Застосування Трійкових Симетричних Функцій для Цифрової Обробки Інформації на Основі Ортогональних Перетворень

Артем Ізмайлов
кафедра інформатики
Прикарпатський національний університет
Івано-Франківськ, Україна
aiartefact@gmail.com

Application of Symmetric Ternary Functions for Digital Information Processing Based on Orthogonal Transforms

Artem Izmailov
dept. of Computer Science
Precarpathian National University
Ivano-Frankivsk, Ukraine
aiartefact@gmail.com

***Анотація*—Проаналізовано можливість застосування трійкових симетричних функцій для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень. Застосовано логічні операції трійкової симетричної логіки для синтезу нової системи функцій на основі трійкових симетричних, яка може бути використана для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень.**

***Abstract*—Application possibility of symmetric ternary functions for digital information processing based on orthogonal transforms was analyzed. Logical operations of symmetric ternary logic were applied for synthesis of the new system of functions based on symmetric ternary functions that can be applied for digital information processing based on orthogonal transforms.**

***Ключові слова*—цифрова обробка інформації; ортогональне перетворення; трійкові симетричні функції; логічні операції**

***Keywords*—digital information processing; orthogonal transform; symmetric ternary functions; logical operations**

I. Вступ

Цифрова обробка інформації є ключовим елементом багатьох технічних систем, які використовуються у різних галузях економіки, управління, виробництва, зв'язку та медицини [1 – 4]. Відповідно, ефективні рішення у галузі цифрової обробки інформації призведуть до підвищення ефективності перебігу процесів, які включають цифрову обробку інформації, у прикладних галузях.

Одним із актуальних завдань цифрової обробки інформації є обробка цифрових сигналів на основі ортогональних перетворень [1 – 3]. У рамках розв'язання даного завдання постає проблема розробки нових ортогональних перетворень, які дозволять з вищою ефективністю проводити обробку конкретних цифрових сигналів, у тому числі сигналів, для яких існуючі методи працюють із недостатнім рівнем ефективності [3].

У більшості сучасних систем цифрової обробки інформації використовується двійкова логіка [1, 4]. Водночас використання трійкових симетричних функцій та відповідної їм логіки є обмеженим, незважаючи на доведену більшу ефективність описаної логіки у порівнянні із двійковою [4, 5].

Метою дослідження є побудова системи функцій на основі трійкових симетричних функцій, яка може бути використана для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в успішному застосуванні логічних операцій трійкової симетричної логіки для синтезу системи функцій на основі трійкових симетричних функцій, яка може бути використана для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень.

II. Трійкові симетричні функції

Трійкові симетричні функції задаються аналітичним виразом (1) [5].

$$Ter_n(x)=\begin{cases} 0, \text{якщо}\ 0 \le modh(x+\dfrac{3^n-1}{2}, 3^{n+1}) < 3^n, \\ 1, \text{якщо}\ 3^n \le modh(x+\dfrac{3^n-1}{2}, 3^{n+1}) < 2\cdot 3^n, \\ -1, \text{якщо}\ 2\cdot 3^n \le modh(x+\dfrac{3^n-1}{2}, 3^{n+1}) < 3^{n+1}, \end{cases} \quad (1)$$

де n – порядковий номер функції, x – цілочисельний аргумент, $mod(x,p)$ – допоміжна функція, задана аналітичним виразом (2).

$$modh(x,p)=\begin{cases} mod(x,p)+p, \text{якщо}\ x<0, \\ mod(x,p), \quad \text{якщо}\ x \ge 0, \end{cases} \quad (2)$$

де $mod(x,p)$ – функція залишку від ділення числа x на число p.

Однак у вигляді (1) трійкові симетричні функції непридатні для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень, у зв'язку з неповнотою даної системи та її неортогональністю [6, 7].

Для подолання проблеми неможливості застосування системи (1) трійкових симетричних функцій для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень необхідно побудувати нову систему функцій на основі існуючої системи (1).

