

Алгоритм 2. Нехай на s-му кроці (ітерації) отримано наближення x_i^s, $s = 0,1,...,$ (x^0 -задане довільне початкове наближення). Тоді:

1. У відповідності з апріорним розподілом φ(ω) отримуємо спостереження ω_j^s над реалізацією випадкової величини ω_j. Тут ω_j^s- незалежне спостереження над величиною ω_j може бути отримане в результаті компютерного експерименту (імітаційного моделювання) або ж в якості ω_j^s може бути взятий s-й елемент з набору статистичних спостережень (даних) величин в різні періоди (роки, місяці, декади тощо).

2. Обчислимо вектор-стохастичний квазіградієнт функції, компоненти якого визначаються наступним чином:

$$\xi_j^s = c_j + \begin{cases} \alpha_j, \text{ якщо } & x_j^s \geq \omega_j^s, \quad s = 0,1,..., \\ -\beta_j, \text{якщо } & x_j^s < \omega_j^s, \quad j = 1,...,n. \end{cases} \tag{5}$$

Нове наближення знаходимо згідно наступного варіанту стохастичного методу лінеаризації:

$$x_j^{s+1} = x_j^s + \rho_s(\overline{x}_j^s - x_j^s), 0 < \rho_s \leq 1,$$

$$z_j^{s+1} = z_j^s + \gamma_s(\xi_j^s - z_j^s), \ \gamma_s > 0, \ j = \overline{1,n}, \ s = 0,1,.... \tag{6}$$

Тут $\overline{x}_j^s$, $j = \overline{1,n}$, є рішенням (згідно алгоритму 1) наступної ЗЛП:

$$\overline{x}_j^s = arg\,min\left\{\sum_{j=1}^{n} z_j^s x_j \,/\, X\right\}, \ s = 0,1,.... \tag{7}$$

де z_j^s, $j = \overline{1,n}$, визначається згідно (6), для якого ξ_j^s, $j = \overline{1,n}$, обчислюється за (5).

Важливою особливістю цього алгоритму є простота його реалізації на ЕОМ, оскільки напрям «спуску» в ньому побудовано на основі випадкового вектора-стохастичного квазіградієнта ξ_j^s, який є незміщеною оцінкою узагальненого градієнта $\hat{F}_x(x^s)$ цільової функції $F(x)$. Іншими словами, умовне математичне очікування визначається як:

$$M(\xi^s / \chi_s) = \hat{F}_x(x^s) \ .$$

Тут вектор $\hat{F}_x(x^s)$ задовольняє нерівності

$$F(x) - \hat{F}_x(x^s) \geq (\hat{F}_x(x^s), x - x^s),$$

оскільки, за визначенням квазіградієнта

$$f(x, \omega) - f(x^s, \ \omega^s) \geq (\hat{f}_x(x^s, \omega^s), x - x^s) \ .$$

Отже, отримавши математичне очікування з обох частин цієї нерівності, визначаємо квазіградієнт функції $F(x)$ для будь-яких x.

Теорема. *Нехай виконуються умови*

$$\|\xi_j^s\| \leq d < \infty, \ \rho_s > 0, \ \gamma_s > 0, \ s = 0,1,...,$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \ \frac{\rho_s}{\gamma_s} \xrightarrow[s \to \infty]{} 0,$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty, \ \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s^2 < \infty.$$

Тоді з ймовірністю 1 граничні точки послідовності $\{x_j^s\}_{s=0}^{\infty}$, *визначається* (5) - (7), *що належать множині рішень задачі* (1а) - (2).

Доказ теореми і вибір параметрів методу (6) детально досліджені в [3].

У загальному випадку для вектора стохастичного квазіградієнта, маємо:

$$M(\xi^s / \chi_s) = \hat{F}_x(x^s) + b^s,$$

де b^s - зміщення, яке для збіжності викладених методів має в певному сенсі прямувати до 0 при $s \to \infty$.

IV. РЕЗУЛЬТАТ ЧИСЕЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Опишемо використання методу стохастичної лінеаризації (5) - (7) для вирішення окремого випадку завдання (1а) - (2) з додатковими обмеженнями типу $0 \leq x_i \leq d_i$, $i = \overline{1,5}$, коли витрати на виробництво не враховуються. Підпрограма, яка реалізує алгоритм 2, написана на мові VBA.

