Математичне Моделювання Кінетики Квазістатичного Фільтраційного Насичення Пористого Шару Природнім Газом

Василь Чекурін
Відд. математичних проблем механіки неоднорідних тіл
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Львів, Україна
v.chekurin@gmail.com

Зоя Притула
Відділ аналізу, геометрії та топології
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Львів, Україна
zoya777b@gmail.com

Mathematical Modelling of Kinetics of Quasistatic Filtrational Saturation of a Porous Layer by Natural Gas

Vasyl Chekurin
Dept. of Math. problems of mechanics of heterogen. solids
Pidstryhach IAPMM of NASU
Lviv, Ukraine
v.chekurin@gmail.com

Zoya Prytula
Dept. of analysis, geometry and topology
Pidstryhach IAPMM of NASU
Lviv, Ukraine
zoya777b@gmail.com

***Анотація*—Досліджено процеси перерозподілу тиску газу в пористому плоскому шарі за малих відхилень початкового тиску. За таких умов отримано лінеаризоване рівняння нестаціонарної фільтрації газу, коефіцієнти якого залежать від параметрів пористого середовища, термодинамічних властивостей газу та величини незбуреного тиску в шарі. Сформульовано задачу кінетики вирівнювання малих локальних збурень тиску в пористому шарі. З використанням функції Гріна отримано її аналітичний розв'язок. На основі отриманого розв'язку кількісно досліджено вплив коефіцієнта проникливості та величини незбуреного тиску на швидкість загасання тиску газу.**

***Abstract*—We investigate the processes of gas pressure redistribution in a porous plane layer under small perturbations of initial pressure. Under these conditions, we have obtained a linearized equation of nonstationary gas filtration with the coefficients depending on the parameters of the porous medium, the thermodynamic characteristics of gas and the value of unperturbed pressure. A problem of a kinetics of equalization of gas pressure small local perturbations in the porous layer has been formulated. Using the Green function, we have obtained an analytical solution of the problem. On the basis of obtained solution we have quantitatively investigated the influence of permeability coefficient and the value of unperturbed pressure on the rate of damping pressure.**

Ключові слова—пористий шар; фільтрація газу; мале збурення тиску газу; коефіцієнт проникливості; незбурений тиск; швидкість загасання.

Keywords—porous layer; gas filtration; small perturbation of gas pressure; permeability coefficient; rate of damping.

I. Вступ

Підземні сховища часто споруджують у пористих геологічних пластах [1, 2]. Експлуатаційні характеристики таких об'єктів, зокрема їхні ємнісні властивості, часові та енергетичні характеристики процесів відбору й нагнітання газу тощо істотно залежать від коефіцієнтів пористості, проникливості та інших фізичних параметрів середовища [3-8].

Під час експлуатації сховища процеси нагнітання та відбору газу чергуються із процесом зберігання. В ході зберігання тиск в пористому пласті вирівнюється, а при нагнітанні та відборі відбуваються локальні збурення тиску в околі робочих свердловин.

Дані моніторингу тиску в робочих та контрольних свердловинах можна використати для оцінювання експлуатаційних властивостей сховища, зокрема, їхніх пікових характеристик, які визначають максимальну продуктивність процесів відбору та нагнітання газу.

Це можливо реалізувати шляхом розв'язування відповідних обернених задач нестаціонарної фільтрації в пористих шарах. Проте, на сьогодні такі задачі ще навіть не сформульовані математично. Це пояснюється, зокрема, тим, що фільтраційні процеси в пористих середовищах описуються суттєво нелінійними диференціальними рівняннями із частинними похідними, для яких не відомі аналітичні розв'язки. Друга причина полягає у тому, що фізичні параметри пористих пластів, в яких споруджені сховища, як правило вивчені недостатньо.