Однак, побудувати нову систему функцій, яка може бути застосована для ортогональних перетворень, на основі трійкових симетричних функції у вигляді (1) неможливо, оскільки областю визначення системи (1) є вся числова вісь, а для цифрової обробки інформації у більшості випадків застосовують функції з областю визначення на проміжку [0; 1) [1 – 3]. Це пов'язано зі зручністю проведення необхідних перетворень та обчислень [1 – 3]. Відповідно, виникає необхідність нормалізування функцій (1) до проміжку [0; 1).

Окрім приведення області визначення системи (1) трійкових симетричних функцій до проміжку [0; 1) є ще інші властивості системи функцій (1), які необхідно змінити для того, щоб на основі даної системи можна було побудувати систему функцій, придатну для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень. Детальний перелік властивостей системи (1), які підлягають зміні, разом з усіма проміжними обчисленнями можна знайти у [7]. У результаті відповідних перетворень система трійкових симетричних функцій з областю визначення на проміжку [0; 1) може бути представлена у вигляді (3).

$$Ter\,01_{n,i}(\theta)=Ter_{\left|3^n-1-i\right|}(\theta * 3^{3^n}), \quad (3)$$

де $n=log_3N$ – порядок набору базисних функцій теоретико-числових перетворень, N – кількість функцій у наборі, $\theta=t/T$ – параметр часу, тобто час, нормований до інтервалу T, t – поточне значення часу, $i=0,1,2,\ldots,N-1$ – порядковий номер функції, $Ter_n(\theta)$ – трійкові симетричні функції, які задані аналітичним виразом (4).

$$Ter_n(x)=\begin{cases} 0,\ 0 \le modh(x-3^n, 3^{n+1}) < 3^n, \\ 1,\ 3^n \le modh(x-3^n, 3^{n+1}) < 2\cdot 3^n, \\ -1,\ 2\cdot 3^n \le modh(x-3^n, 3^{n+1}) < 3^{n+1}. \end{cases} \quad (4)$$

Необхідно відзначити появу наборів трійкових симетричних функцій у аналітичному виразі (3). Уведення наборів пов'язане зі зміною області визначення трійкових симетричних функцій і є необхідним для перетворення трійкових симетричних функцій із вигляду (3) у вигляд (4). Детальний опис принципу роботи уведених наборів можна знайти у [7].

Система трійкових симетричних функцій (4) все ще не є повною і ортогональною, але на її основі може бути побудована система функцій, яка може бути використана для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень.

III. Система функцій на основі добутків трійкових симетричних функцій

Одним з найочевидніших варіантів утворення нової системи функцій є утворення системи добутків трійкових симетричних функцій подібно до утворення функціями Радемахера системи функцій Уолша [2]. Однак, у випадку утворення системи добутків на основі хоча б двох трійкових симетричних функцій утвориться лише $2^2 = 4$ функції і отримана система виявиться неповною. Неповнота даної системи випливає із того факту, що максимальна кількість змін функціями своїх значень у випадку використання трійкових симетричних функцій перших двох порядків з першого набору системи (4) (нульовий набір, як випливає з виразу (4), містить одну функцію, а перший – три) буде рівна 9, тобто для досягнення повноти даної системи необхідно, щоб вона складалась з 9 функцій (на противагу чотирьом наявним).

Для вирішення виявленої проблеми можна скористатись піднесенням до другого степеня (на противагу першому степеню, який використовується при формуванні добутків функцій Радемахера [2]) при формуванні добутків трійкових симетричних функцій. Для спрощення візуального аналізу результатів і без втрати загальності можна розглянути систему добутків трійкових симетричних функцій, утворену трійковими симетричними функціями перших двох порядків першого набору системи (4). Описана система добутків задається аналітичним виразом (5).

$$Ter\,01\,Mult_{num}(\theta)=\prod_{j=1}^{2} Ter\,01_{1,2-j}(\theta)^{A_{num,j}}, \quad (5)$$

де $num=0,1,\ldots,3^2-1$ – порядок функції, $A_{num,j}$ – елемент рядка num та стовпця j кодової матриці Грея A (Рис. 1).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Матриця 9×2 трійкового незваженого коду Грея