Нехай потрібно мінімізувати функцію

$$F(x) = M\sum_{i=1}^{n} max\begin{Bmatrix} \alpha_i(x_i - \omega_i); \\ \beta_i(\omega_i - x_i) \end{Bmatrix} \to min, \tag{1в}$$

при обмеженнях

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 200,$$
$$0 \leq x_1 \leq 50; \ 0 \leq x_2 \leq 7; \ 0 \leq x_3 \leq 7;$$
$$0 \leq x_4 \leq 0; \ 0 \leq x_5 \leq 25. \tag{2а}$$

Тут ω_j- випадкові величини, рівномірно розподілені на відрізках $[l_j, q_j]$, $i = 1, ..., 5$. Вектори $l = (l_1, ..., l_5)$; $q = (q_1, ..., q_5)$; $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_5)$; $\beta = (\beta_1, ..., \beta_5)$; задані у вигляді

$l = (0, 0, 0, 0, 0)$; $q = (60, 15, 17, 90, 40)$;
$\alpha = (1, 0, 3, 1, 2)$; $\beta = (3, 4, 1, 2, 3)$.

При вказаних значеннях аналітичний вираз функції мети (1в) має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{2}{15}x_2^2 + \frac{2}{17}x_3^2 + \frac{1}{60}x_4^2 + \frac{1}{16}x_5^2 - \\ - 3x_1 4x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 278{,}5 \quad (1с)$$

Стохастичний квазіградієнт $\xi^s = (\xi_1^s, ..., \xi_5^s)$ функції (1в) обчислюється аналітично згідно (5) за формулою

$$\xi_i^s = \begin{cases} \alpha_j, & если \quad x_j^s \geq \omega_j^s, \\ -\beta_j, & если \quad x_j^s < \omega_j^s, \quad i = 1, 2, ..., 5. \end{cases}$$

Для порівняння, отримано наступне точне вирішення задачі (1с) - (2а) одним з методів квадратичного програмування [3]:

$$x^* = (41.88057;\ 7.00000;\ 2.48092;\ 41.27456;\ 22.33456),$$
$$F(x^*) = 98.10089.$$

Для вирішення стохастичної задачі (1в) - (2а) використовуємо алгоритм 2, для якого початкове наближення

$$x^0 = (10{,}59375;\ 0{,}59375;\ 5{,}18750;\ 58{,}78125;\ 2{,}09375),$$

крокові множники ρ_s і δ_s визначалися наступним чином:

$$\rho_s = 1/(s + 1),\ \delta = 1/(s+1)^{2/3}.$$

Наведемо результати усереднених значень шуканих змінних і функцій на ітераціях з 161-ї по 170-у:

$$\bar{x}_1 = 41.24893;$$
$$\bar{x}_2 = 7.00000;$$
$$\bar{x}_3 = 2.22827;$$
$$\bar{x}_4 = 42.2829;$$
$$\bar{x}_5 = 20.47934;$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{10}\sum_{s=164}^{170} x_i^s\ ;$$

$$F(\bar{x}) = \frac{1}{10}\sum_{s=164}^{170} f(x^s, \omega^s) = 103.8945.$$

Слід зауважити, що значення $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_5)$ близьке до оптимального рішення детермінованої задачі (1с) - (2а), а значення $F(\bar{x})$ мало відрізняється від значення $F(x^*)$.

Підвищення точності рішення вимагає збільшення кількості ітерацій. При неточності апріорної інформації про параметри завдання відпадає необхідність в отриманні високої точності рішення.

Чисельний експеримент виконаний за допомогою програми, розробленої автором на мові VBA.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

[1] Ф. Мирзоахмедов, Противоречивые модели линейного программирования в производственно-экономических системах. - Душанбе: ТГНУ, 2002, 240с.

[2] Ю.М. Ермольев, Методы стохастического программирования. – М.: Наука,1976, 240с.

[3] Ф. Мирзоахмедов, Математические модели и методы управления производством с учетом случайных факторов. -Киев, Наукова думка, 1991, 220с.