У доповіді представлено результати математичного моделювання кінетики насичення пористого пласта за повільних нагнітання або відбору газу через свердловину. Процес нагнітання (відбору) за таких умов моделюється стрибкоподібним збільшенням (зменшенням) тиску в привибійній зоні свердловини на величину, достатньо малу, порівняно із пластовим тиском. Оскільки за таких умов відхилення від рівноважного стану є малі, то ці процеси з достатньою точністю можна описати і за допомогою відповідних лінеаризованих рівнянь [9].

Тому у цій роботі розглянуто кінетику процесу вирівнювання тиску газу в пористому плоскому шарі за малих збурень. Для опису процесу фільтрації за таких умов проведено лінеаризацію рівняння нестаціонарної фільтрації. Коефіцієнти отриманого лінеаризованого рівняння залежать від характеристик пористого середовища, термодинамічних властивостей газу та незбуреного тиску.

В рамках такої математичної моделі кількісно досліджено процеси вирівнювання малих локальних збурень тиску газу в шарі залежно від коефіцієнта проникливості пористого середовища та величини незбуреного тиску.

II. ФОРМУЛЮВАННЯ ТА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КІНЕТИКИ ВИРІВНЮВАННЯ ТИСКУ ГАЗУ В ПОРИСТОМУ ШАРІ ЗА МАЛИХ ЗБУРЕНЬ

Розглянемо процес одновимірної ізотермічної фільтрації газу в пористому шарі, який описується таким нелінійним рівнянням [10, 11]

$$m\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{k\sqrt{P}}{\mu}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Тут $P=p^2$, $p=p(x,t)$ – тиск, k – коефіцієнт проникливості, μ – динамічний коефіцієнт в'язкості газу, m – коефіцієнт пористості, x – просторова координата, t – час.

Поверхні шару $x=0$ та $x=L$ є непроникними. Тоді граничні умови відносно змінної P мають такий вигляд

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=L}=0. \tag{2}$$

Вважаємо, що задано розподіл тиску в початковий момент часу:

$$P(x,0)=P_0(x). \tag{3}$$

Оскільки сформульована задача (1)-(3) є нелінійною, то проведемо дослідження кінетики перерозподілу тиску газу за малих відхилень початкового розподілу від однорідного.

Розглянемо випадок, коли кількість газу, яка є в шарі залишається незмінною, тобто

$$m\int_0^L \rho(x,t)\,dx=M=const.$$

Тут ρ – густина.

Нехай $p(x)$ – розподіл тиску в початковий момент часу, а $\bar{p}$ – однорідний тиск, який встановиться після вирівнювання. Нехай відхилення $p(x)-\bar{p}$ є достатньо малим: $\frac{p(x)-\bar{p}}{\bar{p}}\ll 1$. Оскільки процес перерозподілу газу є релаксаційним, то і для моменту часу $t>0$, має виконуватись умова: $\frac{p(x,t)-\bar{p}}{\bar{p}}\ll 1$. Ця умова дозволяє лінеаризувати рівняння (1).

Означимо збурення змінної P таким чином

$$\tilde{P}(x,t)=\frac{P(x,t)-\bar{P}}{\bar{P}},$$

де $\bar{P}=\bar{p}^2$.

З урахуванням малості збурення $\tilde{p}=\frac{p(x,t)-\bar{p}}{\bar{p}}$, отримуємо співвідношення:

$$\tilde{P}=2\tilde{p}.$$

Лінеаризоване рівняння відносно змінної P має такий вигляд

$$\frac{\partial\tilde{P}(x,t)}{\partial t}=\frac{k\bar{p}}{\mu m}\frac{\partial^2\tilde{P}(x,t)}{\partial x^2}, \tag{4}$$

а граничні умови на поверхнях шару $x=0$, $x=L$ та початкова умова для збурення $\tilde{P}$ відповідні такі:

$$\left.\frac{\partial\tilde{P}}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial\tilde{P}}{\partial x}\right|_{x=L}=0, \tag{5}$$

$$\tilde{P}(x,0) = \tilde{P}_0(x). \qquad (6)$$

У результаті сформульовано задачу (4)-(6), яка описує кінетику вирівнювання тиску в шарі для випадку малих локальних збурень.