Необхідно пам'ятати, що формула (5) може бути узагальнена для довільного порядку. Отримана система функцій є повною, але не є ортогональною. Однак, її можна ортогоналізувати за алгоритмом Грама-Шмідта, опис якого можна знайти, наприклад, у [8]. Доведення факту неортогональності системи (5), як і перебіг процесу ортогоналізації за процедурою Грама-Шмідта, можуть бути знайдені у [7]. Після процедури ортогоналізації Грама-Шмідта система функцій (5) утворить нову систему, яка породжує певну матрицю значень (Рис. 2), яка може бути використана у якості матриці ортогонального перетворення.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & -2/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/9 & -2/9 & 1/9 & -2/9 & 4/9 & -2/9 & 1/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Рис. 2. Матриця значень ортогоналізованої системи функцій (5)

Однак, отримана матриця (Рис. 2) у 2-му, 6-му, 7-му та 8-му рядках містить дробові значення, які ускладнюють процедуру перетворення. У зв'язку з цим фактом доцільно перевірити можливість отримання матриці, яка буде містити меншу кількість дробових значень і, відповідно, буде у меншій мірі ускладнювати процедуру перетворення. Одним із способів отримати таку матрицю є заміна добутків трійкових симетричних функцій на результати інших логічних операцій в межах трійкової симетричної логіки.

IV. Системи функцій на основі результатів логічних операцій трійкової симетричної логіки

Для спрощення візуального аналізу результатів і без втрати загальності можна для подальших обчислень модифікувати аналітичний вираз (5) заміною операції множення довільною двомісною логічною операцією трійкової симетричної логіки. Іншими словами, розглядатимуться системи функцій, які породжуються результатами застосування двомісних логічних операцій трійкової симетричної логіки до трійкових симетричних функцій перших двох порядків першого набору системи (4). У результаті отримується аналітичний вираз (6).

$$Ter\,01Op_{num}(\theta) = \mathop{*}_{j=1}^{2} Ter\,01_{1,2-j}(\theta)^{A_{num,j}}, \qquad (6)$$

де $num=0,1,\ldots,3^2-1$ – порядок функції, * – деяка двомісна логічна операція трійкової симетричної логіки, $A_{num,j}$ – елемент рядка *num* та стовпця *j* кодової матриці Грея A (Рис. 1)

Необхідно враховувати, що у аналітичному виразі (6) піднесення до степеня реалізує не множення, а певну двомісну логічну операцію трійкової симетричної логіки.

За аналогією з бінарною логікою у трійковій симетричній логіці є 3^{3^n} операцій для *n* аргументів. Звідси випливає, що у трійковій симетричній логіці є $3^{3^2} = 19683$ двомісні операції. І кожна з них може бути використана у аналітичному виразі (6) для утворення деякої системи функцій на основі трійкових симетричних.

У зв'язку з тим, що переважна більшість операцій трійкової симетричної логіки не має назв (таких, як наприклад, трійкова симетрична диз'юнкція, тощо), доцільно з метою їх розрізнення занумерувати їх за деяким принципом. Зручним способом упорядкування даних операцій є їх упорядкування за таблицями істинності. Так операції із таблицею істинності, яка містить лише значення «*1*» (Табл. 1) доцільно присвоїти номер «1», а операції із таблицею істинності, яка містить лише значення «*–1*» (Табл. 2) – «19683».

ТАБЛИЦЯ I. ТАБЛИЦЯ ІСТИННОСТІ ЛОГІЧНОЇ ОПЕРАЦІЇ З ПОРЯДКОВИМ НОМЕРОМ «1»

Значення першого операнду	**Значення другого операнду**	**Результат виконання операції**
1	1	1
1	0	1
1	–1	1
0	1	1
0	0	1
0	–1	1
–1	1	1
–1	0	1
–1	–1	1

ТАБЛИЦЯ II. ТАБЛИЦЯ ІСТИННОСТІ ЛОГІЧНОЇ ОПЕРАЦІЇ З ПОРЯДКОВИМ НОМЕРОМ «19683»

Значення першого операнду	**Значення другого операнду**	**Результат виконання операції**
1	1	–1
1	0	–1
1	–1	–1
0	1	–1
0	0	–1