Задачу (4)-(6) розв'язуємо, використовуючи метод функцій Гріна.

Функція Гріна цієї задачі має вигляд [12]

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n x}{L} \cos\frac{\pi n \xi}{L} e^{-\frac{k\bar{p}\pi^2 n^2}{\mu m L^2}t},$$

а навантажувальна функція відповідна така

$$\omega(x,t) = \tilde{P}_0(x)\delta(t),$$

де $\delta(t)$ – функція Дірака.

З урахуванням цього, а також співвідношення між збуреннями $\tilde{P}$ та $\tilde{p}$, для збурення тиску $\tilde{p}$ в результаті отримуємо

$$\tilde{p}(x,t) = \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n x}{L} e^{-\frac{k\bar{p}\pi^2 n^2}{\mu m L^2}t} \int_0^L \tilde{P}_0(\xi) \cos\frac{\pi n \xi}{L} d\xi. \qquad (7)$$

Таким чином, з використанням функції Гріна отримано аналітичний розв'язок задачі (4)-(6) про вирівнювання тиску в пористому шарі за малих збурень.

III. Дослідження впливу коефіцієнта проникливості та величини незбуреного тиску на швидкість загасання

На основі отриманого розв'язку (7) кількісно досліджено вплив коефіцієнта проникливості k пористого середовища, а також величини незбуреного тиску $\bar{p}$ на швидкість загасання тиску.

На рис. 1 показано кінетику загасання тиску в точці $\tilde{x} = 0.5$ $\tilde{p}(0.5,t)$, нормованого на його значення в початковий момент часу $\tilde{p}_m = \tilde{p}(0.5,0)$: $\tilde{p}_n = \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_m}$, при різних значеннях k, а саме, $k = 5\cdot 10^{-12}$; $5\cdot 10^{-13}$; $2\cdot 10^{-13}$; $1{,}1\cdot 10^{-13}$; $5\cdot 10^{-14}\,м^2$ (криві 1-5 відповідно). При цьому $\bar{p} = 50\cdot 98066{,}5$ Па; $\mu = 1{,}283\cdot 10^{-5}$ Па·с; $m = 0{,}2$; $L = 1000$ м; $\tilde{x} = \frac{x}{L}$ – безрозмірна координата.

Зазначимо, що дані для фільтраційних характеристик відповідають суміші газів, в якій 96 % складає метан.

Функцію $\tilde{P}_0(\xi)$ вибрано у вигляді дельта-подібної функції:

$$\tilde{P}_0(\xi) = \frac{b}{1+\left(\frac{\xi}{a}\right)^2} + c\xi^2 + d,$$

де коефіцієнти c та d мають такий вигляд:

$$c = \frac{a^2 b}{\left(1+a^2\right)^2},$$

$$d = \frac{-\frac{1}{3}ab\left(3arctg\frac{1}{a}\left(1+a^2\right)^2 + a\right)}{\left(1+a^2\right)^2}.$$

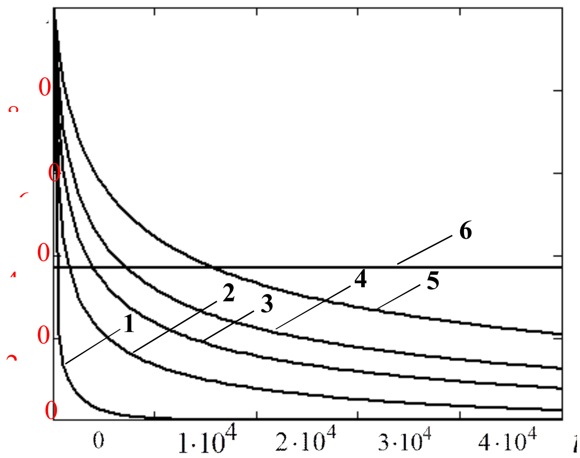

Рис. 1. Кінетика загасання тиску в точці $\tilde{x} = 0.5$ за різних значень k

Проведено також оцінку часу релаксації на основі часу зменшення максимального значення тиску в точці $\tilde{x} = 0.5$ в e раз.

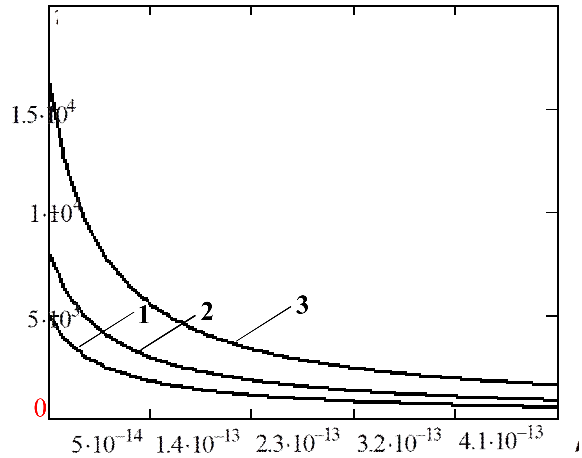

Рис. 2 Залежність часу загасання тиску від k за різних значень $\bar{p}$

Крива 6 на рис. 1 зображує характерне значення $1/e$. Для цього характерного значення показано залежності часу загасання τ від коефіцієнтів проникливості k, зокрема, це ілюструють криві 1-3 на рис. 2, які побудовано відповідно для $\bar{p} = 160 \cdot 98066{,}5;\ 100 \cdot 98066{,}5;\ 50 \cdot 98066{,}5\ Па$.

Як видно із рис. 2, зі збільшенням коефіцієнта проникливості k, час загасання τ зменшується, причому чим більше значення незбуреного тиску $\bar{p}$ в шарі, тим менший час загасання.

На рис. 3 проілюстровано кінетику загасання тиску $\tilde{p}$ в точці $\tilde{x} = 0.5$ $\tilde{p}(0.5, t)$ за різних значень незбуреного тиску $\bar{p}$: $160 \cdot 98066{,}5;\ 100 \cdot 98066{,}5;\ 60 \cdot 98066{,}5;\ 30 \cdot 98066{,}5;\ 10 \cdot 98066{,}5\ Па$ (криві 1-5 відповідно). Крива 6 на цьому рисунку зображує характерне значення $1/e$.

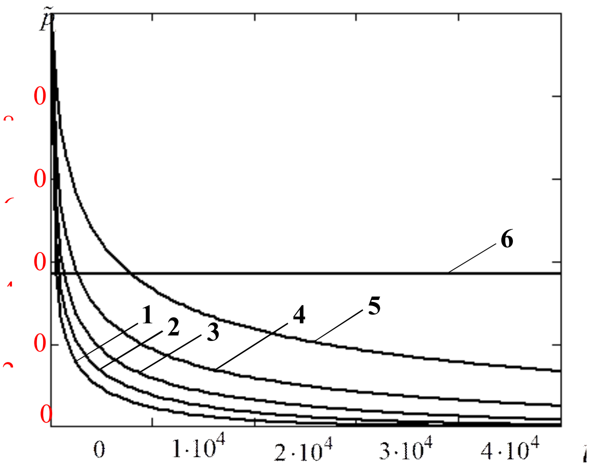

Рис. 3 Кінетика загасання тиску в точці $\tilde{x} = 0.5$ за різних значень $\bar{p}$

На рис. 4 наведено залежності часу загасання τ від величини незбуреного тиску $\bar{p}$.