Значення першого операнду	Значення другого операнду	Результат виконання операції
0	–1	–1
–1	1	–1
–1	0	–1
–1	–1	–1

Більшість операцій при підстановці у вираз (6) утворюють у результаті лінійно залежні системи функцій (визначники матриць значень рівні нулю). Серед лінійно незалежних систем, однак, не зустрічаються ортогональні системи, а отже, дані системи теж потребують застосування процедури ортогоналізації. Встановлено, що має місце наступна тенденція: чим більший за модулем визначник матриці значень, тим у ортогоналізованій матриці більшими за модулем є знаменники дробових значень. З цього твердження випливає доцільність аналізу матриць значень з якнайменшими визначниками.

Якщо розглянути матрицю значень системи функцій, одержаної на основі операції з порядковим номером «701» (Рис. 3), то можна дійти висновку, що кількість різних за модулем дробових значень у ній вища, ніж у матриці, отриманій за добутками (Рис. 2) (7 у порівнянні з 5). Тобто за критерієм кількості дробових значень ортогоналізована матриця значень за системою (5) (Рис. 2) є більш придатною для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень.

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\
-\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0
\end{pmatrix}$$

Рис. 3. Матриця значень ортогоналізованої системи функцій (6) за операцією з порядковим номером «701»

Однак, визначник матриці значень за системою (5) (Рис. 2) рівний 64, у той час, як визначник матриці за системою (6) на основі операції з порядковим номером «701» (Рис. 3) рівний 1. Іншими словами, з точки зору критерію обчислення оберненої матриці друга матриця є більш прийнятним варіантом. Звідси випливає, що відкидати з подальшого аналізу ефективності застосування трійкових симетричних функцій для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень матрицю за системою (6) на основі операції з порядковим номером «701» (Рис. 3) не можна, оскільки за частиною критеріїв вона може виявитися більш ефективною, ніж матриця за системою (5) (Рис. 2).

V. Висновки

Трійкові симетричні функції у чистому вигляді (система (1)) не можуть бути використані для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень. З метою їх адаптації для даних процесів необхідно будувати на їх основі нові системи функцій такі, як наприклад, системи (5) та (6).

Принципово новим підходом є застосування логічних операцій трійкової симетричної логіки для формування системи функцій на основі трійкових симетричних. У результаті такого застосування отримано ортогоналізовану матрицю значень (Рис. 3), яка може бути використана для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень і за рядом критеріїв може перевищити ефективність застосування попередньо отриманої матриці на основі добутків (Рис. 2).

Подальші дослідження полягають у адаптуванні критеріїв ефективності застосування систем функцій для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень до роботи зі значеннями трійкової симетричної логіки з метою аналізу ефективності застосування отриманих систем функцій у цільовій області.

Література References

[1] Э. Айфичер, Б. Джервис. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 992 с.

[2] Л.А. Залманзон, Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управле-нии, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.

[3] Н. Ахмед, Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Н. Ахмед, К.Р. Рао; пер. с англ. Т.Э. Кренкеля. – М.: Связь, 1980. – 248 с.

[4] B. Hayes, Computing science. Third base. A reprint from American Scientist, the magazine of Sigma Xi, the Scientific Research Society, vol. 89, Nr. 6. November–December 2001, pp. 490-494

[5] A. Izmailov, Effectiveness analysis of bases and function systems used in digital information processing / A. Izmailov // Збірник тез 52 конференції студентських наукових кіл Гірничо-металургійної академії імені Станіслава Сташіца у Кракові. – Краків, 2015. – С. 281.

[6] А.В. Ізмайлов, Трійкові симетричні функції та їх застосування у цифровій обробці інформації / А. В. Ізмайлов, Л. Б. Петришин // Системи обробки інформації. — 2016. — № 4. — С. 41-44.

[7] A. Izmailov, Symmetric ternary functions and their application in orthogonal transforms / A. Izmailov, L. Petryshyn // IEEE Xplore Digital Library, in press.

[8] L.E. Franks, “Signal Theory”, Prentice Hall, 1969, p. 318.