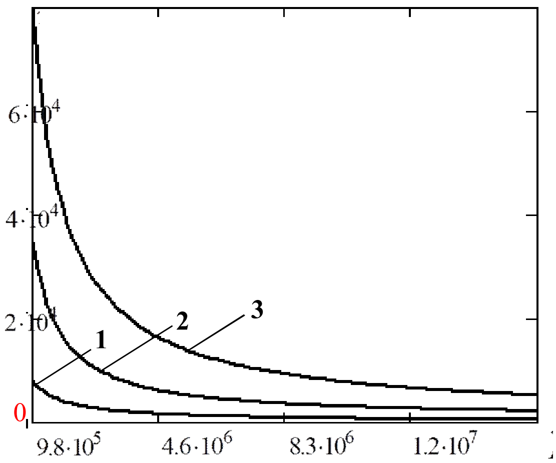

Рис. 3 Залежність часу загасання тиску від $\bar{p}$ за різних значень k

Криві 1-3 на рис. 4 відповідають таким значенням коефіцієнта k: $k = 5 \cdot 10^{-13};\ 1.1 \cdot 10^{-13};\ 5 \cdot 10^{-14}\ м^2$.

Як видно з рис. 4, зі збільшенням незбуреного тиску $\bar{p}$, час загасання зменшується. При цьому, чим більший коефіцієнт проникливості, тим менший час загасання.

IV. Висновки

У роботі досліджено кінетику процесу вирівнювання тиску газу в пористому плоскому шарі за малих збурень. Для опису процесу фільтрації за таких умов проведено лінеаризацію рівняння нестаціонарної фільтрації. Отримано лінеаризоване рівняння, коефіцієнти якого залежать від характеристик пористого середовища, термодинамічних властивостей газу та незбуреного тиску. Одержане рівняння доповнено відповідними граничними умовами на поверхнях шару та початковою умовою.

Сформульовано задачу кінетики вирівнювання тиску в шарі для випадку малих локальних збурень. З використанням функції Гріна одержано аналітичний розв'язок сформульованої задачі.

Встановлено кількісні закономірності процесів вирівнювання малих локальних збурень тиску газу в шарі залежно від коефіцієнта проникливості та величини незбуреного тиску.

Література References

[1] К. С. Басниев, И. Н. Кочина, В. М. Максимов, Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993.

[2] Х. Азис, Э. Сеттари, Математическое моделирование пластовых систем. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

[3] Н. М. Притула, Я. Д. Пянило, М. Г. Притула, Підземне зберігання газу (математичні моделі та методи). Львів: Видавництво «Растр-7», 2015.

[4] S. Y. Misyura, "The influence of porosity and structural parameters on different kinds of gas hydrate dissociation", *Scientific Reports,* vol. 6, p. 30324, July, 2016.

[5] T. P. Miroshnichenko, N. A. Lutsenko, V. A. Levin, "Gas filtration from an underground reservoir at a large initial pressure gradient," *J Appl. Mech. Tech Phy.*, vol. 56, no. 5, pp. 864–869, Sept., 2015.

[6] L. D. Eskin, "A self-similar solution to the equation of gas filtration in a spherically symmetric porous medium," *Russ. Math.*, vol. 52, no. 8, pp. 48–57, 2008.

[7] A. V. Akhmetzyanov, "Computational aspects in controlling filtration of fluids and gases in porous media," *Autom. Remote Control.*, vol. 69, no. 1, pp. 1–12, Jan., 2008.

[8] S. D. Algazin, "Numerical study of single-phase gas filtration in a porous medium," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, vol. 52, no. 4, p. 615, July., 2011.

[9] В. Чекурін, З. Притула, "Математичне моделювання кінетики вирівнювання тиску газу в пористому шарі за малих збурень", *Вісник НУ «Львівська політехніка»: Комп. науки та інформ. техн.*, "подано до друку".

[10] Г. Б. Пыхачев, Р. Г. Исаев, Подземная гидравлика (учебное пособие). М.: Недра, 1973.

[11] Л. С. Лейбензон, Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.: ОГИЗ, Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1947.

[12] А. Г. Бутковский, Характеристики систем с распределенными параметрами (справочное пособие). М.: Наука, 1979.